

INVESTIGACIÓN de OPERACIONES

7a. edición



INCLUYE CD-ROM

PEARSON
Prentice Hall®

HAMDY A. TAHA

Investigación de operaciones

Investigación de operaciones

Séptima edición

Hamdy A. Taha

University of Arkansas, Fayetteville

TRADUCCIÓN:
Virgilio González Pozo
Ingeniero Químico
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA:
M. en C. Guillermo Martínez del Campo Varela
Universidad Iberoamericana

Bonifacio Román Tapia
Ingeniero Mecánico Electricista
Universidad Nacional Autónoma de México

Heriberto García Reyes
Director Asociado del Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey

PEARSON
Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

TAHA, HAMDY A.

Investigación de operaciones, 7a. edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2004

ISBN: 970-26-0498-2
Área: Universitarios

Formato: 18.5 × 23.5 cm Páginas: 848

ISBN 0-13-032374-8

Edición en español
Editor: Guillermo Trujano Mendoza
e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com
Supervisor de desarrollo: Jorge Bonilla Talavera
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

Edición en inglés
Editor-in-Chief: Denise J. Clinton
Vice President and Editorial Director, ECS: *Marcia J. Horton*
Acquisitions Editor: *Dorothy Marrero*
Editorial Assistant: *Erin Katchmar*
Vice President and Director of Production and Manufacturing, ESM: *David W. Riccardi*
Executive Managing Editor: *Vince O'Brien*
Managing Editor: *David A. George*
Production Editor: *Ann Imhof*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Creative Director: *Carole Anson*
Art Director: *Jayne Conte*
Cover Designer: *Bruce Kenselaar*
Art Editor: *Greg Dulles*
Manufacturing Manager: *Trudy Pisciotti*
Manufacturing Buyer: *Lynda Castillo*
Marketing Manager: *Holly Stark*

SÉPTIMA EDICIÓN, 2004

D.R. © 2004 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco No. 500-5° piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

PEARSON Educación ®

ISBN 970-26-0498-2

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 05 04 03 02

A Karen

Los ríos no llevan agua,
el sol las fuentes secó…
¡Yo sé dónde hay una fuente
que no ha de secar el sol!
La fuente que no se agota
es mi propio corazón…

—V. Ruiz Aguilera (1862)

Contenido abreviado

Contenido

Prefacio

Es gratificante saber que durante más de 30 años, cientos de miles de estudiantes en todo el mundo han conocido la investigación de operaciones a través de las varias ediciones de este libro. Este éxito conlleva la responsabilidad de cumplir con las necesidades de futuras generaciones de alumnos. La séptima edición es el resultado de un esfuerzo dirigido a cumplir con esta responsabilidad.

El principal impulso para la séptima edición es el extenso respaldo de programación que se usa en el libro:

1. TORA basado en Windows.
2. Plantillas de hoja de cálculo de Excel.
3. Ejemplos de aplicaciones de LINGO y de AMPL.

El programa TORA tiene módulos para inversión de matrices, solución de ecuaciones lineales simultáneas, programación lineal, modelos de transporte, modelos de redes, programación entera, modelos de colas, planeación de proyectos con CPM y PERT, y teoría de juegos. TORA puede ser ejecutado en modo automático o tutorial. En el modo automático presenta la solución final del problema, por lo general en el formato normal que usan los paquetes comerciales. El modo tutorial es una función única que proporciona retroalimentación inmediata para probar el conocimiento de los detalles de cálculo de cada algoritmo por parte del lector. Como en su predecesor para DOS, las distintas pantallas en TORA se presentan en una manera lógica y no ambigua, y eliminan esencialmente la necesidad de contar con un manual de usuario.

Las plantillas de la hoja de cálculo de Excel complementan los módulos de TORA. Esas plantillas incluyen programación lineal, programación dinámica, proceso analítico de jerarquías (AHP), modelos de inventario, histogramas de datos sin procesar, teoría de decisiones, colas de Poisson, fórmula P-K, simulación y modelos no lineales. Algunas de las plantillas son hojas de cálculo directas. En otras se usa el Solver de Excel o macros de VBA (Visual Basic). Independientemente del diseño, todas las plantillas ofrecen la particularidad única de estar equipadas con una sección de entrada de datos que permite resolver problemas diferentes sin necesidad de modificar las fórmulas ni la distribución de la hoja de cálculo. De esta manera, el usuario puede experimentar, probar y comparar distintos conjuntos de datos en una forma cómoda. Donde fue posible, se protegieron las fórmulas y la distribución de las hojas de cálculo para reducir al mínimo la posibilidad de alterarlas en forma inadvertida.

Este libro contiene ejemplos de los paquetes comerciales LINGO y AMPL, para resolver problemas de programación lineal. El objetivo es familiarizar al lector con la forma en que se resuelven en la práctica modelos matemáticos de programación muy grandes.

El programa TORA y las hojas de cálculo de Excel se integraron al texto en una forma que facilita el presentar y probar conceptos que de otra manera no se hubieran podido presentar con eficiencia. De acuerdo con mi experiencia personal, he visto que el módulo tutorial de TORA y las hojas de cálculo de Excel son muy efectivos en las presentaciones en clase. Se

pueden demostrar muchos conceptos al instante, sólo cambiando los datos del problema. Citando algunos ejemplos, se puede usar TORA para demostrar el extraordinario comportamiento del algoritmo de ramificación y acotamiento, aplicándolo a un problema pequeño de programación entera, en el que la solución se encuentra en nueve iteraciones, pero su optimalidad se comprueba en más de 25,000 iteraciones. Sin el programa y el diseño especial de TORA, sería imposible demostrar esta situación en una forma efectiva. Otro ejemplo es el diseño único de las hojas de cálculo de programación dinámica y de AHP (proceso analítico de jerarquías), donde el ingreso interactivo por parte del usuario debe ampliar la comprensión efectiva de los detalles de esos dos tópicos. Un tercer ejemplo tiene que ver con la explicación del método congruente multiplicativo para generar números pseudoaleatorios 0-1. Con la hoja de cálculo de inmediato se puede demostrar el efecto de seleccionar la semilla y los parámetros, sobre la “calidad” del generador, en especial respecto a la longitud del ciclo de la secuencia del número aleatorio y, por tanto, advertir al alumno sobre el peligro de una implementación “causal” del método congruente multiplicativo dentro de un modelo de simulación.

Además del apoyo de los programas en el libro, todos los capítulos han sido revisados (muchos se han vuelto a escribir) para presentar el material en una forma concisa. Entre el material nuevo está una introducción a la investigación de operaciones (capítulo 1); el método símplex generalizado (Capítulo 4); la representación de todos los modelos de redes, incluyendo la ruta crítica, en forma de programas lineales (Capítulo 6); las redes PERT (Capítulo 6); la solución del problema del agente viajero (Capítulo 9), y el método de la sección dorada (Capítulo 21).

Al igual que en la sexta edición, el libro está organizado en tres partes: modelos determinísticos, modelos probabilísticos y modelos no lineales. Los apéndices A a D contienen un repaso de álgebra de matrices, una introducción a TORA (a pesar de que el diseño de TORA hace innecesario un manual), tablas estadísticas básicas y respuestas parciales de problemas seleccionados.

RECONOCIMIENTOS

Agradezco a muchos de mis colegas, y a cientos de estudiantes, sus comentarios y apoyo. En particular, deseo reconocer la ayuda extraordinaria que recibí de los profesores R. Michael Harnett (Kansas State University), Yasser Hosni (University of Central Florida), Guy L. Curry (Texas A&M University), Rafael Gutiérrez (University of Texas at El Paso), Robert Lewis (United States Army Management Engineering College), Allen C. Schuermann (Oklahoma State University) y Steven L. VanDrew (Mercer University).

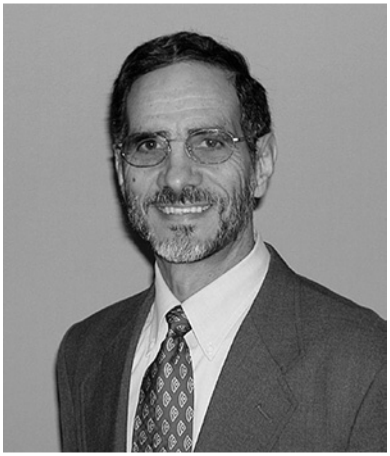
Mis colegas de ingeniería industrial en la Universidad de Arkansas, los profesores Richard Cassady, Mike Cole, Erhan Kutanoglu, Scott Mason, Heather Nachtmann y Manuel Rossetti, me han ayudado en muchas formas, y aprecio su apoyo.

Estoy especialmente agradecido a los profesores José Ventura de Pennsylvania State University, Jorge Valenzuela de Auburn University, Burak Eksioglu de la Universidad de Florida, Michael Harnett de Kansas State University y a Steven L. VanDrew, de Mercer University, por sus valiosas revisiones de la sexta edición.

Deseo expresar mi aprecio a la editora de producción, Ann Imhoff de Carlisle Communications, y a Dorothy Marrero y Lynda Castillo de Prentice Hall, por su apoyo durante la producción del libro. Sus conocimientos fueron una ayuda inmensa para mí.

HAMDY A. TAHA
hat@engr.uark.edu

Acerca del autor



Hamdy A. Taha es profesor de Ingeniería Industrial en la Universidad de Arkansas, donde enseña e investiga en el área de investigación de operaciones y simulación. Es el autor de otros tres libros sobre programación entera y simulación, y sus obras se han traducido al chino, coreano, español, japonés, ruso, turco e indonesio. Sus artículos han sido publicados en las revistas *Management Science*, *Operations Research* and *Interfaces* [Institute for Operations Research and Management Science], *Naval Research Logistics* [John Wiley & Sons], *European Journal of Operations Research* [International Federation of Operations Research Societies] y en *AIIE Transactions*.

El profesor Taha fue nombrado becario Fullbright *Senior* en la Universidad Carlos III en Madrid, España. Recibió un premio Alumni por excelencia en investigación, y el premio de enseñanza Nadine Baum, ambos de la Universidad de Arkansas, así como muchos otros premios de investigación y enseñanza por parte del Colegio de Ingeniería, Universidad de Arkansas. Domina tres idiomas, y ha desempeñado puestos en México y en el Medio Oriente.

CAPÍTULO 1

¿Qué es la investigación de operaciones?

Las primeras actividades formales de investigación de operaciones se dieron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se encomendó a un equipo de científicos ingleses la toma de decisiones acerca de la mejor utilización de materiales bélicos. Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares fueron adaptadas para mejorar la eficiencia y la productividad en el sector civil. Hoy en día, la investigación de operaciones es una herramienta dominante e indispensable para tomar decisiones.

Un elemento principal de la investigación de operaciones es el modelado matemático. Aunque la solución del modelo matemático establece una base para tomar una decisión, se deben tener en cuenta factores intangibles o no cuantificables, por ejemplo el comportamiento humano, para poder llegar a una decisión final.

1.1 MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Imagine usted que tiene un compromiso de negocios por cinco semanas entre Fayetteville (FYV) y Denver (DEN). Vuela hacia FYV el lunes y regresa el miércoles. Un boleto normal de viaje redondo cuesta $400 dólares, pero se ofrece el 20% de descuento si las fechas del boleto abarcan un fin de semana. Un boleto de viaje en cualquier dirección cuesta 75% del precio normal. ¿Cómo debe comprar los boletos para el periodo de cinco semanas?

Se puede considerar que el caso es un problema de toma de decisiones, cuya solución requiere identificar tres componentes.

1. ¿Cuáles son las **alternativas** de decisión?
2. ¿Bajo qué **restricciones** se toma la decisión?
3. ¿Cuál es el **criterio objetivo** adecuado para evaluar las alternativas?

Se consideran tres alternativas:

1. Comprar cinco boletos normales FYV-DEN-FYV.
2. Comprar uno FYV-DEN, cuatro DEN-FYV-DEN que abarquen fines de semana, y uno DEN-FYV.

3. Comprar uno FYV-DEN-FYV que abarque el lunes de la primera semana y el miércoles de la última, y cuatro DEN-FYV-DEN que cubran los viajes restantes. Cada boleto de esta alternativa abarca un fin de semana.

La restricción para estas opciones es que debe usted poder salir de FYV el lunes y regresar el miércoles de la misma semana.

Un criterio objetivo obvio para evaluar cada alternativa es el precio de los boletos. La alternativa que tenga el costo mínimo es la mejor. En forma específica,

Costo de la alternativa 1 $= 5 \times \$400 = \$2000$

Costo de la alternativa 2 $= 0.75 \times \$400 + 4 \times (0.8 \times \$400) + 0.75 \times \$400 = \$1880$

Costo de la alternativa 3 $= 5 \times (0.8 \times \$400) = \$\mathbf{1600}$

Entones, debería usted escoger la alternativa 3.

Aunque en el ejemplo anterior se ilustran los tres componentes principales de un modelo de investigación de operaciones, que son: alternativas, objetivo y restricciones, los casos difieren por los detalles de la construcción de cada componente. Para ilustrar este punto, imagine la formación de un área rectangular que tenga área máxima con un trozo de alambre de L centímetros de longitud. ¿Cuál será el ancho y la altura del rectángulo?

En contraste con el ejemplo de los boletos, la cantidad de alternativas en este ejemplo no es finito; es decir, el ancho y la altura del rectángulo pueden tener una cantidad infinita de posibilidades. Para formalizar esta observación, las alternativas en el problema se identifican definiendo el ancho y la altura como variables (algebraicas) continuas.

Sean

w = ancho del rectángulo, en centímetros

h = altura del rectángulo, en centímetros

Con base en estas definiciones, las restricciones del caso se pueden expresar verbalmente como sigue:

1. Ancho del rectángulo + altura del rectángulo = la mitad de la longitud del alambre.
2. El ancho y la altura no pueden ser negativos.

Estas restricciones se traducen al álgebra como sigue:

1. $2(w + h) = L$
2. $w \geq 0, h \geq 0$

El último componente que ahora resta es el objetivo del problema: maximizar el área del rectángulo. Si se define a z como el área del rectángulo, el modelo es

$$\text{Maximizar } z = wh$$

sujeta a

$$2(w + h) = L$$

$$w, h \geq 0$$

La solución óptima de este modelo es $w = h = \frac{L}{4}$, que equivale a formar un cuadrado.

Los dos ejemplos anteriores demuestran las variaciones en los detalles de los modelos de investigación de operaciones. En general, el primer paso crucial de cualesquiera de esos modelos es la definición de las **alternativas** o las **variables de decisión** del problema. A continuación, se usan las variables de decisión para construir la **función objetivo** y las **restricciones** del modelo. Terminados los tres pasos, el modelo de investigación de operaciones se suele organizar con el siguiente formato general:

> Maximizar o minimizar la **función objetivo**
>
> Sujeta a
>
> **restricciones**

Una solución del modelo es **factible** si satisface todas las restricciones. Es óptima si, además de ser factible, produce el mejor valor (máximo o mínimo) de la función objetivo. En el ejemplo de los boletos, el problema presenta tres alternativas factibles, y la tercera es la que produce la solución óptima. En el problema del rectángulo, una solución factible debe satisfacer la condición $w + h = \frac{L}{2}$, y w y h deben tener valores no negativos. Esto conduce a una infinidad de soluciones factibles y, a diferencia del problema de los boletos, la solución óptima se determina con un método matemático adecuado, que en este caso es el cálculo diferencial.

Aunque los modelos de investigación de operaciones deben "optimizar" determinado criterio objetivo sujeto a un conjunto de restricciones, la calidad de la solución que se obtenga depende de la exactitud del modelo para representar el sistema real. Por ejemplo, en el modelo de los boletos, si uno no puede identificar todas las alternativas dominantes para comprarlos, entonces la solución resultante sólo es óptima en relación con las alternativas que se representaron en el modelo. En forma específica, si en el modelo falta la alternativa 3, la solución "óptima" resultante diría que hay que gastar $1880 como mínimo en compra de boletos, y con ello sólo se obtiene una solución **subóptima** del problema. La conclusión es que "la" solución óptima de un modelo sólo es la mejor para *ese* problema. Si sucede que el modelo representa al sistema real en forma razonablemente buena, su solución también será óptima para el caso real.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 1.1A

1. En el ejemplo de los boletos, identifique una cuarta alternativa factible.
2. En el problema del rectángulo, identifique dos soluciones factibles, y a continuación determine la mejor (la que tenga el área mayor).
3. Determine la solución óptima del problema del rectángulo. (*Sugerencia*: use la restricción para expresar la función objetivo en términos de una variable, y a continuación use cálculo diferencial.)
4. Ana, Jaime, Juan y Pedro están en la orilla oriente de un río, y desean cruzarlo en canoa hasta la orilla opuesta. La canoa puede llevar cuando mucho dos personas en cada viaje. Ana es la más

vigorosa y puede cruzar el río en 1 minuto. Jaime, Juan y Pedro tardan 2, 5 y 10 minutos, respectivamente. Si hay dos personas en la canoa, la persona más lenta es la que determina el tiempo de cruce. El objetivo es que los cuatro estén en la orilla opuesta en el mínimo tiempo posible.

a) Identifique al menos dos planes factibles para cruzar el río. Recuerde que la canoa es el único medio de transporte, y que no puede viajar vacía.

b) Defina el criterio para evaluar las alternativas.

c) ¿Cuál es el tiempo mínimo para pasar a los cuatro hasta la otra orilla del río?

5. En un juego de béisbol, Juan es el lanzador y José el bateador. Suponga que Juan puede lanzar una bola rápida o una curva, al azar. Si José adivina que viene una curva, puede mantener un promedio de bateo de .500. Si no, cuando Juan lanza una curva y José se prepara para una bola rápida, su promedio de bateo baja a .200. Por otro lado, si José adivina bien una bola rápida, mantiene un promedio de bateo de .300; si no, su promedio de bateo sólo es .100.

a) Defina las alternativas para este caso.

b) Defina la función objetivo para el problema, y describa en qué difiere de la optimización común (maximización o minimización) de un criterio.

1.2 SOLUCIÓN DEL MODELO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

En la investigación de operaciones no se tiene una sola técnica general con la que se resuelvan todos los modelos matemáticos que surgen en la práctica. En lugar de ello, la clase y la complejidad del modelo matemático determina la naturaleza del método de solución. Por ejemplo, en la sección 1.1, la solución del problema de los boletos requiere una clasificación sencilla de las alternativas, basada en el precio de compra total, mientras que la solución del problema del rectángulo usa cálculo diferencial para determinar el área máxima.

La técnica más importante de investigación de operaciones es la **programación lineal**. Se diseña para modelos con funciones objetivo y restricciones estrictamente lineales. Hay otras técnicas, como la **programación entera**, en la que las variables toman valores enteros; la **programación dinámica**, en la que el modelo original se puede descomponer en subproblemas más pequeños; la **programación de red**, en la que el problema se puede modelar como una red, y la **programación no lineal**, en la que las funciones del modelo son no lineales. Las técnicas mencionadas no son más que una lista parcial de la gran cantidad de herramientas disponibles en la investigación de operaciones.

Una peculiaridad de la mayor parte de las técnicas de investigación de operaciones es que en general las soluciones no se obtienen en formas cerradas, es decir, parecidas a fórmulas. En lugar de ello, se determinan mediante **algoritmos**. Un algoritmo proporciona reglas fijas de cómputo que se aplican en forma repetitiva al problema, y cada repetición (llamada **iteración**) obtiene una solución cada vez más cercana a la óptima. Como los cálculos asociados con cada iteración suelen ser tediosos y voluminosos, es necesario ejecutar esos algoritmos en una computadora.

Algunos modelos matemáticos pueden ser tan complicados que es imposible resolverlos con cualesquiera de los algoritmos disponibles de optimización. En esos casos se podrá necesitar abandonar la búsqueda de la solución *óptima* para sólo buscar una solución *buena* usando **heurísticas** o reglas simples.

1.3 MODELOS DE COLAS Y SIMULACIÓN

Las colas o líneas de espera, y la simulación, tratan de estudiar las líneas de espera. No son técnicas de optimización; más bien determinan medidas de eficiencia de las líneas de espera, como pueden ser el tiempo promedio de espera en la cola, tiempo promedio para el servicio y la utilización de las instalaciones de servicio.

Los modelos de colas usan a su vez modelos de probabilidad y estocásticos para analizar las líneas de espera, y la simulación estima las medidas de eficiencia al imitar el comportamiento del sistema en la realidad. En cierto modo, se puede considerar que la simulación es casi lo mejor para observar un sistema real. La diferencia principal entre colas y simulación es que los modelos de colas sólo son matemáticos, y en consecuencia, están sujetos a hipótesis específicas que limitan el alcance de la aplicación. Por otro lado, la simulación es flexible y con ella se puede analizar prácticamente cualquier caso de colas.

El uso de la simulación no carece de inconvenientes. El proceso de desarrollar modelos de simulación es costoso, tanto en tiempo como en recursos. Además, la ejecución de los modelos de simulación suele ser lenta, aun con la computadora más rápida.

1.4 EL ARTE DEL MODELADO

Los modelos ilustrativos que se desarrollaron en la sección 1.1 son representaciones exactas de los casos reales, porque no se usan aproximaciones. Esto es raro en la investigación de operaciones, porque la mayor parte de las aplicaciones suelen implicar diversos grados de aproximación. La figura 1.1 ilustra los niveles de abstracción que caracterizan al desarrollo de un modelo en investigación de operaciones. El mundo real supuesto se abstrae del caso real, concentrándolo en las variables principales que controlan el comportamiento del sistema real. El modelo, como es una abstracción del mundo real supuesto, expresa en una forma adecuada las funciones matemáticas que representan el comportamiento del sistema supuesto.

Para ilustrar los niveles de abstracción en el modelado, veamos el caso de la Tyko Manufacturing, que produce una variedad de recipientes de plástico. Cuando se emite una orden de producción al departamento de producción, se adquieren las materias primas necesarias en los almacenes de la empresa, o se compran a proveedores externos. Una vez terminado un lote de producción, el departamento de ventas se hace cargo de distribuir el producto entre los consumidores.

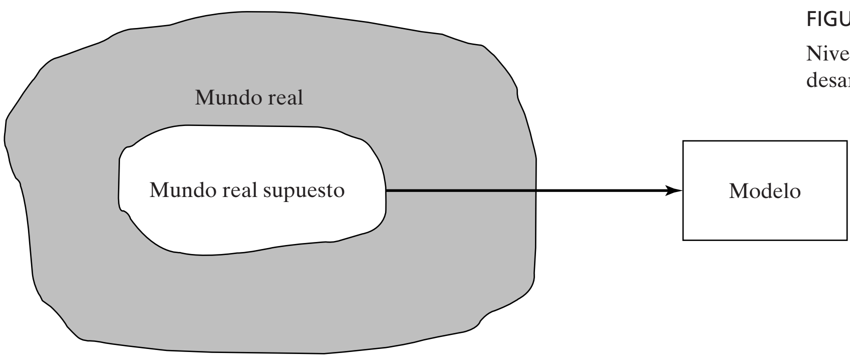


FIGURA 1.1

Niveles de abstracción en el desarrollo de un modelo

Una pregunta lógica al analizar el caso de Tyko es la determinación del tamaño de un lote de producción. ¿Cómo se puede representar este caso en un modelo?

Al considerar el sistema en general, se ve que algunas variables influyen en forma directa sobre el nivel de producción, entre las que están las de la siguiente lista (parcial), clasificada por departamentos.

1. *Departamento de producción:* Capacidad de producción expresada en función de las horas máquina y mano de obra disponibles, inventario en proceso y normas de control de calidad.
2. *Departamento de materiales:* Existencia disponible de materias primas, programas de entrega de sus proveedores y limitaciones de almacenamiento.
3. *Departamento de ventas:* Pronóstico de ventas, capacidad de las instalaciones de distribución, eficacia de la campaña publicitaria y efecto de la competencia.

Cada una de esas variables afecta el nivel de producción en Tyko. Sin embargo, es realmente difícil establecer relaciones funcionales explícitas entre ellas y el nivel de producción.

Un primer nivel de abstracción requiere la definición de las fronteras del mundo real supuesto. Pensando un poco, se puede aproximar el sistema real mediante dos variables dominantes:

1. Tasa de producción.
2. Tasa de consumo.

La determinación de la tasa de producción implica variables como la capacidad de producción, las normas de control de calidad y la disponibilidad de las materias primas. La tasa de consumo está determinada por las variables asociadas al departamento de ventas. En esencia, se logra la simplificación del mundo real al mundo supuesto "agrupando" varias variables del mundo real en una sola variable para el mundo real supuesto.

Ahora es más fácil abstraer un modelo del mundo real supuesto. A partir de las tasas de producción y de consumo se pueden establecer medidas de exceso o carencia de inventario. El modelo abstraído se puede definir de modo que equilibre los costos contrapuestos de exceso y de carencia de inventario; es decir, que minimice el costo total del inventario.

1.5 MÁS QUE SÓLO MATEMÁTICAS

Debido a la naturaleza matemática de los modelos de investigación de operaciones, hay una tendencia a pensar que un estudio de investigación de operaciones *siempre* tiene en su raíz al análisis matemático. Aunque las matemáticas son esenciales en la investigación de operaciones, no debe uno recurrir de inmediato a los modelos matemáticos, sino hasta después de haber investigado métodos más sencillos. En algunos casos se podrá encontrar una solución "de sentido común" mediante observaciones sencillas. En realidad, como el elemento humano afecta en forma invariable la mayor parte de los problemas de decisiones, podría ser clave un estudio de la psicología de las personas para resolver el problema. A continuación describiremos tres ejemplos que respaldan este argumento.

1. Al atender quejas sobre un servicio lento de elevadores en un edificio de oficinas grande, se percibió al principio que la situación era un problema de línea de espera, que po-

dría requerir el uso de análisis matemáticos de colas o de simulación. Sin embargo, después de estudiar el comportamiento de las personas que se quejaban, el psicólogo del equipo de investigación de operaciones sugirió instalar espejos de cuerpo entero en la entrada de los elevadores. Como por milagro, desaparecieron las quejas, porque se mantuvo ocupada a la gente examinándose a sí misma y a los demás mientras esperaban al elevador.

2. En un estudio del registro en las instalaciones en un gran aeropuerto inglés, un equipo de consultores de Estados Unidos y Canadá aplicaron la teoría de colas para investigar y analizar la situación. Parte de la solución recomendó usar letreros bien ubicados, si la salida de los pasajeros fuera en los próximos 20 minutos, pasaran a la cabeza de la cola y pidieran servicio de inmediato. La solución no tuvo éxito porque los pasajeros, al ser ingleses en su mayoría, estaban "condicionados a un comportamiento muy estricto en las colas" y en consecuencia se rehusaban a pasar frente a otros que esperaban en la fila.

3. En una fundidora de acero, primero se producen lingotes a partir del mineral, que se usan a continuación para producir diversas clases de barras y perfiles de acero. El gerente de la instalación notó que había una gran demora entre el momento en que se producían los lingotes y cuando eran transferidos a la siguiente fase (donde se fabrican los productos finales). En el caso ideal, la siguiente fase debería comenzar tan pronto como los lingotes salen de los hornos, para reducir los costos de recalentamiento. Al principio se percibió que el problema era de un caso de balanceo de líneas de producción, que se debía resolver reduciendo la capacidad de producción de los hornos, o aumentando la capacidad del siguiente proceso. Sin embargo, como parte de la comprensión del problema, el equipo de investigación de operaciones elaboró tablas sencillas para resumir la producción de los hornos durante los tres turnos del día, y descubrieron que, aun cuando el tercer turno comenzaba a las 11:00 P.M., la mayor parte de la producción salía entre las 2:00 y las 7:00 A.M. Investigando más a fondo se vio que los operadores del tercer turno preferían tener prolongados descansos al comenzar el turno, para después compensar, durante las horas de la madrugada, la producción perdida. El problema se resolvió "nivelando" la producción de los lingotes en el turno.

De las ilustraciones anteriores se pueden sacar tres conclusiones:

1. Antes de embarcarse en un modelado matemático complicado, el equipo de investigación de operaciones debe aplazar la posibilidad de usar ideas "agresivas" para revolver la situación. La solución del problema del elevador con la instalación de espejos tiene más base en el estudio del comportamiento humano que en el modelado matemático. También es más sencillo y menos costoso que cualquier otra recomendación que se pudiera haber obtenido con un modelo matemático. Quizá sea ésta la razón por la que los equipos de investigación de operaciones suelen incluir los conocimientos de "gente de fuera", procedente de otros campos no matemáticos (en el caso del problema del elevador, la psicología). Esto fue reconocido e implementado por el primer equipo inglés de investigación de operaciones durante la Segunda Guerra Mundial.

2. Las soluciones tienen su base en las personas, y no en la tecnología. Toda solución que no tenga en cuenta al comportamiento humano, probablemente fallará. Aun cuando la solución matemática del problema del aeropuerto británico pudiera haber sido razonable, el hecho de que el equipo de consultores no percibió las diferencias culturales entre Estados Unidos e Inglaterra (los estadounidenses y canadienses tienden a ser menos formales) produjo una recomendación ineficaz.

3. Nunca debería iniciarse un estudio de investigación de operaciones si se tiene el prejuicio de usar determinado modelo matemático, antes de poder justificar su uso. Por ejemplo,

como la programación lineal es una técnica efectiva, hay una tendencia a aplicarla como la adecuada para modelar "cualquier" situación. Ese proceder suele conducir hacia un modelo matemático muy apartado de la situación real. En consecuencia, es imperativo analizar primero los datos disponibles, con las técnicas más sencillas posibles (por ejemplo, promedios, tablas e histogramas), con objeto de determinar la fuente del problema. Una vez definido el problema, se puede tomar una decisión acerca de la herramienta más adecuada para llegar a la solución.[1] En el problema de la fundidora, todo lo que se necesitó para rectificar la situación fue elaborar tablas sencillas.

1.6 FASES DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Un estudio de investigación de operaciones se basa en la *labor de equipo*, donde los analistas de investigación de operaciones y el cliente trabajan hombro con hombro. Los analistas, con sus conocimientos de modelado, deben complementarse con la experiencia y la cooperación del cliente para quien hacen el estudio.

Como herramienta de toma de decisiones, la investigación de operaciones es una ciencia y un arte. Es una ciencia por las técnicas matemáticas que presenta, y es un arte porque el éxito de todas las fases que anteceden y siguen a la resolución del modelo matemático depende mucho de la creatividad y la experiencia del equipo de investigación de operaciones. Willemain (1994) aconseja que "la práctica efectiva [de la investigación de operaciones] requiere algo más que la competencia analítica. También requiere, entre otros atributos, el juicio (por ejemplo, cuándo y cómo usar determinada técnica) y la destreza técnica en comunicaciones y en supervivencia organizacional".

Es difícil recetar cursos específicos de acción (parecidos a los que establece la teoría precisa de los modelos matemáticos) para esos factores intangibles. Sólo se pueden ofrecer lineamientos generales para implementar la investigación de operaciones en la práctica.

Las fases principales de la implementación de la investigación de operaciones en la práctica comprenden:

1. La definición del problema.
2. La construcción del modelo.
3. La solución del modelo.
4. La validación del modelo.
5. La implementación de la solución.

De las cinco fases, sólo la número tres de la *solución del modelo* es la que está mejor definida y es la más fácil de implementar en un estudio de investigación de operaciones, porque maneja principalmente modelos matemáticos precisos. La implementación de las demás fases es más un arte que una teoría.

---

[1]Decidir acerca de determinado modelo matemático antes de usarlo es como "poner la carroza frente al caballo", y me recuerda la historia de un viajero frecuente de aerolínea, paranoico aterrado por la posibilidad de una bomba terrorista a bordo. Calculó la probabilidad de ocurrencia de ese evento que, aunque fue muy pequeña, no lo fue lo suficiente como para calmar su ansiedad. En adelante siempre llevaba una bomba al avión, dentro de su portafolio, porque de acuerdo con sus cálculos, ¡la posibilidad de tener dos bombas a bordo era prácticamente cero!

La **definición del problema** implica definir el alcance del problema que se investiga. Es una función que se debe hacer entre todo el equipo de investigación de operaciones. Su resultado final será identificar tres elementos principales del problema de decisión, que son: 1) la descripción de las alternativas de decisión; 2) la determinación del objetivo del estudio, y 3) la especificación de las limitaciones bajo las cuales funciona el sistema modelado.

La **construcción del modelo** implica traducir la definición del problema a relaciones matemáticas. Si el modelo que resulte se ajusta a uno de los modelos matemáticos normales, como puede ser la programación lineal, se puede llegar a una solución empleando los algoritmos disponibles. En forma alternativa, si las relaciones matemáticas son demasiado complejas como para permitir el cálculo de una solución analítica, puede ser que el equipo de investigación de operaciones opte por simplificar el modelo y usar un método heurístico, o que el equipo pueda recurrir al uso de una simulación, si es aproximada. En algunos casos se podrá necesitar una combinación de modelos matemáticos, de simulación y heurísticos para resolver el problema de decisiones.

La **solución del modelo** es, con mucho, la fase más sencilla de todas las de la investigación de operaciones, porque supone el uso de algoritmos bien definidos de optimización. Un aspecto importante de la fase de solución del modelo es el *análisis de sensibilidad*. Tiene que ver con la obtención de información adicional sobre el comportamiento de la solución óptima cuando el modelo sufre ciertos cambios de parámetros. Se necesita en especial el análisis de sensibilidad cuando no se pueden estimar con exactitud los parámetros del modelo. En esos casos es importante estudiar el comportamiento de la solución óptima en las proximidades de los parámetros estimados.

La **validación del modelo** comprueba si el modelo propuesto hace lo que se quiere que haga, esto es, ¿predice el modelo en forma adecuada el comportamiento del sistema que se estudia? Al principio, el equipo de investigación de operaciones se debe convencer que el resultado del modelo no incluya "sorpresas". En otras palabras, ¿tiene sentido la solución? ¿Se pueden aceptar intuitivamente los resultados? Desde el lado formal, un método frecuente para comprobar la validez de un modelo es comparar su resultado con datos históricos. El modelo es válido si, bajo condiciones de datos semejantes, reproduce el funcionamiento en el pasado. Sin embargo, en general no hay seguridad de que el funcionamiento en el futuro continúe reproduciendo los datos del pasado. También, como el modelo se suele basar en un examen cuidadoso de los datos históricos, la comparación propuesta debería ser favorable. Si el modelo propuesto representa un sistema nuevo, no existente, no habrá datos históricos para las comparaciones. En esos casos se podrá recurrir a una simulación, como herramienta independiente para verificar los resultados del modelo matemático.

La **implementación** de la solución de un modelo validado implica la traducción de los resultados a instrucciones de operación, emitidas en forma comprensible para las personas que administrarán al sistema recomendado. La carga de esta tarea la lleva principalmente el equipo de investigación de operaciones.

1.7 ACERCA DE ESTE LIBRO

Morris (1967) dijo que "la enseñanza de modelos no equivale a la enseñanza del modelado". He tomado nota de esta importante afirmación al preparar la séptima edición. Se ha hecho un esfuerzo consciente para presentar el arte del modelado en investigación de operaciones. Los

modelos realistas que se presentan en el libro, los numerosos problemas (en palabras) de aplicación y los casos detallados que se presentan al final de los capítulos permiten tener una perspectiva del análisis de casos en la práctica. Debido a la importancia de los cálculos en la investigación de operaciones, el libro contiene muchas herramientas para llevar a cabo esta tarea, que van desde tutoriales hasta paquetes de programas comerciales y hojas de cálculo de Excel.

El autor cree que un primer curso de investigación de operaciones debe proporcionar al alumno una buena base de las matemáticas de esta disciplina, así como una idea de las aplicaciones y cálculos en el campo. De este modo se proporciona a los usuarios de investigación de operaciones la clase de confianza que faltaría, normalmente, si el adiestramiento principal se concentrara sólo en los aspectos filosóficos y artísticos de la investigación de operaciones. Una vez establecido un conocimiento fundamental de las bases matemáticas, el lector podrá aumentar sus posibilidades en el lado artístico de modelado, revisando los casos que se ven en diversas revistas y publicaciones. El autor recomienda en particular *Interfaces* (publicada por INFORMS) como una rica fuente de aplicaciones interesantes de la investigación de operaciones.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Altier, W. J., *The Thinking Manager's Toolbox: Effective Processes for Problem Solving and Decision Making*, Oxford University Press, Nueva York, 1999.

Checkland, P., *Systems Thinking, System Practice*, Wiley, Nueva York, 1999.

Evans, J., *Creative Thinking in the Decision and Management Sciences*, South-Western Publishing, Cincinnati, Ohio, 1991.

Gass, S., "Model World: Danger, Beware the User as a Modeler", *Interfaces*, vol. 20, núm. 3, págs. 60-64, 1990.

Morris, W., "On the Art of Modeling", *Management Science*, vol. 13, págs. B707-B717, 1967.

Paulos, J. A., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences*, Hill and Wang, Nueva York, 1988.

Taha, H., "Guide to Optimization Models", capítulo 11.3 en *Maynard's Industrial Engineering Handbook*, 5a. ed., Kjel Zandon, editor, McGraw-Hill, Nueva York, 2001, págs. 11.45-11.65.

Willemain, T. R., "Insights on Modeling from a Dozen Experts", *Operations Research*, vol. 42, núm. 2; págs. 213-222, 1994.

CAPÍTULO 2

Introducción a la programación lineal

La programación lineal se aplica a modelos de optimización en los que las funciones objetivo y restricción son estrictamente lineales. La técnica se aplica en una amplia variedad de casos, en los campos de agricultura, industria, transporte, economía, salud, ciencias sociales y de la conducta, y militar. También produce algoritmos eficientes de cómputo para problemas con miles de restricciones y variables. En realidad, debido a su tremenda eficiencia de cálculo, la programación lineal forma la columna vertebral de los algoritmos de solución para otros modelos de investigación de operaciones, como las programaciones entera, estocástica y no lineal.

Este capítulo comienza con el caso de un modelo de dos variables, y presenta su solución gráfica. Esta solución gráfica permite tener una perspectiva del desarrollo del *método símplex*, técnica algebraica general (véase el capítulo 3). También presenta ideas concretas para el desarrollo y la interpretación de análisis de sensibilidad en programación lineal. El capítulo termina con la formulación y la interpretación de la solución de varias aplicaciones realistas.

2.1 MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

Esta sección explicará la solución gráfica de una programación lineal con dos variables. Aunque en la práctica casi no existen problemas con dos variables, la presentación aportará ideas concretas para el desarrollo del algoritmo de solución general que se presentará en el capítulo 3.

Ejemplo 2.1-1 (La compañía Reddy Mikks)

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores, $M1$ y $M2$. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Ton de materia prima de		
	Pinturas para exteriores	*Pinturas para interiores*	*Disponibilidad diaria máxima (ton)*
Materia prima, $M1$	6	4	24
Materia prima, $M2$	1	2	6
Utilidad por ton (miles de $)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que 1 tonelada más que la de pintura para exteriores. También, que la demanda máxima diaria de pintura para interiores es de 2 toneladas.

Reddy Mikks desea determinar la mezcla óptima (la mejor) de productos para exteriores y para interiores que maximice la utilidad diaria total.

El modelo de programación lineal, como en cualquier modelo de investigación de operaciones, tiene tres componentes básicos.

1. Las **variables** de decisión que se trata de determinar.
2. El **objetivo** (la meta) que se trata de optimizar.
3. Las **restricciones** que se deben satisfacer.

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones se hace en forma más directa.

Para el problema de Reddy Mikks, se necesita determinar las cantidades a producir de pinturas para exteriores e interiores. Así, las variables del modelo se definen como sigue:

x_1 = Toneladas producidas diariamente, de pintura para exteriores
x_2 = Toneladas producidas diariamente, de pintura para interiores

Para formar la función objetivo, la empresa desea aumentar sus utilidades todo lo posible. Si z representa la utilidad diaria total (en miles de dólares), el objetivo de la empresa se expresa así:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

A continuación se definen las restricciones que limitan el uso de las materias primas y la demanda. Las restricciones en materias primas se expresan verbalmente como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Uso de una materia prima}\\ \text{para ambas pinturas}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Disponibilidad máxima}\\ \text{de materia prima}\end{pmatrix}$$

Según los datos del problema,

$$\text{Uso de la materia prima } M1\text{, por día} = 6x_1 + 4x_2 \text{ toneladas}$$

$$\text{Uso de la materia prima } M2\text{, por día} = 1x_1 + 2x_2 \text{ toneladas}$$

Ya que la disponibilidad de las materias primas $M1$ y $M2$ se limita a 24 y 6 toneladas, respectivamente, las restricciones correspondientes se expresan como sigue:

$$6x_1 + 4x_2 \le 24 \quad \text{(Materia prima } M1\text{)}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \text{(Materia prima } M2\text{)}$$

La primera restricción de la demanda indica que la diferencia entre la producción diaria de pinturas para interiores y exteriores, $x_2 - x_1$, no debe ser mayor que 1 tonelada, y eso se traduce en $x_2 - x_1 \le 1$. La segunda restricción de la demanda estipula que la demanda máxima diaria de pintura para interiores se limita a 2 toneladas, y eso se traduce como $x_2 \le 2$.

Una restricción implícita (o "que se sobreentiende") es que las variables x_1 y x_2 no pueden asumir valores negativos. Las **restricciones de no negatividad**, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, expresan ese requisito.

El modelo de Reddy Mikks completo es

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Cualquier valor de x_1 y x_2 que satisfaga todas las restricciones del modelo es una **solución factible**. Por ejemplo, la solución $x_1 = 3$ toneladas diarias y $x_2 = 1$ tonelada diaria es factible, porque no viola alguna de las restricciones, incluyendo las de no negatividad. Para comprobar este resultado se sustituye $(x_1 = 3, x_2 = 1)$ en el lado izquierdo de cada restricción. Por ejemplo, en la primera restricción, $6x_1 + 4x_2 = 6 \times 3 + 4 \times 1 = 22$, que es menor que 24 en el lado derecho. El valor de la función objetivo correspondiente a la solución $(x_1 = 3, x_2 = 1)$ es $z = 5 \times 3 + 4 \times 1 = 19$ (miles de dólares).

Desde el punto de vista de todo el modelo, nos interesa determinar la **solución óptima factible** que produzca la utilidad total máxima y al mismo tiempo satisfaga todas las restricciones. No se acepta enumerar las soluciones factibles, porque el modelo tiene una cantidad infinita de ellas. En su lugar, se necesita un procedimiento sistemático que ubique con eficiencia la solución óptima. El método gráfico de la sección 2.3, y su generalización algebraica en el capítulo 3, resuelven este punto.

En el ejemplo anterior, las funciones objetivo y restricciones son lineales, todas. La **linealidad** implica que la programación lineal debe satisfacer dos propiedades: **proporcionalidad** y **aditividad**.

1. La *proporcionalidad* requiere que la contribución de cada variable de decisión en la función objetivo, y sus requerimientos en las restricciones, sea *directamente proporcional* al valor de la variable. Por ejemplo, en el modelo de Reddy Mikks, las cantidades $5x_1$ y $4x_2$ expresan las utilidades por producir x_1 y x_2 toneladas de pintura para exteriores y para interiores, respectivamente, y las utilidades unitarias por tonelada son 5 y 4, que definen las constantes de proporcionalidad. Si, por otra parte, Reddy Mikks ofrece alguna clase de descuentos por cantidad cuando las ventas son mayores que ciertas cantidades, la utilidad ya no será proporcional a las cantidades producidas x_1 y x_2.

2. La *aditividad* estipula que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones, sean la suma directa de las contribuciones o requerimientos individuales de cada variable. En el modelo de Reddy Mikks, la utilidad total es igual a la suma de dos componentes individuales de utilidad. Sin embargo, si los dos productos *compiten* por la misma parte de mercado en forma tal que un aumento de ventas de uno afecte negativamente al otro, ya no se satisface la propiedad de aditividad.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.1A

1. Para el modelo de Reddy Mikks, defina cada una de las siguientes restricciones y exprésela con una constante del lado derecho:

a) La demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores en *al menos* 1 tonelada.

b) El uso diario de la materia prima *M*2 es 6 toneladas *cuando mucho*, y 3 toneladas *cuando menos*.

c) La demanda de pintura para interiores no puede ser menor que la demanda de pintura para exteriores.

d) La cantidad mínima que se debe producir de pinturas para interiores y para exteriores es de 3 toneladas.

e) La proporción de pintura para interiores entre la producción total de pinturas para interiores y para exteriores no debe ser mayor que 0.5.

2. Determine la mejor solución *factible* entre las siguientes soluciones (factibles y no factibles) del modelo de Reddy Mikks:

a) $x_1 = 1, x_2 = 4$

b) $x_1 = 2, x_2 = 2$

c) $x_1 = 3, x_2 = 1.5$

d) $x_1 = 2, x_2 = 1$

e) $x_1 = 2, x_2 = -1$

3. Para la solución factible $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, del modelo de Reddy Mikks, determine

a) La cantidad no usada de la materia prima *M*1.

b) La cantidad no usada de la materia prima *M*2.

4. Suponga que Reddy Mikks vende su pintura para exteriores a un mayorista, con un descuento por volumen. La utilidad por tonelada es \$5000 si el mayorista no compra más de 2 toneladas diarias, y de \$4500 en los demás casos. ¿Se puede traducir esta situación a un modelo de programación lineal?

2.2 SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

El procedimiento de solución gráfica comprende dos pasos:

1. Determinación del espacio de soluciones que define *todas* las soluciones factibles del modelo.
2. Determinación de la solución óptima, entre todos los puntos factibles del espacio de soluciones.

Usaremos dos ejemplos en el procedimiento, para mostrar cómo se manejan las funciones objetivo de maximización y de minimización.

2.2.1 Solución de un modelo de maximización

Ejemplo 2.2-1

En este ejemplo se resolverá el modelo de Reddy Mikks, de la sección 2.1.

Paso 1. *Determinación del espacio de soluciones factibles:*
Primero, se tendrán en cuenta las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. En la figura 2.1, el eje horizontal x_1 y el eje vertical x_2 representan las variables pintura para exteriores y pintura para interiores, respectivamente. En consecuencia, las restricciones de no negatividad limitan el área del espacio de soluciones al primer cuadrante: arriba del eje x_1 y a la derecha del eje x_2.

Para tener en cuenta las otras cuatro restricciones, primero se sustituye cada desigualdad con una ecuación, y a continuación se grafica la recta resultante, ubicando dos puntos diferentes de ella. Por ejemplo, después de sustituir $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ con la recta $6x_1 + 4x_2 = 24$, se pueden determinar dos puntos distintos, primero igualando $x_1 = 0$ para obtener $x_2 = \frac{24}{4} = 6$ y después igualando $x_2 = 0$ para obtener $x_1 = \frac{24}{6} = 4$. De este modo, la recta que pasa por los dos puntos (0, 6) y (4, 0) es la que se identifica con (1) en la figura 2.1.

A continuación consideraremos el efecto de la desigualdad. Todo lo que hace la desigualdad es dividir al plano (x_1, x_2) en dos semiespacios que en este caso son semiplanos, uno a cada lado de la línea graficada. Sólo una de esas dos mitades satisface la desigualdad. Para determinar cuál es el lado correcto, se elige cualquier *punto de referencia* en el primer cuadrante. Si satisface la desigualdad, el lado en el que está es el semiplano factible. En caso contrario, quiere decir que es el otro lado. Desde el punto

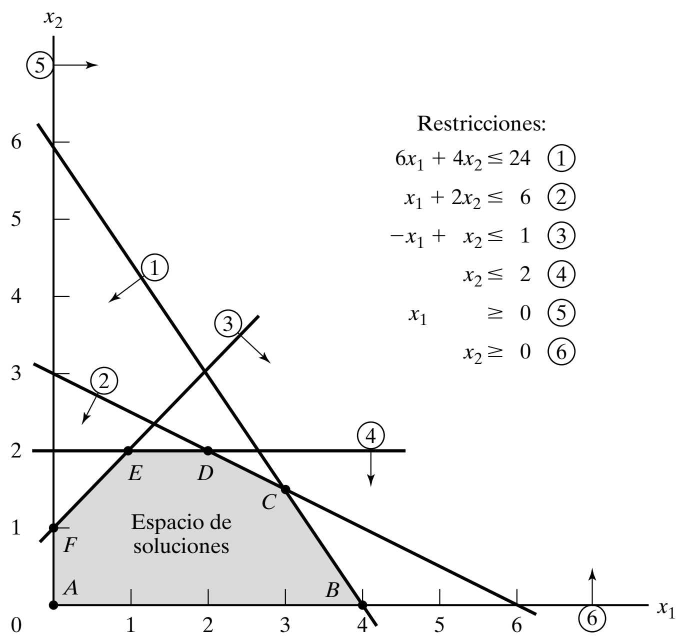


FIGURA 2.1
Espacio factible del modelo de Reddy Mikks

de vista de los cálculos, es cómodo seleccionar a (0, 0) como el punto de referencia, a menos que la recta pase por el origen; si así fuera, se debería elegir otro punto.

El uso del punto de referencia (0, 0) se ilustra con la restricción $6x_1 + 4x_2 \leq 24$. Como $6 \times 0 + 4 \times 0 = 0$ es menor que 24, el semiplano que representa la desigualdad incluye al origen (lo que se indica con la flecha en la figura 2.1). Para demostrar el uso de otros puntos de referencia, investigaremos (6, 0). En este caso $6 \times 6 + 4 \times 0 = 36$, que es mayor que el lado derecho de la primera restricción, y eso indica que el lado en el que está (6, 0) no es factible para la desigualdad. Este resultado es consistente con el que se obtuvo usando (0, 0) como punto de referencia.

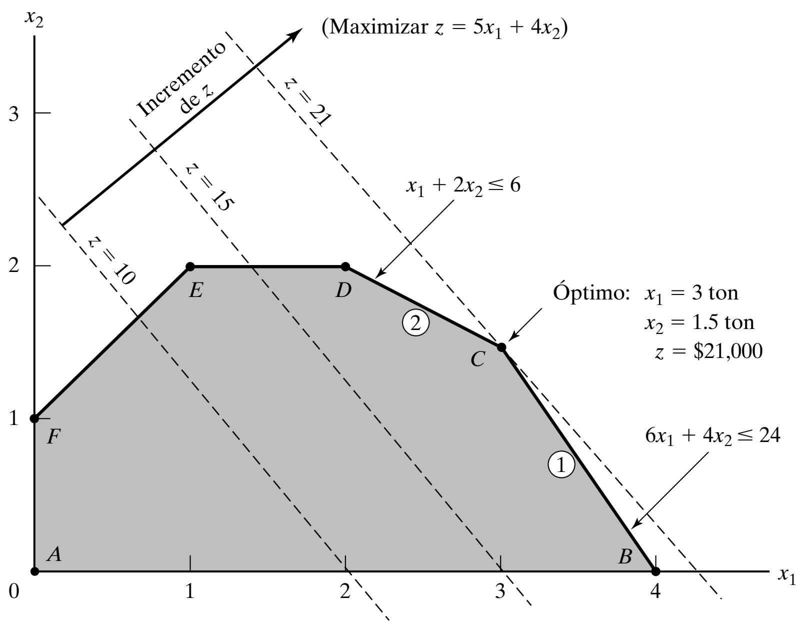
Con la aplicación del procedimiento del punto de referencia a todas las restricciones del modelo se obtiene el espacio factible que se indica en la figura 2.1.

Paso 2. *Determinación de la solución óptima:*
El espacio factible de la figura 2.1 está delimitado por los segmentos de recta que unen a los vértices *A, B, C, D, E* y *F*. Todo punto dentro o en la frontera del espacio *ABCDEF* es factible, porque satisface todas las restricciones. Ya que el espacio factible *ABCDEF* está formado por una cantidad *infinita* de puntos, es obvio que se necesita un procedimiento sistemático para identificar la solución óptima.

Para identificar la solución óptima se requiere identificar la dirección en la que aumenta la función utilidad $z = 5x_1 + 4x_2$ (recuérdese que se está *maximizando* a z). Para hacerlo se asignan valores *arbitrarios* crecientes a z. Por ejemplo, si $z = 10$ y $z = 15$ equivaldría a graficar las dos rectas $5x_1 + 4x_2 = 10$ y $5x_1 + 4x_2 = 15$. En consecuencia, la dirección de aumento en z es la que se ve en la figura 2.2. La solución óptima se encuentra en *C*, que es el punto, en el espacio de soluciones, más allá del cual cualquier aumento en z saca a uno de las fronteras de *ABCDEF*.

FIGURA 2.2

Solución óptima del modelo de Reddy Mikks



Los valores de x_1 y x_2 correspondientes al punto óptimo C se calculan resolviendo las ecuaciones asociadas a las rectas (1) y (2), esto es, resolviendo

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1.5$ y en ese caso $z = 5 \times 3 + 4 \times 1.5 = 21$. Eso equivale a una mezcla de productos de 3 toneladas de pintura para exteriores y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria correspondiente es $21,000.

No es por accidente que la solución óptima se encuentre en un **punto de esquina** del espacio de soluciones, donde se cruzan dos líneas. En realidad, si se cambia la pendiente de la función utilidad z (cambiando sus coeficientes), se verá que la solución óptima siempre se encuentra en esos puntos de *esquina*. Esta observación es clave para desarrollar el *algoritmo símplex* general que se presenta en el capítulo 3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2A

1. Determine el espacio factible para cada una de las siguientes restricciones independientes, cuando $x_1, x_2 \leq 0$.

a) $-3x_1 + x_2 \leq 6$

b) $x_1 - 2x_2 \geq 5$

c) $2x_1 - 3x_2 \leq 12$

d) $x_1 - x_2 \leq 0$

e) $-x_1 + x_2 \geq 0$

2. Identifique la dirección de aumento de z, en cada uno de los casos siguientes:

a) Maximizar $z = x_1 - x_2$

b) Maximizar $z = -5x_1 - 6x_2$

c) Maximizar $z = -x_1 + 2x_2$

d) Maximizar $z = -3x_1 + x_2$

3. Determine el espacio de soluciones y la solución óptima del modelo de Reddy Mikks para cada uno de los siguientes cambios independientes:

a) La demanda diaria máxima de pintura para exteriores es de 2.5 toneladas.

b) La demanda diaria de pintura para interiores es por lo menos de 2 toneladas.

c) La demanda diaria de pintura para interiores es exactamente 1 tonelada más que la de pintura para exteriores.

d) La disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ es cuando menos 24 toneladas.

e) La disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ es cuando menos 24 toneladas, y la demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores en al menos 1 tonelada.

4. Para el modelo original de Reddy Mikks, identifique el o los puntos de *esquina* que defina(n) la solución óptima para cada una de las siguientes funciones objetivo:

a) $z = 3x_1 + x_2$

b) $z = x_1 + 3x_2$

c) $z = 6x_1 + 4x_2$

¿En qué difiere la solución de c), de las de a) y b)?

5. Juan acaba de entrar a la universidad, y se da cuenta que si sólo estudia y no juega, su personalidad será gris. Desea repartir su tiempo disponible, aproximadamente de 10 horas por día, entre juego y estudio. Estima que el juego es doblemente divertido que el estudio. También desea estudiar cuando menos un tiempo igual al que pasa jugando. Sin embargo, se da cuenta que si debe hacer todas sus tareas escolares, no puede jugar más de 4 horas diarias. ¿Cómo debe repartir Juan su tiempo, para maximizar su placer de estudiar y jugar?

2.2.2 Solución de un modelo de minimización

Ejemplo 2.2-2 (Problema de la dieta)

En Granjas Modelo se usa diariamente un mínimo de 800 libras (lb) de un alimento especial, que es una mezcla de maíz y soya, con las composiciones siguientes:

	lb por lb de alimento		
Alimento	*Proteínas*	*Fibras*	*Costo ($/lb)*
Maíz	0.09	0.02	0.30
Soya	0.60	0.06	0.90

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30% de proteínas y un máximo de 5% de fibras. Granjas Modelo desea determinar las proporciones de alimento que produzcan un costo diario mínimo.

Como la mezcla de alimentos consiste en maíz y soya, las variables de decisión del modelo se definen como sigue:

$$x_1 = \text{lb de maíz en la mezcla diaria}$$

$$x_2 = \text{lb de soya en la mezcla diaria}$$

La función objetivo trata de minimizar el costo (en dólares) diario total de la mezcla de alimentos, y en consecuencia se expresa como sigue:

$$\text{minimizar } z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

Las restricciones del modelo reflejan la cantidad diaria necesaria y los requerimientos dietéticos. Como Granjas Modelo necesita un mínimo de 800 lb diarias de alimento, la restricción correspondiente se puede expresar como sigue:

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

En cuanto a la restricción dietética de necesidades de proteína, la cantidad de proteína que contienen x_1 lb de maíz y x_2 lb de soya es $(0.09x_1 + 0.6x_2)$ lb. Esta cantidad debe ser cuando menos igual al 30% de la mezcla total de alimentos, $(x_1 + x_2)$ lb; esto es

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$$

De manera similar, la restricción de la fibra se define como

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$$

Las restricciones se simplifican agrupando todos los términos en x_1 y x_2 y pasándolos al lado izquierdo de cada desigualdad, para que sólo quede una constante en el lado derecho. Así, el modelo completo viene a ser

$$\text{minimizar } z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

sujeta a

$$x_1 + \quad x_2 \geq 800$$
$$0.21x_1 - 0.30x_2 \leq 0$$
$$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 2.3 muestra la solución gráfica del modelo. A diferencia del modelo de Reddy Mikks (Ejemplo 2.2-1), la segunda y la tercera restricciones pasan por el origen. Para graficar las rectas correspondientes sólo se necesita un punto adicional, que se puede obtener asignando un valor a una de las variables y despejando la otra. Por ejemplo, en la segunda restricción $x_1 = 200$ produce $0.21 \times 200 - 0.3x_2 = 0$, es decir, $x_2 = 140$. Eso quiere decir que la recta $0.21x_1 - 0.3x_2 = 0$ pasa por (0, 0) y (200, 140). También obsérvese que no se puede usar (0, 0) como punto de referencia en las restricciones 2 y 3, porque ambas rectas pasan por el origen. En lugar de ellos se puede usar cualquier otro punto, por ejemplo (100, 0) o (0, 100) para ese propósito.

Ya que en este modelo se busca minimizar la función objetivo, necesitamos reducir todo lo posible el valor de z, en la dirección que muestra la figura 2.3. La solución óptima es la intersección de las dos rectas, $x_1 + x_2 = 800$ y $0.21x_1 - 0.3x_2 = 0$; así se obtienen $x_1 = 470.6$ lb y $x_2 = 329.4$ lb. El costo mínimo correspondiente, de la mezcla de alimentos, es $z = 0.3 \times 470.6 + 0.9 \times 329.4 = \$437.64$ diarios.

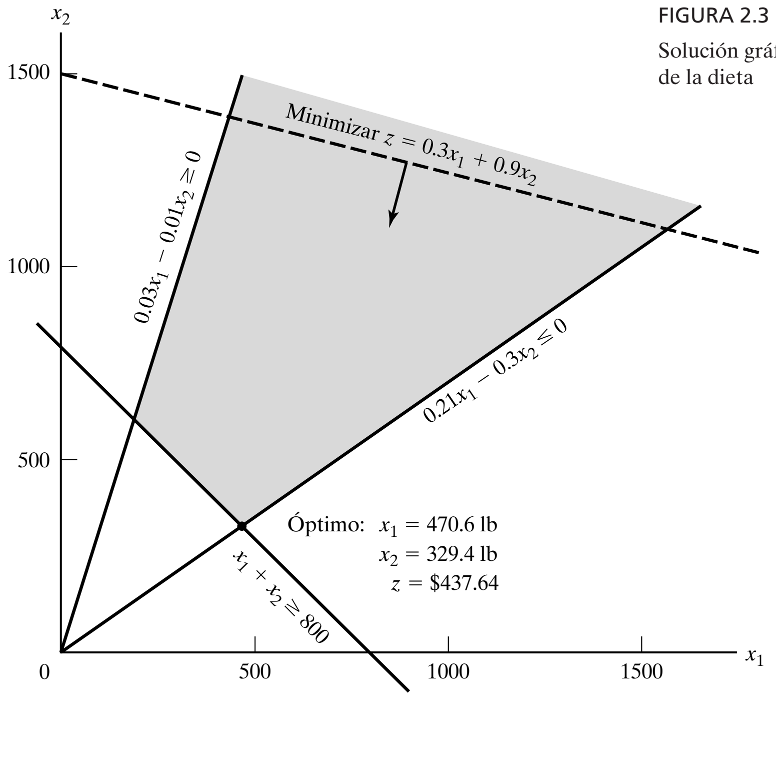


FIGURA 2.3

Solución gráfica del modelo de la dieta

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2B

1. Identifique la dirección de decrecimiento de z en cada uno de los siguientes casos:
   a) Minimizar $z = 4x_1 - 2x_2$
   b) Minimizar $z = -3x_1 + x_2$
   c) Minimizar $z = -x_1 - 2x_2$
2. Para el modelo de la dieta, suponga que la disponibilidad diaria del maíz se limita a 450 lb. Identifique el nuevo espacio de soluciones y determine la nueva solución óptima.
3. Para el modelo de la dieta, ¿qué clase de solución óptima produciría el modelo si la mezcla de alimentos no debe exceder de 800 lb por día? ¿Tiene sentido esa solución?
4. Juan debe trabajar cuando menos 20 horas a la semana para complementar sus ingresos, y al mismo tiempo asistir a la escuela. Tiene la oportunidad de trabajar en dos tiendas al menudeo: en la tienda 1 puede trabajar entre 5 y 12 horas por semana, y en la tianda 2 le permiten trabajar entre 6 y 10 horas. Ambas tiendas le pagan el mismo sueldo por hora. En consecuencia, Juan quiere basar su decisión acerca de cuántas horas trabajar en cada tienda en un criterio distinto: el factor de tensión en el trabajo. Con base en las entrevistas con otros empleados, Juan estima que en una escala de 1 a 10, los factores de tensión son 8 y 6 en las tiendas 1 y 2, respectivamente. Como la tensión aumenta cada hora, supone que la tensión total al final de la semana es proporcional a la cantidad de horas que trabaja en las tiendas. ¿Cuántas horas debería trabajar Juan en cada tienda?
5. OilCo construye una refinería para elaborar cuatro productos: diesel, gasolina, lubricantes y combustible para aviones. Las demandas (en barriles/día) de esos productos son 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Irán y Dubai tienen contrato para enviar crudo a OilCo. Debido a las cuotas de producción que especifica la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo) la nueva refinería puede recibir al menos el 40% de su crudo de Irán, y el resto de Dubai. OilCo pronostica que estas cuotas de demanda y de crudo permanecerán estables durante los 10 años siguientes.

   Las distintas especificaciones de los dos crudos determinan dos proporciones distintas de productos: un barril de crudo de Irán rinde 0.2 barril de diesel, 0.25 barril de gasolina, 0.1 barril de lubricante y 0.15 barril de combustible para avión. Los rendimientos correspondientes del crudo de Dubai son: 0.1, 0.6, 0.15 y 0.1, respectivamente.

   OilCo necesita determinar la capacidad mínima de la refinería, en barriles de crudo por día.
6. Ahorros S.A. desea invertir una suma que genere un rendimiento anual mínimo de $10,000. Dispone de dos grupos accionarios: acciones selectas y alta tecnología, con un rendimiento anual promedio de 10 y 25%, respectivamente. Aunque las acciones de alta tecnología dan más rendimiento, son más arriesgadas, y Ahorros desea limitar la cantidad invertida en ellas a un máximo de 60% del total.

   ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir Ahorros en cada grupo de acciones para alcanzar la meta de inversión?

2.2.3 Solución gráfica con TORA

El diseño del programa TORA le permite usarlo en modo tutorial o en modo automático (o si lo desea, una combinación de los dos). Se maneja con menús, y en consecuencia no requiere un manual del usuario. Sin embargo, para su comodidad, se presenta una introducción a TORA en el apéndice C.

La solución gráfica de problemas de programación lineal con TORA requiere los pasos siguientes:

1. Seleccione `Linear Programming` (programación lineal) del menú `MAIN menu` (menú principal).

2. Especifique el modo de captura (archivo existente o problema nuevo) y el formato de captura.
3. En problemas nuevos, use la tabla de captura para ingresar los datos.
4. Oprima `Solve Menu` (menú resolver).
5. Seleccione `Solve` ⇒ `Graphical` (resolver ⇒ gráfico) del menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar).
6. Especifique el formato del resultado y a continuación oprima `GoTo Output Screen` (ir a la pantalla de resultados).
7. El modelo de programación lineal se grafica y se resuelve.

La figura 2.4 muestra la solución gráfica del modelo de Reddy Mikks (archivo ch2Tora-ReddyMikks.txt). En la ventana izquierda se ve la programación lineal algebraica. La ventana derecha comienza con un primer cuadrante, con ejes x_1 y x_2 ya con escala adecuada, exactamente como haría usted si estuviera graficando en un papel. Puede graficar la programación lineal de dos maneras: si hace clic en el renglón “Click here to graph LP in one stroke” (clic aquí para presentar la gráfica de una vez) de la ventana izquierda, toda la programación lineal se

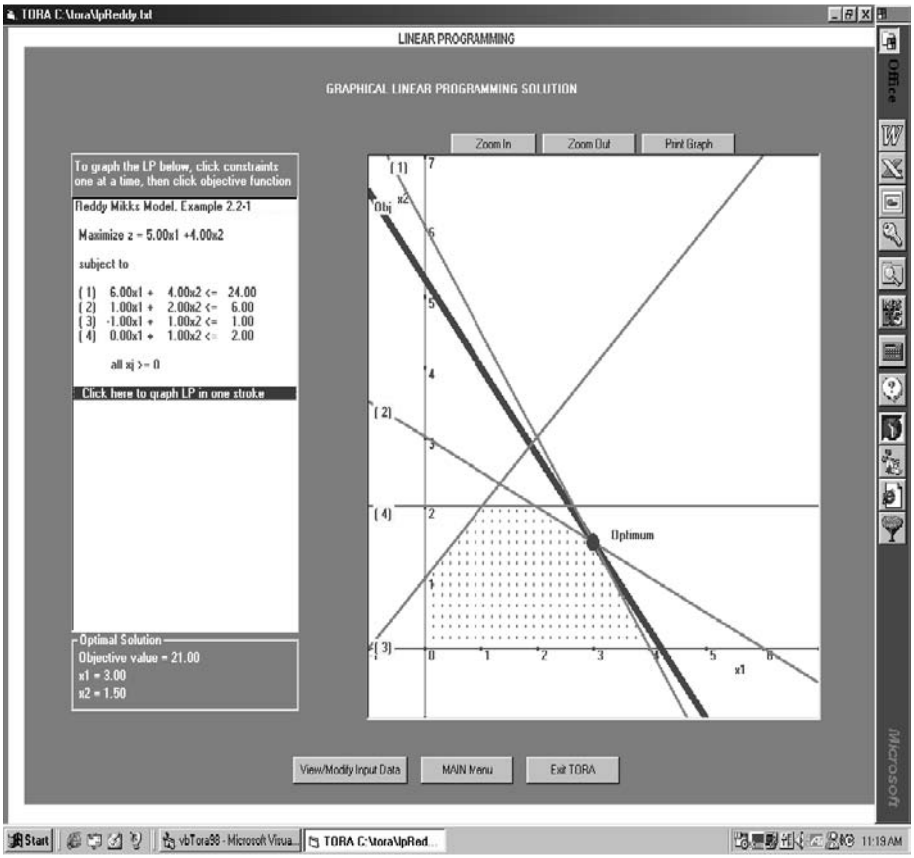


FIGURA 2.4

Resultado gráfico del modelo de Reddy Mikks obtenido con TORA

graficará de una vez. O bien, haciendo clic en las restricciones, una por una (en cualquier orden) y a continuación otro clic en la función objetivo para producir una presentación animada de la determinación óptima.

Para tener más flexibilidad al experimentar con el módulo gráfico de TORA, se puede reiniciar toda la gráfica haciendo clic en el renglón de restricción de no negatividad `all xj>= 0` (todas las xj > 0) en la ventana izquierda. También puede modificar la programación lineal del momento haciendo clic en `View/Modify` (ver/modificar), resolviendo a continuación el nuevo modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2C

1. *Tutorial de TORA.* Ingrese la siguiente programación lineal en TORA y seleccione el modo de solución gráfica para presentar la pantalla correspondiente.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 8\,x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 - \ \ x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A continuación, en una hoja de papel, trace los ejes x_1 y x_2 con escalas adecuadas [también podrá hacer clic en `Print Graph` (imprimir gráfica) en la parte superior de la ventana derecha para tener una hoja ya a escala y lista para usarse]. A continuación grafique manualmente una restricción y a continuación haga clic en ella, en la ventana izquierda de la pantalla, para comprobar su respuesta. Repita lo anterior para cada restricción, y a continuación termine el procedimiento con una gráfica de la función objetivo. El proceso que se sugiere tiene por objeto ejercitar y reforzar su comprensión de la solución gráfica de programación lineal, en cuanto TORA le proporciona retroalimentación inmediata.

2. Regrese al modelo de Reddy Mikks (archivo ch2ToraReddyMikks.txt). Use TORA para demostrar que la solución óptima de programación lineal siempre está relacionada con un punto de esquina del espacio de soluciones. En forma específica, use la opción `View/Modify Input Data` (ver/modificar datos) con las opciones siguientes, para demostrar que los cambios en la pendiente de la función objetivo podrían ubicar la solución óptima en un punto de esquina distinto. La conclusión de este ejercicio es que los puntos de esquina del espacio de solución son todo lo que necesita para determinar la solución óptima del problema de programación lineal.

a) $z = 5x_1 + x_2$
b) $z = 5x_1 + 4x_2$
c) $z = x_1 + 3x_2$
d) $z = -x_1 + 2x_2$
e) $z = -2x_1 + x_2$
f) $z = -x_1 - x_2$

3. Entre al modelo del problema de la dieta (archivo ch2ToraDiet.txt) y cambie la función objetivo a

$$\text{Minimizar } z = 0.8x_1 + 0.8x_2$$

Use el módulo gráfico de TORA para demostrar que la solución óptima está asociada con *dos* puntos de esquina distintos, y que ambos puntos producen el mismo valor objetivo. En este caso se dice que el problema tiene *óptimos alternativos*. Explique las condiciones que causan esta situación y demuestre que, de hecho, el problema tiene una cantidad infinita de óptimos alternativos; a continuación deduzca una fórmula para determinar todas esas soluciones.

4. Se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 22.5 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En programación lineal, se dice que una restricción es *redundante* si al eliminarla del modelo no cambia el espacio de soluciones. Use la función gráfica de TORA para identificar las restricciones redundantes, y a continuación demuestre que su eliminación no afecta al espacio de soluciones ni a la solución óptima.

5. En el modelo de Reddy Mikks, use TORA para demostrar que la eliminación de las restricciones de materia prima (restricciones 1 y 2) dan como resultado un espacio de soluciones no acotado. ¿Qué se puede decir en este caso, acerca de la solución óptima del modelo?

6. En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se le añade la siguiente restricción:

$$x_2 \geq 3$$

Use TORA para demostrar que el modelo resultante tiene restricciones conflictivas que no se pueden satisfacer al mismo tiempo, y en consecuencia, no tiene solución factible.

2.3 ANÁLISIS GRÁFICO DE SENSIBILIDAD

Un modelo de programación lineal es una foto instantánea de una situación real en la que los parámetros del modelo (coeficientes de la función objetivo y de las restricciones) asumen valores estáticos. Para aumentar la aplicación de la programación lineal en la práctica, se necesita agregar una dimensión dinámica que investigue el impacto que tiene hacer cambios en los parámetros del modelo (coeficientes de la función objetivo y de las restricciones) sobre la solución óptima. A este proceso se le llama **análisis de sensibilidad**, porque estudia la sensibilidad de la solución óptima respecto a los cambios que se hagan en el modelo.

En esta sección se investigarán dos casos de análisis de sensibilidad basados en la solución gráfica de la programación lineal: 1) cambios en los coeficientes de la función objetivo y 2) cambios en el lado derecho de las restricciones. Aunque la presentación es elemental y su alcance es limitado, proporciona perspectivas fundamentales del desarrollo del análisis de sensibilidad. En el capítulo 4 se describe una presentación completa del tema.

2.3.1 Cambios en los coeficientes de la función objetivo

La función objetivo en general en un problema de programación lineal con dos variables se puede escribir como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Los cambios de los coeficientes c_1 y c_2 harán cambiar la pendiente de z y en consecuencia, posiblemente, el punto de esquina óptimo (véase una ilustración en la figura 2.1). Sin embargo, hay un intervalo de variación, tanto para c_1 como para c_2, dentro del cual el óptimo del momento permanece sin cambio. En forma específica nos interesa determinar el *intervalo de optimalidad* de la relación $\frac{c_1}{c_2}$ (o de $\frac{c_2}{c_1}$) donde se mantenga sin cambio la solución óptima del momento. En el siguiente ejemplo se ilustra el procedimiento.

Ejemplo 2.3-1

Acerca del modelo de Reddy Mikks (Ejemplo 2.1-1), en la figura 2.5 la solución óptima en C proporciona el valor máximo de $z = 5x_1 + 4x_2$. Si se cambia la solución objetivo a $z = c_1x_1 + c_2x_2$, la solución en C permanecerá óptima mientras la pendiente de z quede entre las pendientes de las dos líneas que se cruzan en C, que son $6x_1 + 4x_2 = 24$ (materia prima, $M1$) y $x_1 + 2x_2 = 6$ (materia prima, $M2$). Esta relación se puede expresar algebraicamente como

$$\text{Si } c_1 \neq 0, \text{ entonces } \frac{4}{6} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{2}{1}$$

o bien

$$\text{Si } c_2 \neq 0, \text{ entonces } \frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{6}{4}$$

En la primera condición, $c_1 \neq 0$ significa que la recta de la función objetivo no puede ser horizontal. De igual modo, en la segunda condición $c_2 \neq 0$ significa que z no puede ser vertical. Como se puede ver en la figura 2.5, el intervalo de optimalidad en este modelo (definido por las dos rectas que se cruzan en C) no permite que la función objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ sea una línea horizontal o vertical. El resultado es que se aplica a este ejemplo cada una de las dos condiciones dadas. Para los casos en los que c_1 y c_2 pueden asumir valores cero, el intervalo de $\frac{c_1}{c_2}$ (o de $\frac{c_2}{c_1}$) deben dividirse en dos conjuntos, en los que los denominadores no puedan ser cero. Véanse algunas ilustraciones en el problema 1, conjunto de problemas 2.3a.

Lo que indican las condiciones para $\frac{c_1}{c_2}$ y $\frac{c_2}{c_1}$ es que mientras que esas relaciones estén dentro de los límites especificados, la solución óptima permanece sin cambio en C. Obsérvese que si sucede que $z = c_1x_1 + c_2x_2$ coincide con $x_1 + 2x_2 = 6$, pueden presentarse óptimos alternativos en cualquier lugar del segmento de recta CD. De igual manera, si coincide con $6x_1 + 4x_2 = 24$, todos los puntos del segmento de recta BC son óptimos alternativos. Sin embargo, esta observación no cambia el hecho que C siga siendo óptimo en ambos casos.

Se pueden usar las condiciones dadas para determinar el intervalo óptimo para uno de los coeficientes cuando el otro permanece con su valor original, en $z = 5x_1 + 4x_2$. Así, dado $c_2 = 4$, el intervalo óptimo asociado para c_1 se determina a partir de la condición $\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{6}{4}$ sustituyendo $c_2 = 4$, y así se obtiene $4 \times \frac{1}{2} \leq c_1 \leq 4 \times \frac{6}{4}$ o sea $2 \leq c_1 \leq 6$. En forma parecida, dado $c_1 = 5$, la condición $\frac{4}{6} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq 2$ dará como resultado $\frac{10}{3} \leq c_2 \leq 10$.

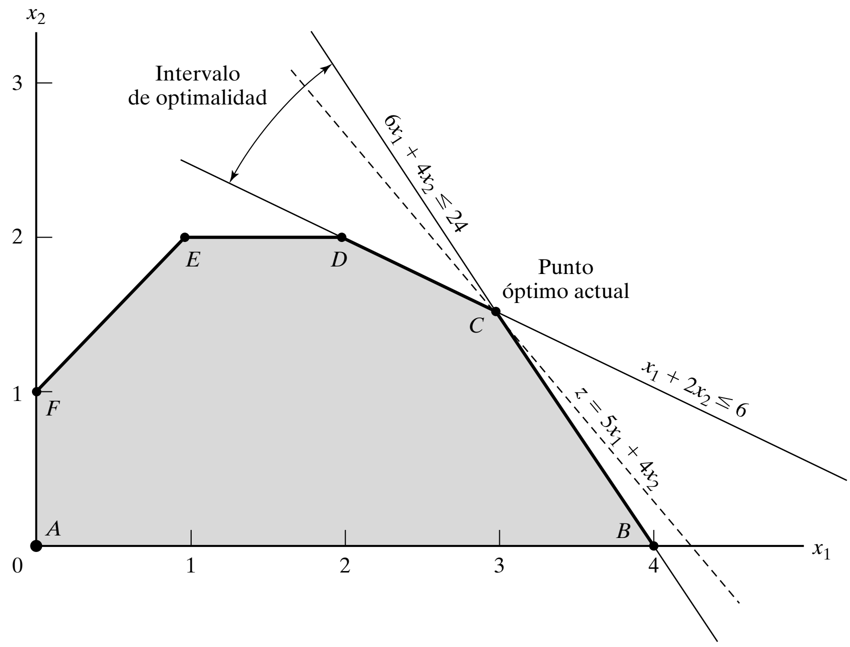


FIGURA 2.5
Intervalo de optimalidad para el modelo de Reddy Mikks

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.3A

1. Determine gráficamente el intervalo de optimalidad, $\frac{c_1}{c_2}$ o $\frac{c_2}{c_1}$ para los problemas siguientes. Tenga en cuenta los casos especiales donde c_1 o c_2 puedan asumir un valor cero.

   a) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
   sujeta a

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
-x_1 + x_2 &\leq 0 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   b) Maximizar $z = 6x_1 + 3x_2$
   sujeta a

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
x_1 - x_2 &\leq 0 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

   c) Maximizar $z = x_1 + x_2$
   sujeta a

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &\leq 0 \\
3x_1 - x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. En el problema de la dieta del ejemplo 2.2-2,

a) Determine el intervalo de optimalidad para la relación del costo por libra de maíz entre el costo por libra de soya.

b) Si el costo por libra de maíz aumenta 20% y el de soya disminuye 5%, ¿seguiría siendo óptima la solución actual?

c) Si aumenta a 70 centavos el costo por libra de maíz, y el costo por libra de soya disminuye a 50 centavos, ¿seguiría siendo óptima la solución actual?

3. La tienda B&K vende dos clases de gaseosas: la Cola A1 y la cola B&K, menos costosa. El margen de utilidad aproximado de A1 es 5 centavos por lata, y la de B&K es 7 centavos por lata. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas diarias. Aunque A1 es una marca reconocida, los clientes tienden a comprar más B&K, porque es bastante menos costosa. Se estima que se venden cuando menos 100 latas de A1 diarias, y que B&K se vende más que A1 por un margen mínimo de 2:1.

a) ¿Cuántas latas diarias de cada marca debe tener en existencia la tienda para maximizar la utilidad?

b) Determine la relación de las utilidades por lata de A1 y de B&K que mantengan sin cambiar la solución óptima en a).

4. Muebles Baba emplea 4 carpinteros durante 10 días para armar mesas y sillas. Se necesitan 2 horas-hombre para armar una mesa, y 0.5 horas hombre para armar una silla. Los clientes suelen comprar una mesa y de cuatro a seis sillas. Las utilidades son $135 por mesa y $50 por silla. La empresa trabaja un turno diario de 8 horas.

a) Determine la proporción óptima de producciones de mesas y sillas en 10 días, gráficamente.

b) Determine el intervalo de la relación de utilidades óptimas que mantenga sin cambiar al óptimo del punto a).

c) Si las utilidades actuales por mesa y por silla se reducen en 10%, ambas, use la respuesta del punto b) para mostrar cómo puede afectar ese cambio a la solución óptima obtenida en a).

d) Si las utilidades actuales por mesa y por silla se cambian a $120 y a $25, respectivamente, use el resultado de sensibilidad en el punto b) para determinar si cambia la solución en el punto a).

5. El Banco de Crédito asigna un máximo de $200,000 para préstamos personales y para automóviles durante el mes próximo. Cobra 14% en los préstamos personales y 12% en los de automóvil. Las dos clases de préstamo se pagan en 1 año. De acuerdo con la experiencia, nunca se pagan aproximadamente el 3% de los préstamos personales y 2% de los de automóvil, ni sus principales ni sus intereses. El banco suele asignar aproximadamente el doble para préstamos para automóvil que para préstamos personales.

a) Determine la asignación óptima de fondos a las dos clases de préstamo, y la tasa neta de retorno de todos los préstamos.

b) Determine el intervalo de optimalidad para la relación de tasas de interés para auto y personal que mantengan sin cambiar la solución en el punto a).

c) Suponga que los porcentajes de los préstamos personales y para auto se cambian a 4 y 3%, respectivamente, y use el resultado del punto b) para mostrar cómo afecta a la solución óptima en el punto a).

6. Electra produce dos clases de motores eléctricos, cada uno en una línea de producción aparte. Las capacidades diarias de las dos líneas son de 600 y de 750 motores. El motor tipo 1 usa 10 unidades de cierto componente electrónico, y el motor tipo 2 usa 8 unidades. El proveedor de ese componente puede suministrar 8000 piezas por día. Las utilidades son $60 por cada motor de tipo 1 y $40 por cada uno de tipo 2.

a) Determine la mezcla óptima de producción diaria.

b) Determine el intervalo de optimalidad para la relación de utilidades unitarias que mantenga inalterada la solución en el punto a).

7. Se contrata a Enlatadora Popeye para que reciba 60,000 lb de tomates maduros a 7 centavos por libra, con los cuales produce jugo de tomate y pasta de tomate, ambos enlatados. Se empacan en cajas de 24 latas. En una lata de jugo se usa 1 lb de tomates frescos, y en una de pasta sólo $\frac{1}{3}$ de lb. La demanda de los productos en el mercado se limita a 2000 cajas de jugo y 6000 cajas de pasta. Los precios al mayoreo por caja de jugo y de pasta son \$18 y \$9, respectivamente.

a) Deduzca un programa óptimo de producción para Popeye.

b) Determine la relación de precios de jugo entre pasta que permita a Popeye producir más cajas de jugo que de pasta.

8. Muebles Modernos arma dos clases de alacenas a partir de madera cortada: normal y de lujo. Las alacenas normales se pintan de blanco, y las de lujo se barnizan. La pintura y el barnizado se hacen en un departamento. El departamento de ensamble puede producir un máximo de 200 alacenas normales y 150 de lujo por día. Para barnizar una unidad de lujo se necesita el doble de tiempo que para pintar una normal. Si el departamento de pintura y barnizado sólo se dedicara a unidades de lujo, podría terminar 180 diarias. La empresa estima que las utilidades unitarias son \$100 por alacena normal, y \$140 por alacena de lujo.

a) Formule el problema como programa lineal y determine el programa óptimo de producción diaria.

b) Suponga que, debido a la competencia, se deben reducir las utilidades unitarias a \$80 por la unidad normal y a \$110 por la de lujo. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si permanece sin cambio la solución óptima en a).

2.3.2 Cambio en disponibilidad de recursos

En los modelos de programación lineal, las restricciones representan el uso de recursos limitados, ya sea en forma directa o indirecta. En este caso, se puede imaginar que el lado derecho representa límites de disponibilidad de los recursos. En esta sección se investigará la sensibilidad de la solución óptima a cambios en la cantidad de los recursos disponibles.

Ejemplo 2.3-2

Para el modelo de Reddy Mikks, la figura 2.6 muestra que el óptimo actual está en C, y es la intersección de las rectas asociadas con las materias primas $M1$ y $M2$. Cuando cambia la disponibilidad de $M1$ (aumenta o disminuye respecto a su valor actual de 24 toneladas), y si $M2 = 6$ toneladas, la solución óptima en el punto C se "deslizará" a lo largo del segmento de recta DG. todo cambio en $M1$ fuera del intervalo de este segmento hará que el punto C (la intersección de las rectas relacionadas con $M1$ y $M2$) no sea factible. Por esta razón se dice que los puntos extremos $D = (2, 2)$ y $G = (6, 0)$ limitan al *intervalo de factibilidad* de $M1$. Así,

$$\text{Cantidad de } M1 \text{ en } D = 6x_1 + 4x_2 = 6 \times 2 + 4 \times 2 = 20 \text{ toneladas}$$

$$\text{Cantidad de } M1 \text{ en } G = 6x_1 + 4x_2 = 6 \times 6 + 4 \times 0 = 36 \text{ toneladas}$$

En consecuencia, si $M2 = 6$, el intervalo de factibilidad para $M1$ es

$$20 \leq M1 \leq 36$$

Este resultado indica que $M1$ puede bajar hasta 4 toneladas o aumentar hasta 12 toneladas y seguir garantizando que el punto de la solución óptima seguirá siendo la intersección de las

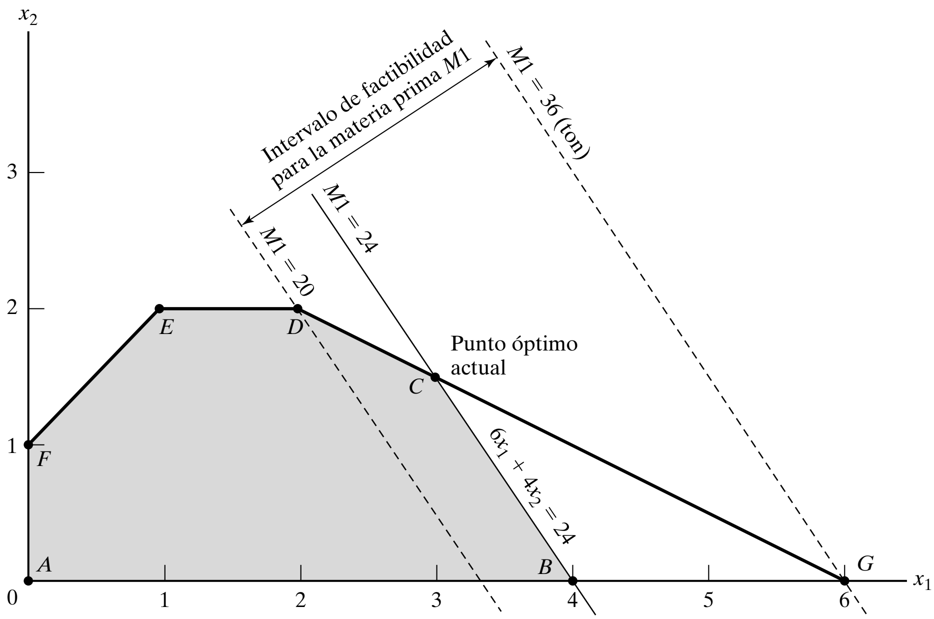


FIGURA 2.6
Intervalo de factibilidad para la materia prima *M*1 en el modelo de Reddy Mikks

rectas asociadas con *M*1 y *M*2. En realidad, si $M2 = 6$, la solución general asociada se obtiene en función de *M*1 como sigue (¡compruébelo!):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{4}M1 - 3 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{8}M1 + \tfrac{9}{2} \end{aligned}\right\}, 20 \leq M1 \leq 36$$

A continuación veamos la materia prima *M*2. La figura 2.7 muestra que el intervalo de factibilidad para *M*2 (si $M1 = 24$ toneladas) está limitado por los extremos *B* y *H*, siendo $B = (4, 0)$ y $H = (\frac{8}{3}, 2)$, donde el punto *H* se define por la intersección de las rectas *ED* y *BC*. Así,

$$\text{Cantidad de } M2 \text{ en } B = x_1 + 2x_2 = 4 + 2 \times 0 = 4 \text{ toneladas}$$

$$\text{Cantidad de } M2 \text{ en } H = \tfrac{8}{3} + 2 \times 2 = \tfrac{20}{3} \text{ toneladas}$$

Entonces, mientras $M1 = 24$, el intervalo de factibilidad para *M*2 es

$$4 \leq M2 \leq \tfrac{20}{3}$$

De nuevo, puede usted verificar que si $M1 = 24$, la solución asociada se define por

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{2}M2 + 6 \\ x_2 &= \tfrac{3}{4}M2 - 3 \end{aligned}\right\}, 4 \leq M2 \leq \tfrac{20}{3}$$

2.3.3 Valor por unidad de un recurso

La figura 2.8 muestra que se puede concebir a un modelo de programación lineal como uno de entrada y salida, o de datos y resultados, en el que los recursos limitados representan los

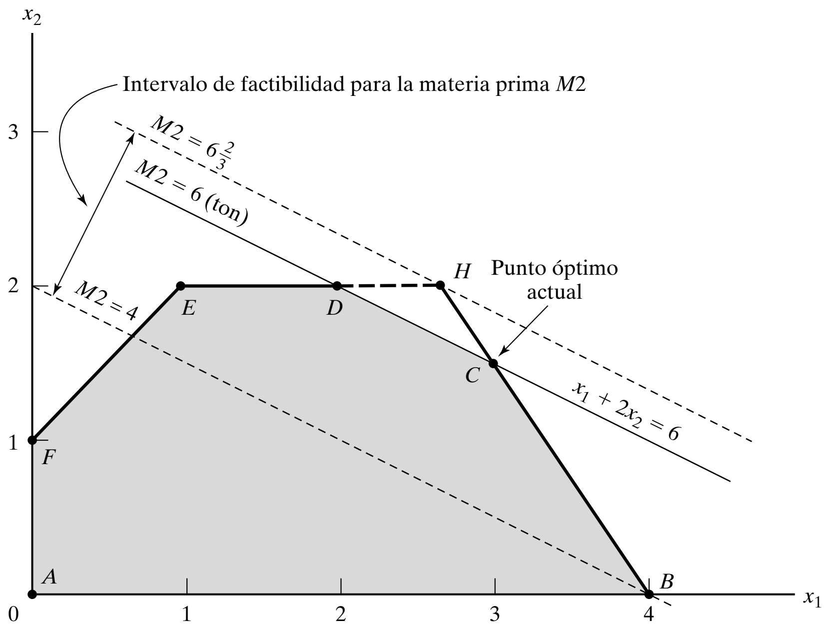


FIGURA 2.7

Intervalo de factibilidad para la materia prima $M2$ en el modelo de Reddy Mikks

datos y el valor de la solución objetivo representa el resultado. Una consecuencia útil de este modelo es determinar cómo los cambios en sus datos (recursos) pueden influir sobre su resultado (el valor objetivo). Esa medida se puede obtener como subproducto de los cálculos del intervalo de factibilidad que se describieron en la sección 2.3.2. En forma específica, se trata de determinar el **valor por unidad de un recurso**, que se define como la tasa de cambio en el valor de la función objetivo debido a cambios en la cantidad disponible de un recurso.

Si y_i representa el valor de cada unidad del recurso i, la fórmula correspondiente para calcular esta medida es

$$y_i = \frac{\text{cambio de valor de } z \text{ correspondiente al intervalo factible del recurso } i}{\text{intervalo factible del recurso } i}$$

Para ilustrar esta nueva medida usaremos el modelo de Reddy Mikks.

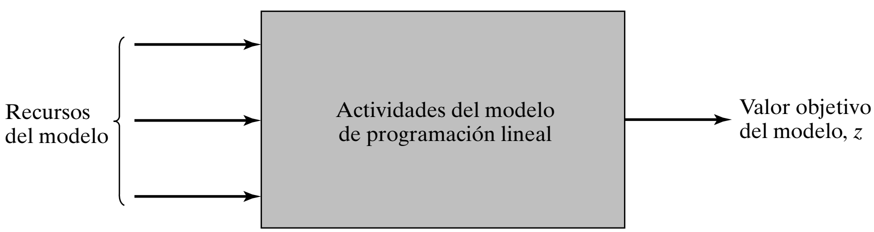


FIGURA 2.8

Representación de un programa lineal como modelo de entrada y salida (datos y resultados)

Ejemplo 2.3-3

La figura 2.6 muestra que el intervalo factible para $M1$, $20 \leq M1 \leq 36$, y está definido por los puntos D y G. Por consiguiente:

$$y_1 = \frac{\text{cambio en } z \text{ de } D \text{ a } G}{\text{cambio en } M1 \text{ de } D \text{ a } G}$$

Como $D = (2, 2)$ y $G = (6, 0)$, entonces

$$z \text{ en } D = 5 \times 2 + 4 \times 2 = 18 \text{ (miles de dólares)}$$

$$z \text{ en } G = 5 \times 6 + 4 \times 0 = 30 \text{ (miles de dólares)}$$

Entonces,

$$y_1 = \frac{30 - 18}{36 - 20} = 0.75 \text{ (miles de dólares por tonelada de } M1)$$

El resultado indica que un cambio de 1 tonelada en $M1$, en el intervalo $20 \leq M1 \leq 36$ hará cambiar el valor óptimo de z en \$750.

A continuación consideraremos la materia prima $M2$. Su intervalo de factibilidad es $4 \leq M2 \leq \frac{20}{3}$, y está limitado por los puntos B y H en la figura 2.7. Entonces,

$$y_2 = \frac{\text{cambio en } z \text{ de } B \text{ a } H}{\text{cambio en } M2 \text{ de } B \text{ a } H}$$

donde,

$$z \text{ en } B = 5x_1 + 4x_2 = 5 \times 4 + 4 \times 0 = 20 \text{ (miles de dólares)}$$

$$z \text{ en } H = 5 \times \tfrac{8}{3} + 4 \times 2 = \tfrac{64}{3} \text{ (miles de dólares)}$$

En consecuencia,

$$y_2 = \frac{\frac{64}{3} - 20}{\frac{20}{3} - 4} = 0.5 \text{ (miles de dólares por tonelada de } M2)$$

En este caso el resultado indica que un aumento o disminución de una tonelada en $M1$, en el intervalo $4 \leq M1 \leq \frac{20}{3}$ aumenta o disminuye la utilidad en \$500.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.3B

1. Salvaje Oeste produce dos clases de sombrero vaquero. Un sombrero de la clase 1 requiere el doble de mano de obra que uno de la clase 2. Si toda la mano de obra se dedicara sólo a la clase 2, la empresa podría producir diariamente 400 de esos sombreros. Los límites de mercado respectivos son 150 y 200 sombreros diarios para esas clases. La utilidad es \$8 por cada sombrero de la clase 1, y \$5 por cada uno de la clase 2.
   - **a)** Aplique la solución gráfica para determinar la cantidad de sombreros diarios de cada clase con la que se maximiza la utilidad.
   - **b)** Determine el valor de aumentar la capacidad de producción en la empresa en un sombrero de la clase 2, y el intervalo dentro del cual se aplica este resultado.

c) Si el límite de demanda diaria de sombreros de clase 1 disminuyera a 120, aplique el valor por unidad del recurso para determinar el efecto correspondiente sobre la utilidad óptima.

d) ¿Cuál es el valor por aumento unitario en la parte de mercado del sombrero clase 2? ¿En cuánto se puede aumentar la participación en el mercado conservando el valor calculado por unidad?

2. Una empresa fabrica dos productos, *A* y *B*. El volumen de ventas de *A* es, cuando menos, 80% de las ventas totales de *A* y *B*. Sin embargo, la empresa no puede vender más de 100 unidades de *A* por día. Los dos productos usan una materia prima, cuya disponibilidad diaria máxima es 240 lb. Los consumos de la materia prima son 2 lb por unidad de *A* y 4 lb por unidad de *B*. Los precios unitarios de *A* y *B* son $20 y $50, respectivamente.

a) Determine la combinación óptima de productos para esta compañía.

b) Calcule el valor por cambio unitario en la disponibilidad de la materia prima, y su intervalo de aplicabilidad.

c) Determine el intervalo de utilidad que corresponde al intervalo de factibilidad de la materia prima.

d) Use el valor unitario por unidad para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto *A* en ± 10 unidades.

3. En dos productos se requieren tres procesos consecutivos. El tiempo disponible para cada proceso es 10 horas diarias. La tabla siguiente resume los datos del problema:

	Minutos por unidad			
Producto	*Proceso 1*	*Proceso 2*	*Proceso 3*	*Utilidad unitaria*
1	10	6	8	$2
2	5	20	10	$3

a) Determine la combinación óptima de fabricación de los dos productos.

b) Determine un procedimiento para priorizar los tres procesos, para una posible ampliación.

4. Impacto, S.A., puede anunciar sus productos en estaciones locales de radio o TV. El presupuesto para publicidad se limita a $10,000 mensuales. Cada minuto de un anuncio en la radio cuesta $15, y cada minuto de comercial en TV cuesta $300. A impacto le gusta usar al menos el doble de publicidad por la radio que por TV. Al mismo tiempo, no es práctico usar más de 400 minutos de anuncios radiofónicos cada mes. La experiencia indica que se estima que la publicidad por TV es 25 veces más efectiva que por la radio.

a) Determine la asignación óptima del presupuesto para publicidades por radio y por TV.

b) Calcule el valor por unidad de aumento del límite mensual de publicidad por radio.

c) Si el presupuesto mensual aumentara a $15,000, use la medida de valor por unidad para determinar la medida óptima obtenida de la eficacia de la publicidad.

5. Luz del Centro es dueña de una central turbogeneradora. Como en los alrededores hay abundantes depósitos de carbón, la central genera su vapor con ese combustible. Sin embargo, eso puede causar una emisión que no cumpla con las normas ambientales, que limitan la descarga de dióxido de azufre a 2000 partes por millón por tonelada de carbón quemado, y la descarga de humo por las chimeneas a 20 libras por hora. La empresa recibe dos clases de carbón pulverizado, *C*1 y *C*2, que usa en sus calderas. Las dos clases se suelen mezclar antes de quemarlas. Para simplificar, se puede suponer que el dióxido de azufre contaminante de la mezcla (en partes por mi-

llón) es un promedio ponderado para cada clase que se usa en la mezcla. Los datos siguientes se basan en 1 tonelada de consumo por hora, de cada uno de las dos clases de carbón.

Clase de carbón	Descarga de azufre, partes por millón	Descarga de humo, lb/hora	Vapor generado, lb/hora
*C*1	1800	2.1	12,000
*C*2	2100	0.9	9000

a) Determine la relación óptima de mezcla de las dos clases de carbón.

b) Determine el efecto de bajar en 1 lb el límite de descarga de humo, sobre la cantidad de vapor generada por hora.

6. La División de Educación Continua del Colegio Central ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Los cursos que se ofrecen suelen ser de dos tipos: prácticos, como modelado en madera, procesamiento de texto y mantenimiento automotriz; y humanísticos, como historia, música y bellas artes. Para satisfacer las necesidades de la comunidad, deben ofrecerse al menos 10 cursos de cada tipo en cada semestre. La división estima que las utilidades por los cursos prácticos y humanísticos son, aproximadamente, $1500 y $1000 por curso, respectivamente.

a) Determine la oferta óptima de cursos para ese colegio.

b) Demuestre que el valor por cada curso adicional es $1500, igual que la utilidad por cada curso práctico. ¿Qué indica este resultado respecto a ofrecer cursos adicionales?

c) Use la medida de valor por unidad para determinar la utilidad que resulta de aumentar en un curso el requisito mínimo de cursos prácticos.

d) Repita la parte b) para los cursos humanísticos.

7. Modelos Alfa fabrica camisas y blusas para las Tiendas Beta, que aceptan toda la producción de Alfa. En el proceso de producción intervienen el corte, costura y empacado. Alfa emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el departamento de costura y 5 en el departamento de empaque. Esa fábrica trabaja un turno de 8 horas, 5 días por semana. En la tabla siguiente se muestran los tiempos necesarios y las utilidades unitarias para las dos prendas.

	Minutos por unidad			
Prenda	*Corte*	*Costura*	*Empaque*	*Utilidad unitaria ($)*
Camisas	20	70	12	8.00
Blusas	60	60	4	12.00

a) Determine el programa de producción semanal óptimo para Alfa.

b) Determine el valor de corte, costura y empaque por hora.

c) Suponga que se pueda trabajar tiempo extra en los departamentos de corte y costura. ¿Qué sueldos por hora máximos puede pagar Alfa por tiempo extra laborado?

8. En Limpieza, S.A., se usan las materias primas I y II para producir dos soluciones limpiadoras domésticas, *A* y *B*. La disponibilidad diaria de las materias primas I y II es 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de solución *A* consume 0.5 unidad de materia prima I y 0.6 unidad de materia prima II; una unidad de solución *B* requiere 0.5 unidad de materia prima I y 0.4 unidad de materia prima II. Las utilidades unitarias de las soluciones *A* y *B* son $8 y $10, respecti-

vamente. La demanda diaria de la solución *A* está entre 30 y 150 unidades, y la de la solución *B* entre 40 y 200 unidades.

a) Calcule las cantidades óptimas de *A* y *B* que debe producir Limpieza.

b) Determine el valor por cambio unitario en las materias primas I y II.

9. Una línea de ensamble está formada por tres estaciones consecutivas, y produce dos modelos de radio: Alta Fidelidad 1 y Alta Fidelidad 2. En la siguiente tabla se ven los tiempos de ensamble en las tres estaciones de trabajo.

	Minutos por unidad	
Función de trabajo	*AF-1*	*AF-2*
1	6	4
2	5	5
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles en cada estación por día.

a) La empresa desea determinar la combinación óptima de productos con la que se minimicen los tiempos de paro (o tiempos no usados) en las tres estaciones de trabajo.

b) Determine el valor de bajar el tiempo diario de mantenimiento en un punto porcentual, para cada estación de trabajo.

2.4 SOLUCIONES DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN COMPUTADORA

El procedimiento gráfico de la sección 2.2 se usa principalmente para visualizar algunas de las propiedades fundamentales de la solución del programa lineal. En la práctica, donde los modelos normales de programación lineal implican miles de variables y de restricciones, la única forma posible de resolver esos modelos es usar computadoras.

En esta sección se describen cuatro paquetes de cómputo para resolver programas lineales: TORA, Excel Solver, AMPL y LINGO. Los programas TORA y Excel Solver[1] sólo son para problemas de tamaño moderado. Para los muy grandes, con cientos (o miles) de restricciones y variables, se necesita tener un paquete comercial, como AMPL o LINGO, para resolver la tarea.

2.4.1 Solución de programación lineal con TORA

La captura de datos en TORA es directa, y no requiere instrucciones especiales. Por esta razón, en esta sección nos concentraremos en la interpretación del resultado de TORA. Esta información se usará en la sección 2.5 para analizar e interpretar las soluciones de algunas aplicaciones seleccionadas de programación lineal.

[1]Premium Solver tiene funciones más poderosas.

Ejemplo 2.4-1

La figura 2.9 representa la solución del modelo de Reddy Mikks con TORA. Aplicaremos las ideas presentadas en el método gráfico para explicar los resultados de TORA. Es importante notar que el resultado de TORA coincide, tanto en calidad como en contenido, con el resultado obtenido con paquetes comerciales.

El resultado se divide en dos partes principales: resumen de la solución óptima y análisis de sensibilidad. El resumen de la solución óptima muestra los valores óptimos de las variables y de la función objetivo óptima, es decir, que la cantidad de la pintura para exteriores, x_1, es 3 toneladas, que la cantidad de pinturas para interiores, x_2, es de 1.5 toneladas, y que la utilidad correspondiente es $21,000. También muestra información sobre la cantidad no usada (–, holgura, *slack*) en una restricción $\leq$, y el exceso sobre el requisito mínimo ($+$, excedente [sobrante] o *surplus*) en una restricción $\geq$.

En este resultado se ve que las holguras de las dos primeras restricciones son cero, lo cual significa que las materias primas *M*1 y *M*2 se consumen por completo. La holgura de la tercera restricción es igual a 2.5 toneladas, y eso significa que la restricción se sobresatisface (porque la cantidad de pintura para interiores es menor que la de pintura para exteriores). La

```
                     LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY
------------------------------------------------------------------------------
Title: Example 2.4-1, Reddy Mikks Model
Final Iteration No.:  3
Objective Value  (Max) = 21.00
------------------------------------------------------------------------------
Variable             Value   Obj Coeff  Obj Val Contrib
------------------------------------------------------------------------------
x1: Exterior          3.00       5.00           15.00
x2: Interior          1.50       4.00            6.00
------------------------------------------------------------------------------
Constraint             RHS  Slack-/Surplus+
------------------------------------------------------------------------------
1 (<)                24.00          0.00
2 (<)                 6.00          0.00
3 (<)                 1.00          2.50-
4 (<)                 2.00          0.50-
------------------------------------------------------------------------------
                       ***Sensitivity Analysis***
------------------------------------------------------------------------------
Variable        CurrObjCoeff   MinObjCoeff   MaxObjCoeff  Reduced Cost
------------------------------------------------------------------------------
x1: Exterior            5.00          2.00          6.00          0.00
x2: Interior            4.00          3.33         10.00          0.00
------------------------------------------------------------------------------
Constraint         Curr RHS    Min RHS     Max RHS  Dual Price
------------------------------------------------------------------------------
1 (<)                 24.00      20.00       36.00       0.75
2 (<)                  6.00       4.00        6.67       0.50
3 (<)                  1.00      -1.50    infinity       0.00
4 (<)                  2.00       1.50    infinity       0.00
------------------------------------------------------------------------------
```

FIGURA 2.9

Resultados del modelo de Reddy Mikks obtenidos con TORA

holgura asociada con la cuarta restricción indica que la cantidad de pintura para interiores es media tonelada menor que el límite máximo especificado por la demanda.

La parte del análisis de sensibilidad de los resultados trata de los cambios *individuales* en los coeficientes de la función objetivo y de los lados derechos de las restricciones. Por ejemplo, la solución óptima del momento permanecerá sin cambio mientras la utilidad por tonelada de pintura para exteriores esté entre \$2 y \$6(miles). También, la factibilidad de la solución actual no se afecta mientras la disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ se conserve entre 20 y 36 toneladas. Son los mismos resultados que se obtuvieron gráficamente en los ejemplos 2.3-1 y 2.3-2.

Se deben explicar dos columnas adicionales: el *costo reducido* (*reduced cost*) y el *precio dual* (*dual price*) de una restricción.

Se puede definir al **costo reducido** con base en un aspecto económico del modelo de programación lineal. Como se ve en la figura 2.8, se considera que una variable de programa lineal es una actividad económica que consume (le entran) recursos para fines de producir (sale) una utilidad. Desde este punto de vista se tiene la siguiente definición:

$$\begin{pmatrix}\text{Costo reducido por}\\ \text{unidad de actividad } j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de recursos}\\ \text{consumidos por}\\ \text{unidad de actividad } j\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Utilidad por unidad}\\ \text{de actividad } j\end{pmatrix}$$

Si es positivo el costo reducido de la actividad por unidad, su costo unitario de recursos consumidos es mayor que su utilidad unitaria, y se debe desechar la actividad. Eso quiere decir que el valor de su variable asociada en la solución óptima debe ser cero. También, una actividad que es económicamente atractiva tendrá un costo reducido igual a cero en la solución óptima, y eso quiere decir que hay equilibrio entre la salida (utilidad unitaria) y la entrada (costo unitario de recursos consumidos). En la figura 2.9, tanto x_1 como x_2 asumen valores positivos en la solución óptima, y en consecuencia tienen costo reducido cero.

A continuación pasaremos a la definición del **precio dual**. Esta medida representa en realidad el **valor por unidad** de un recurso, tal como se explicó en la sección 2.3.3; esto es, expresa la contribución de un aumento o disminución unitarios en la disponibilidad de un recurso sobre la función objetivo. El nombre *precio dual* surgió de la definición matemática del problema dual de programación lineal (véase el capítulo 4). Entre otros nombres menos comunes, que igualmente no sugieren nada, están **precios sombra** y **multiplicadores símplex**. Aunque el nombre *valor por unidad de un recurso* que se usó en la sección 2.3.3 da una mejor descripción de lo que significa la medida, usaremos el nombre *precio dual*, por ser normal en los resultados de todos los programas lineales comerciales.

En la figura 2.9, los precios duales de las materias primas $M1$ y $M2$ son 0.75 y 0.5, es decir, \$750 y \$500 por tonelada, respectivamente. Son los mismos valores que se obtuvieron gráficamente en el ejemplo 2.3-3, y son válidos sólo para los intervalos respectivos de factibilidad de $20 \leq M1 \leq 36$ y $4 \leq M2 \leq 6\frac{2}{3}$. Para cambios fuera de esos intervalos, todo lo que se puede decir que no se puede dar una respuesta inmediata, y que será necesario resolver de nuevo el programa lineal. Como ilustración, si la disponibilidad de $M1$ baja de su nivel actual de 24 toneladas a 22 toneladas, el valor óptimo de la función objetivo cambiará en $\$750 \times (22 - 24) = -\$3000$. Por otro lado, si el aumento es de 24 a 40 toneladas (que cae fuera del intervalo de factibilidad), se debe resolver de nuevo este problema.

Los precios duales para las restricciones tercera y cuarta, del modelo de Reddy Mikks, son cero para los intervalos $(-1.5, \infty)$ y $(1.5, \infty)$, respectivamente. Este resultado indica que los *aumentos* en los recursos que representan los límites de mercado para la producción de pinturas para interiores y para exteriores no tienen efecto sobre la solución óptima del momento, o actual. Por otra parte, si la parte del mercado de la pintura para interiores baja de 1.5 toneladas diarias, cambiará la solución óptima.

2.4.2 Solución de programa lineal con Solver de Excel

Para mostrar el uso de Excel en la preparación de los datos (la entrada) en un formato adecuado para Excel Solver (archivo ch2SolverReddyMikks.xls) se usa el modelo de Reddy Mikks. La parte superior de la figura 2.10 muestra la distribución de la hoja de cálculo para el modelo. Muestra cuatro tipos de información: 1) celdas de datos (áreas sombreadas, B5:C9 y F6:F9), 2) celdas que representan las variables y la función objetivo que se debe evaluar (celdas rectangulares gruesas, B13:D13), 3) definición algebraica de la función objetivo y el lado derecho de las restricciones (celdas rectangulares interrumpidas o punteadas, D5:D9), y 4) celdas que sólo contienen nombres o símbolos explicativos. Solver sólo requiere los tres primeros tipos. El cuarto tipo se usa principalmente para mejorar la legibilidad del modelo; no tiene otro objeto. La posición relativa de las cuatro clases de información en la hoja de cálculo no necesita apegarse a la distribución que se ve en la figura 2.10. Por ejemplo, las celdas que definen la función objetivo y las variables no necesitan ser vecinas, ni deben colocarse en la parte inferior del problema. Lo importante es que se sepa dónde están, para que Solver las pueda referenciar. Sin embargo, siempre se aconseja usar el formato que sugiere la figura 2.10, porque mejora la legibilidad del modelo.

¿Cómo se vincula Solver con los datos de la hoja de cálculo? Primero, se dan definiciones "algebraicas" equivalentes de la función objetivo y del lado izquierdo de las restricciones usando los datos (celdas sombreadas) y la función objetivo, así como las variables (celdas rectangulares gruesas). A continuación se colocan las fórmulas resultantes en las celdas apropia-

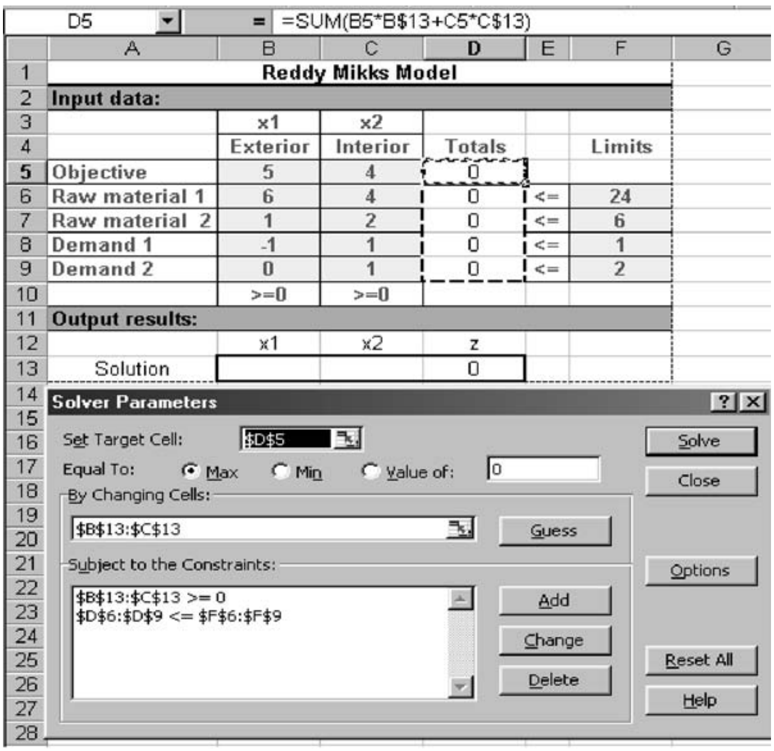


FIGURA 2.10

Definición del modelo de Reddy Mikks con Excel, invocando Solver

das del rectángulo de línea interrumpida. La tabla siguiente muestra las funciones algebraicas, las fórmulas equivalentes de la hoja de cálculo y su colocación en las celdas adecuadas.

	Expresión algebraica	Fórmula en hoja de cálculo	Celda objetivo
Objetivo, z	$5x_1 + 4x_2$	= B5*$B$13 + C5*$C$13	D5
Restricción 1	$6x_1 + 4x_2$	= B6*$B$13 + C6*$C$13	D6
Restricción 2	$x_1 + 2x_2$	= B7*$B$13 + C7*$C$13	D7
Restricción 3	$-x_1 + x_2$	= B8*$B$13 + C8*$C$13	D8
Restricción 4	$0x_1 + x_2$	= B9*$B$13 + C9*$C$13	D9

Observe que sólo necesita usted capturar la fórmula para la celda D5, y a continuación copiarlas en las celdas D6:D9. Para hacerlo en forma correcta, se deben reemplazar B13 y C13 (que representan x_1 y x_2) con las referencias fijas $B$13 y $C$13. Para programas lineales más grandes, sería más cómodo ingresar

```
=SUMAPRODUCTO(B5:C5,$B$13:$C$13)
```

en la celda D5, y copiarlo en las celdas D6:D9.

Llegados a este punto, todos los elementos del modelo de programación lineal quedan listos para enlazarse con Solver. Desde el menú Herramientas de Excel, seleccione Solver para abrir la caja de diálogo que se ve en la parte inferior de la figura 2.10. Primero, usted define la función objetivo, z, y el sentido de optimización, capturando los datos siguientes:

Celda objetivo: `$D$5`
Valor de la celda objetivo: `Max`
Cambiando las celdas: `$B$13:$C$13`

Esta información indica a Solver que las variables definidas por las celdas $B$13 y $C$13 se determinan maximizando la función objetivo de la celda $D$5.

El último paso es establecer las restricciones de los problemas haciendo clic en el botón Agregar del cuadro de diálogo. Aparecerá otro cuadro de diálogo para facilitar la captura de los elementos de las restricciones (lado izquierdo, tipo de desigualdad y lado derecho) en una forma adecuada. En ese nuevo cuadro de diálogo, las restricciones se ingresan como sigue:

```
$D$6:$D$9<=$F$6:$F$9
```

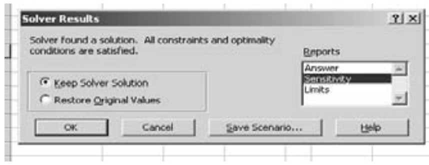
Recuerde que F6:F9 definen el lado derecho de las restricciones.

Las únicas restricciones restantes son las de no negatividad, que se aumentan al modelo haciendo clic en Agregar y escribiendo a continuación

```
$B$13:$C$13>=0
```

Cuando se aplica Solver al problema, aparecerá el valor óptimo de z en la celda D5, y los valores de x_1 y x_2 irán a las celdas B13 y C13, respectivamente. Por comodidad usaremos la celda D13 para mostrar el valor óptimo de z, ingresando en ella la fórmula =D5. De esta manera, todos los elementos de la solución óptima aparecen uno junto a otro en el mismo renglón.

Ya estamos listos para resolver el modelo, sólo con hacer clic en el botón de comando Resolver. Sin embargo, antes hay que hacer clic en Opciones para seleccionar nuevas características para la solución (tiempo máximo de ejecución, cantidad máxima de iteraciones, precisión, etc.) si así se desea. Lo más importante es que revise usted el cuadro marcando con



Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$11	Solution x1	3	0	5	1	3
$C$11	Solution x2	1.5	0	4	6	0.666666667

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$5	Raw material 1 Totals	24	0.75	24	12	4
$D$6	Raw material 2 Totals	6	0.5	6	0.666666667	2
$D$7	Demand 1 Totals	-1.5	0	1	1E+30	2.5
$D$8	Demand 2 Totals	1.5	0	2	1E+30	0.5

FIGURA 2.11

Informe del análisis de sensibilidad con Solver de Excel

Adoptar modelo lineal para obtener un resultado adecuado de programación lineal. Opciones también permite especificar que todas las variables sean no negativas.[2]

Si el planteo del modelo es correcto, la solución aparecerá en las celdas de resultados (B13:D13) de la hoja de resultados. También, un nuevo cuadro de diálogo llamado Resultados de Solver le dará la oportunidad de pedir más detalles de la solución, incluyendo el importante análisis de sensibilidad. Esos informes se guardarán en hojas separadas. La figura 2.11 muestra el informe de sensibilidad para el modelo de Reddy Mikks. La información que se muestra equivale exactamente a la que proporciona TORA, y se interpreta en forma parecida. Observe que *precios sombra* es lo mismo que *precios duales* en TORA.

Finalmente diremos que la definición del modelo de Reddy Mikks para usarlo con Solver de Excel es directa. Otros modelos podrán requerir “algo de ingenio” para poder definirlos en una forma cómoda (y menos tediosa). Una clase de modelos de programación lineal que cae dentro de esta categoría tiene que ver con optimización de redes, como se demostrará en el capítulo 6.

2.4.3 Solución de programación lineal con LINGO y AMPL

Los modelos de programación lineal que se presentan en este libro se han simplificado y escalado mucho hacia abajo, para que quepan en el formato de un libro de texto. En la vida real, un modelo de programación lineal puede implicar miles de variables y de restricciones. Los datos correspondientes se pueden guardar en archivos extraídos de una base de datos, o se pueden preparar con hojas de cálculo. En otras palabras, los datos para “megamodelos” de programa lineal casi nunca están disponibles en el elegante formato de matriz que usamos en los libros de texto. Eso quiere decir que es impráctico tratar de capturar los datos para esos modelos con cuadros como los de Excel o TORA, y es esencial la necesidad de un generador automático de modelos.

---

[2]Necesita tener en cuenta algunas de las particularidades de la versión de Solver que proporciona Excel. Si en el cuadro de diálogo Opciones establece Precisión demasiado alta (por ejemplo, 0.000000001) podrá presentársele un mensaje críptico para decir que el modelo no satisface las hipótesis de linealidad. También, se podría hacer que los resultados fueran más legibles con redondeos adecuados (por ejemplo, 1E-14 debe imprimirse como 0, y 9.999999999 debería ser 10).

Hay varios paquetes comerciales para generar modelos de programación lineal, entre ellos AMPL, GAMS, LINGO y MPL. El concepto básico de esos paquetes es expresar en forma genérica al programa lineal algebraicamente, para después proporcionar los datos numéricos que activen el modelo. Esos datos podrán estar codificados en forma permanente en el modelo, o leerse en archivos externos, y/o vinculados a un procesador de hoja de cálculo. También hay mayor flexibilidad en la forma en que se adapta y se recupera el resultado del modelo.

Esta sección muestra las funciones de codificación de dos paquetes bastante usados: LINGO y AMPL. Ésta es una presentación breve, y por ningún concepto detallada, pero debe dar al lector una idea general de la forma en que funcionan esos paquetes. Pedimos al lector consultar más detalles en las referencias que se citan al final de este capítulo. También, ambos paquetes tienen ediciones para estudiantes, que se pueden bajar de los sitios Web correspondientes (*www.lindo.com* y *www.ampl.com*).

Modelado con LINGO. La figura 2.12 muestra el modelo de Reddy Mikks usando LINGO (archivo ch2LingoReddyMikks.lng). Para subrayar, se muestran en mayúsculas negritas todas las palabras reservadas de LINGO (en realidad, el lenguaje es insensible a las mayúsculas o minúsculas). El resto de los elementos del modelo los genera el usuario.

Las declaraciones con el prefijo ! son comentarios de usuario, y el procesador LINGO no los toma en cuenta. Las palabras clave MODEL, SETS y DATA deben terminar con dos puntos (:), mientras que sus palabras clave de cierre END, ENDSETS y ENDATA no requieren puntuación.

```
!Reddy Mikks model - hard-coded input data;

MODEL:
      TITLE Reddy mikks model;
!----------------------------algebraic definition of LP elements;
      SETS:
            Constr: Rhs;
            Var: C, X;
            ConsVar(Constr,Var): Aij;
      ENDSETS
!----------------------------construct the model;
      MAX=@SUM( Var (j): C(j)*X(j) );      !obj function;
      @FOR(                                !constraints;
           Constr(i):@SUM( Var(j) :Aij(i,j)*X(j) )<=Rhs (i)
          );
!----------------------------specify model data;
      DATA:
            Constr = M1 M2 Demand1 Demand2;
            Rhs = 24 6 1 2;
            Var = X1 X2;
            C = 5 4;
            Aij =  6 4
                   1 2
                  -1 1
                   0 1;
      ENDDATA
END
```

FIGURA 2.12

Modelo del problema de Reddy Mikks en LINGO, con datos codificados en el programa

El modelo LINGO de la figura 2.12 es autocontenido, lo que quiere decir que incluye todos los datos necesarios para que funcione el modelo. Esto puede ser incómodo, porque se pedirá al usuario que cambie el modelo cada vez que se use un nuevo conjunto de datos. Después indicaremos cómo se corrige esta situación, capturando los datos de archivos externos.

La declaración TITLE se puede usar para dar una descripción breve del modelo de programación lineal. El segmento SETS: ENDSETS del modelo proporciona nombres generados por el usuario, para los componentes básicos del modelo de programación lineal, como restricciones, variables y la matriz que se relaciona con las restricciones y las variables. Es importante definir este segmento *antes* de usarlo en el modelo. En la figura 2.12 se usaron los nombres sugerentes Constr (de *constraint*, restricción), Var y ConstrVar(Constr, Var). Naturalmente que usted puede usar los nombres que desee. Por ejemplo, serían igualmente aceptables renglón, columna y matriz(renglón, columna). Con esos nombres se asocian los símbolos (o palabras) algebraicas con que se construye el modelo y se especifican sus datos. Así, cada restricción tiene un lado derecho, que en la figura aparece como Rhs de "*right-hand side*", pero se puede aceptar cualquier nombre. El modelo lo indica en relación con el uso de la declaración

```
Constr: Rhs;
```

En forma parecida,

```
Var: C, X;
```

es para indicar que cada variable tiene un coeficiente objetivo C y un nombre raíz X, y que los dos se usarán para construir algebraicamente el modelo. Por último, la matriz que contiene todos los coeficientes del lado izquierdo de las restricciones tiene el nombre arbitrario Aij en la declaración

```
ConsVar(Constr, Var): Aij;
```

Ahora ya tenemos todos los elementos necesarios para formar algebraicamente el modelo. Si se usa el índice ficticio j para representar la variable *j* del modelo, la función objetivo se expresa en forma sugerente como

```
MAX=@SUM( Var(j) : C(j)*X(j) );
```

La declaración dice que la función objetivo es la suma de C(j)*X(j) sobre todos los elementos del conjunto Var(j). A continuación, la restricción *i* se expresa algebraicamente como

```
@SUM( Var(j) : Aij(i,j)*X(j) )<=Rhs(i)
```

Para tener en cuenta todas las restricciones definidas por el conjunto Constr(i) se emplea el siguiente bucle:

```
@FOR(Constr(i):
     @SUM( Var(j) : Aij(i,j)*X(j) )<=Rhs(i) !constraint i;
    );
```

Observe el apareamiento de los paréntesis () que limitan el inicio y el final del bucle **@FOR**.

El último segmento del modelo es para especificar los datos que activan al modelo. El conjunto Constr establece que hay un total de cuatro restricciones, de nombres M1, M2, Demand1 y Demand2. Los espacios en blanco entre los elementos sucesivos son todo lo que se

necesita para delimitar cada nombre, y en consecuencia es una cuenta de la cantidad de elementos en el conjunto. El siguiente renglón muestra que los elementos de Rhs son 24, 6, 1 y 2, que constituyen el lado derecho de las cuatro restricciones. El conjunto Var asigna los nombres (arbitrarios) X1 y X2 a las dos variables del modelo. En consecuencia, C tiene los dos elementos 5 y 4 (coeficientes de la función objetivo). Por último, Aij proporciona los parámetros del lado izquierdo de las restricciones, organizadas de acuerdo con la definición del conjunto correspondiente ConsVar(Constr, Var); esto es, un renglón tras otro. No es necesario colocar los elementos de cada restricción en un renglón aparte. Nosotros lo hicimos así para tener mayor legibilidad.

La opción predeterminada en LINGO supone que todas las variables son no negativas. Se toman en cuenta las variables no restringidas mediante el comando **@FREE**. Por ejemplo, en el ejemplo anterior la variable X(2) no tiene signo restringido, y en consecuencia debe agregarse la siguiente declaración al modelo:

```
@FREE(X(2));
```

Aunque la declaración se puede insertar en cualquier lugar del modelo (después de **ENDSETS**), se aconseja ponerla después de las restricciones principales del modelo, más que nada para tener más facilidad de lectura. Obsérvese que **@FREE** se puede usar dentro de una declaración **@FOR**.

La presentación normal de resultados del modelo se ve en la figura 2.13. La solución real se expresa por X(X1) = 3 y X(X2)= 1.5, junto con un valor objetivo de 21. La mitad inferior de los resultados contiene una lista de las variables de holgura y excedentes asociados con cada restricción (renglones 2 a 5) junto con los *precios duales* asociados. El renglón 1 contiene el valor de la función objetivo, pero no está claro por qué un *precio dual* superfluo se ha agregado a este renglón. El resto de los resultados no es más que un reenunciado de los datos del modelo. Tampoco está claro por qué LINGO especifica un *costo reducido* igual a cero para los elementos de los datos. Un espacio en blanco hubiera eliminado toda ambigüedad.

El lector no necesita usar el formato normal de resultados que se muestra en la figura 2.13. LINGO permite adaptar el informe de resultados, así como su contenido, para adaptarse a las necesidades. También observará que los resultados, en la figura 2.13, no incluyen en forma automática la exploración del análisis de sensibilidad (compárelo con el resultado de TORA). De nuevo, LINGO proporciona funciones de programación para asegurar esta información.

El poder de los paquetes como LINGO estriba en que no se necesita codificar los datos en forma permanente en el modelo, como en la figura 2.13. En lugar de ello se pueden capturar esos datos de archivos externos. La figura 2.14 muestra cómo el modelo de Reddy Mikks, en la figura 2.12, usa el paso @FILE para vincularse a los dos archivos externos ch2LingoF1Data.lng y ch2LingoF2Data.lng (LINGO especifica la extensión .lng para los archivos de texto). El contenido de los dos archivos se muestra en la figura 2.15. Hemos retenido a propósito algo de los datos codificados permanentemente en el modelo, en la figura 2.14, para mostrar que en el mismo modelo se puede usar una mezcla de dos modos de captura.

Modelado con AMPL. Usaremos el problema de Reddy Mikks para demostrar el uso de AMPL. La figura 2.16 detalla el modelo (archivo ch2AmplReddyMikks.mod). A diferencia de LINGO, AMPL sí es sensible a mayúsculas y minúsculas, y todas sus palabras y comandos reservados deben estar en minúsculas.

```
Global optimal solution found at step:          4
 Objective value:                            21.00000

 Model Title: REDDY MIKKS MODEL

                      Variable           Value        Reduced Cost
                      RHS( M1)        24.00000           0.0000000
                      RHS( M2)        6.000000           0.0000000
                 RHS( DEMAND1)        1.000000           0.0000000
                 RHS( DEMAND2)        2.000000           0.0000000
                        C( X1)        5.000000           0.0000000
                        C( X2)        4.000000           0.0000000
                        X( X1)        3.000000           0.0000000
                        X( X2)        1.500000           0.0000000
                  AIJ( M1, X1)        6.000000           0.0000000
                  AIJ( M1, X2)        4.000000           0.0000000
                  AIJ( M2, X1)        1.000000           0.0000000
                  AIJ( M2, X2)        2.000000           0.0000000
             AIJ( DEMAND1, X1)       -1.000000           0.0000000
             AIJ( DEMAND1, X2)        1.000000           0.0000000
             AIJ( DEMAND2, X1)       0.0000000           0.0000000
             AIJ( DEMAND2, X2)        1.000000           0.0000000

                           Row     Slack or Surplus      Dual Price
                             1        21.00000            1.000000
                             2       0.0000000           0.7500000
                             3       0.0000000           0.5000000
                             4        2.500000           0.0000000
                             5       0.5000000           0.0000000
```

FIGURA 2.13

Resultado del modelo de Reddy Mikks obtenido con LINGO

```
!Reddy Mikks Model - input data from external files;
MODEL:
!-----------------------------------algebraic definition of LP elements;
      SETS:
             Constr: Rhs;
             Var: C, X;
             ConsVar(Constr,Var): Aij;
      ENDSETS
!-----------------------------------construct the model;
      MAX=@SUM( Var (j) C(j)*X (j) ); !obj function;
      @FOR(constr(i):
            @SUM( Var (j) :Aij(i,j)*X (j) )<=Rhs (i) !constraint i;
          );
!-----------------------------------specify model data;
      DATA:
            Constr=@FILE(ch2LingoFldata.lng);          !read from f1.lng;
            Rhs = 24 6 1 2;
            Var = X1 X2;
            C = 5 4;
            Aij=@FILE(ch2LingoF2data.lng);             !read from f2.lng;
      ENDDATA
END
```

FIGURA 2.14

Modelo del problema de Reddy Mikks obtenido con LINGO, y usando datos de archivos externos

```
!-------contents of external file ch2LingoF1data.lng;

M1 M2 Demand1 Demand2

!-------contents of external file ch2LingoF2data.lng;

6 4 1 2 -1 1 0 1
```

FIGURA 2.15
Contenido de los archivos externos para el modelo de Reddy Mikks

El modelo se inicia con la palabra reservada set para identificar las restricciones y las variables del problema, en forma genérica, usando los nombres Constr y Var generados por el usuario (los nombres generados por el usuario, en el modelo LINGO, se vuelven a usar aquí para permitir la comparación de los dos modelos). A continuación se usa la palabra reservada param para dar nombre a los elementos de la función objetivo y las restricciones, usando nuevamente nombres generados por el usuario. Así, C define los coeficientes de la función objeti-

```
#--------------------------------------------------define sets of the model
set Constr;                                          #constraints set
set Var;                                             #variables set

#----------------------------------algebraic names of model elements
param C {Var};                               #objective coefficients
param Rhs {Constr);                          #RHS of constraints
param Aij {Constr, Var};          #LHS coeffs of constriants

#-----------------------------------------------------name the variables
var X {Var} >= 0;                           #specify nonnegativity
#-------------------------------------------------------set up the model
maximize Total: sum {j in Var} C[j] * X[j];          #objective
subject to Restrictions {i in Constr):                #constraints
      sum {j in Var} Aij[i,j]*X[j] <= Rhs[i];
#----------------------------------------------------specify model data
data;
set Constr := M1 M2 Demand1 Demand2;
set Var := X1 X2;

param Rhs :=
      M1          24
      M2          6
      Demand1     1
      Demand2     2;

param Aij:
            X1    X2 :=
M1          6     4
M2          1     2
Demand1     -1    1
Demand2     0     1;

param C := X1 5 X2 4;
```

FIGURA 2.16
Modelo de Reddy Mikks en AMPL, usando datos codificados en el programa

vo en función del conjunto Var. Rhs define el lado derecho de las restricciones en función del conjunto Constr, y Aij define los coeficientes del lado izquierdo en las restricciones, en función tanto de Constr como de Var.

Una vez definidos los segmentos set (conjunto) y param, se puede desarrollar el modelo mismo. La palabra reservada var especifica el nombre algebraico (definido por el usuario) X de las variables en el conjunto Var. El nombre X se usa principalmente para el desarrollo del modelo.

En contraste con LINGO, donde todas las variables son no negativas en la opción predeterminada, lo predeterminado en AMPL supone que todas las variables no tienen restricción en el signo. Como todas las variables en el modelo de Reddy Mikks son no negativas, el modelo especifica X{Var}>=0.

Al usar X el desarrollo del modelo es directo. Observe que la función objetivo y las restricciones se identifican con los nombres Total y Restrictions generados por el usuario. Esos nombres se necesitan para presentar los resultados del modelo.

El siguiente segmento en el modelo especifica los datos. Este segmento se explica por sí solo. Observe el uso de := para anunciar el inicio de los elementos de datos de un set (conjunto) o un param.

En AMPL, al igual que en LINGO, no necesitan estar codificados los datos en forma permanente en el modelo. En LINGO se usa @FILE (archivo) para especificar que los datos asociados están guardados en un archivo externo (véase la figura 2.14). En AMPL la situación es distinta, porque el modelo se ejecuta en ambiente DOS (no en Windows). Como tal, el segmento de datos simplemente se puede guardar en un archivo separado, al que se entra durante la ejecución. Para demostrar la ejecución del modelo AMPL en la figura 2.16, se emiten los siguientes comandos (todas las palabras reservadas están en negritas):

```
ampl: model ch2AmplReddyMikks.mod;
ampl: solve;
```

También se pueden guardar los datos en un archivo separado. Imagine que el segmento de datos se quita del modelo y se guarda en un archivo llamado ch2AmplReddyMikks.dat. En este caso se usan los siguientes comandos de DOS:

```
ampl: model ch2AmplReddyMikks.mod;
ampl: data ch2AmplReddyMikks.dat;
ampl: solve;
```

Los resultados (así como los datos) del modelo se pueden asegurar usando el comando display (mostrar). Por ejemplo, veamos los siguientes comandos [que siguen al comando solve (resolver)]:

```
ampl: display Total;
ampl: display X, rc;
ampl: display Restrictions;
ampl: display Aij, Rhs;
```

El primer comando muestra el valor de la función objetivo Total. El segundo muestra los valores de las variables X y de sus costos reducidos rc (rc es un símbolo reservado). El tercer comando muestra los valores duales asociados con cada restricción. El comando 4 sólo muestra

los datos Aij y Rhs asociados con las restricciones. Se debe tener en cuenta algo importante al ejecutar AMPL: como ese programa es sensible a mayúsculas o minúsculas, todos los nombres generados por el usuario deben copiarse en los comandos en la forma exacta en que aparecen en el modelo. Esta limitación (innecesaria) es bastante incómoda, en especial en modelos con una gran cantidad de nombres generados por el usuario.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4A

1. En la figura 2.17 se ven los resultados del modelo problema de la dieta del ejemplo 2.2-2.

a) Interprete el precio dual de la primera restricción.

b) Si los requisitos mínimos diarios de alimento aumentan a 900, determine el costo total del alimento.

c) Suponga que aumenta el costo del maíz (corn) a $0.40 por libra, mientras que el de la soya (soybeans) permanece igual. Determine la solución óptima asociada.

2. El modelo de programación lineal del problema 7, en el conjunto de problemas 2.3a, es

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 9x_2$$

```
                  LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY
-----------------------------------------------------------------------------
Title: Example 2.2-2, Diet Model
Final Iteration No.:  6
Objective Value (Min) = 437.65
-----------------------------------------------------------------------------
Variable                 Value   Obj Coeff  Obj Val Contrib
-----------------------------------------------------------------------------
x1: Corn                470.59        0.30           141.18
x2: Soybean             329.41        0.90           296.47
-----------------------------------------------------------------------------
Constraint                 RHS  Slack-/Surplus+
-----------------------------------------------------------------------------
1 (>)                   800.00            0.00
2 (<)                     0.00            0.00
3 (>)                     0.00          10.82+
-----------------------------------------------------------------------------
                           ***Sensitivity Analysis***
-----------------------------------------------------------------------------
Variable           CurrObjCoeff   MinObjCoeff  MaxObjCoeff  Reduced Cost
-----------------------------------------------------------------------------
x1: Corn                   0.30         -0.63         0.90          0.00
x2: Soybean                0.90          0.30     infinity          0.00
-----------------------------------------------------------------------------
Constraint             Curr RHS      Min RHS    Max RHS  Dual Price
-----------------------------------------------------------------------------
1 (>)                   800.00         0.00   infinity        0.55
2 (<)                     0.00      -138.00     168.00       -1.18
3 (>)                     0.00    -infinity      10.82        0.00
-----------------------------------------------------------------------------
```

FIGURA 2.17

Resultado del modelo de la dieta obtenido con TORA

subjeta a

$$24x_1 + 8x_2 \le 60{,}000$$

$$x_1 \le 2000, x_2 \le 6000$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Las variables x_1 y x_2 representan la cantidad de cajas de jugo y de puré (paste) que produce la empresa. La solución del modelo se ve en la figura 2.18.

a) Si la empresa desea comprar más tomates para aumentar la producción, ¿cuál sería lo máximo que podría pagar por libra?

b) ¿Es de interés para la empresa aumentar su parte del mercado del jugo (juice)? ¿Del puré? Use los precios duales para explicar su respuesta.

c) Si la empresa reduce la cantidad contratada de tomates a 50,000 lb, use los precios duales para determinar la nueva utilidad.

3. Resuelva el problema dietético del ejemplo 2.2-2 con

a) Solver de Excel

b) LINGO

c) AMPL

```
                    LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY
-----------------------------------------------------------------------------
Title: Problem 2, Set 2.4a
Final Iteration No.:  4
Objective Value (Max) = 63000.00
-----------------------------------------------------------------------------
Variable                 Value   Obj Coeff  Obj Val Contrib
-----------------------------------------------------------------------------
x1: Juice               500.00       18.00          9000.00
x2: Paste              6000.00        9.00         54000.00
-----------------------------------------------------------------------------
Constraint                 RHS  Slack-/Surplus+
-----------------------------------------------------------------------------
1 (<)                 60000.00            0.00
2 (<)                  2000.00    1500.00-
3 (<)                  6000.00            0.00
-----------------------------------------------------------------------------
                         ***Sensitivity Analysis***
-----------------------------------------------------------------------------
Variable            CurrObjCoeff   MinObjCoeff   MaxObjCoeff  Reduced Cost
-----------------------------------------------------------------------------
x1: Juice                  18.00          0.00         27.00          0.00
x2: Paste                   9.00          6.00      infinity          0.00
-----------------------------------------------------------------------------
Constraint               Curr RHS      Min RHS      Max RHS  Dual Price
-----------------------------------------------------------------------------
1 (<)                   60000.00     48000.00     96000.00        0.75
2 (<)                    2000.00       500.00     infinity        0.00
3 (<)                    6000.00      1500.00      7500.00        3.00
-----------------------------------------------------------------------------
```

FIGURA 2.18

Resultado del problema 2, conjunto de problemas 2.4a, obtenido con TORA

2.5 ANÁLISIS DE MODELOS SELECCIONADOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

En esta sección se presentan modelos de programas lineales más realistas, en los que la definición de las variables y la construcción de la función objetivo y las restricciones no son tan directas como en el caso del modelo con dos variables (Sección 2.1). Además, los resultados de TORA para cada modelo, parecidos a los que se presentaron en la sección 2.4.1, permitirán interpretar detenidamente los resultados. Estas interpretaciones se basan en resultados parecidos a los que se obtienen en paquetes comerciales, como LINGO y AMPL.

Ejemplo 2.5-1 (Política bancaria de préstamos)

Banco Gane está desarrollando una política de préstamos por un máximo de $12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes acerca de los distintos tipos de préstamo.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deuda impagable
Personal	0.140	0.10
Automóvil	0.130	0.07
Casa	0.120	0.03
Agrícola	0.125	0.05
Comercial	0.100	0.02

Las deudas impagables no se recuperan y no producen ingresos por intereses.

Para competir con otras instituciones financieras se necesita que el banco asigne un mínimo de 40% de los fondos a préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de su región, los préstamos familiares deben ser iguales, cuando menos, al 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa. También el banco tiene una política explícita que no permite que la relación general de préstamos impagables entre todos los préstamos sea mayor que 4 por ciento.

Representación matemática. Se busca determinar la cantidad de préstamo en cada categoría, y en consecuencia se llega a las siguientes definiciones de las variables (en millones de dólares):

x_1 = préstamos personales

x_2 = préstamos para automóvil

x_3 = préstamos para casa

x_4 = préstamos agrícolas

x_5 = préstamos comerciales

El objetivo de Banco Gane es maximizar su retorno neto, que es la diferencia entre el retorno por intereses y los préstamos impagables. Con base en el hecho que las deudas impagables no se pueden recuperar, tanto el principal como el interés, la función objetivo será la siguiente:

$$\text{Maximizar } z = 0.14(0.9x_1) + 0.13(0.93x_2) + 0.12(0.97x_3) + 0.125(0.95x_4)$$
$$+0.1(0.98x_5) - 0.1x_1 - 0.07x_2 - 0.03x_3 - 0.05x_4 - 0.02x_5$$

Esta función se simplifica y resulta

$$\text{Maximizar } z = 0.026x_1 + 0.0509x_2 + 0.0864x_3 + 0.06875x_4 + 0.078x_5$$

El problema tiene cinco restricciones:

1. *Fondos totales*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

2. *Préstamos agrícolas y comerciales*

$$x_4 + x_5 \geq 0.4 \times 12$$

o sea

$$x_4 + x_5 \geq 4.8$$

3. *Préstamos para casa*

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

o sea

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$$

4. *Límite de deudas impagables*

$$\frac{0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 0.04$$

o sea

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$$

5. *No negatividad*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Una hipótesis sutil en la formulación anterior es que todos los préstamos se otorgan aproximadamente al mismo tiempo. Esta hipótesis nos permite ignorar las diferencias en el tiempo del valor de los fondos asignados a los diversos préstamos.

En la figura 2.19 se ven los resultados del modelo de política bancaria.[3] Sólo recomienda hacer préstamos comerciales y para casa. Los préstamos personales son los menos atractivos, no sólo por tener el coeficiente objetivo mínimo (= 0.026), sino también porque su costo reducido es el máximo entre todas las variables (= 0.0604). Esto quiere decir (véase la sección 2.4.1) que se debe aumentar la rentabilidad (ingresos por intereses – préstamos impagables) de los préstamos personales x_1, en 0.0604 para que la transacción apenas sea rentable.

Al revisar los precios duales, la primera restricción muestra que un aumento de 1 (millón) de dólares en los fondos asignados aumenta el retorno neto de todos los préstamos en 0.0864 (millón) de dólares. Esto equivale a un retorno anual de 8.64% sobre la inversión. Como el intervalo asociado de factibilidad es $(4.8, \infty)$, este retorno está garantizado para cualquier aumento respecto al nivel actual de financiamiento de $12 millones. Sin embargo, un retorno de 8.64% parece bastante bajo, en vista de que la tasa mínima de interés que cobra el banco es 10%. La diferencia se atribuye a las deudas impagables, que no se pueden recuperar, ni en su principal ni en intereses. En realidad, el coeficiente máximo objetivo en el modelo es 0.0864 (préstamos de casa). Es interesante que ese coeficiente sea igual al precio dual de la

[3]Todos los modelos con formato TORA en esta sección se pueden ver en el CD que acompaña a este libro, en el directorio ToraFiles.

LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY

Title: Example 2.5-1, Bank Loan Model
Final Iteration No.: 7
Objective Value (Max) = 0.9965

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1: personal	0.0000	0.0260	0.0000
x2: car	0.0000	0.0509	0.0000
x3: home	7.2000	0.0864	0.6221
x4: farm	0.0000	0.0687	0.0000
x5: comm'l	4.8000	0.0780	0.3744

Constraint	RHS	Slack-/Surplus+
1 (<)	12.0000	0.0000
2 (>)	4.8000	0.0000
3 (<)	0.0000	3.6000-
4 (<)	0.0000	0.1680-

Sensitivity Analysis

Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1: personal	0.0260	-infinity	0.0864	0.0604
x2: car	0.0509	-infinity	0.0864	0.0355
x3: home	0.0864	0.0780	infinity	0.0000
x4: farm	0.0687	-infinity	0.0780	0.0093
x5: comm'l	0.0780	0.0687	0.0864	0.0000

Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1 (<)	12.0000	4.8000	infinity	0.0864
2 (>)	4.8000	0.0000	12.0000	-0.0084
3 (<)	0.0000	-3.6000	infinity	0.0000
4 (<)	0.0000	-0.1680	infinity	0.0000

FIGURA 2.19

Resultado del modelo del Banco Gane, obtenido con TORA

restricción 1 (fondos asignados), y lleva a la conclusión que la solución óptima asignará cualquier fondo adicional a préstamos de casa.

La restricción 2 establece el límite mínimo de la suma de préstamos agrícolas y comerciales. El precio dual negativo (= –0.0084) muestra que un aumento en ese límite afectará en forma adversa al retorno neto. En otras palabras, no hay ventaja económica por establecer un límite mínimo sobre la cantidad de préstamos agrícolas y comerciales. Esta observación coincide con la interpretación de la primera restricción, que estipula que todos los fondos nuevos se deben asignar a préstamos de casa, y no a préstamos agrícolas y comerciales. De hecho, si quitamos el requisito del límite mínimo para préstamos agrícolas y comerciales, todos los fondos se asignarían a préstamos para casa [compruebe esta conclusión con la opción MODIFY (modificar) de TORA].

Ejemplo 2.5-2 (Uso y desarrollo de bienes raíces)

Desarrollos Alfa posee 800 acres* de terreno en un lago escénico en el corazón de una sierra. Antes se aplicaban pocos o ningún reglamento a los nuevos desarrollos en torno al lago. Las orillas del mismo están hoy pobladas con casas de campo, y debido a la carencia de servicios de alcantarillado, hay muchas fosas sépticas, en su mayor parte mal instaladas. A través de los años, las filtraciones de las fosas sépticas ha ocasionado un grave problema de contaminación de agua.

Para mitigar el degradamiento de la calidad del agua, las autoridades municipales aprobaron reglamentos estrictos para todos los desarrollos en el futuro.

1. Sólo se pueden construir casas para una, dos y tres familias, y las casas unifamiliares deben ser al menos el 50% del total.
2. Para limitar la cantidad de fosas sépticas, se requieren tamaños mínimos de lote de 2, 3 y 4 acres para las casas con una, dos y tres familias, respectivamente.
3. Se deben establecer áreas de recreo de 1 acre cada una, en una proporción de una por 200 familias.
4. Para preservar la ecología del lago, no se debe bombear agua subterránea para uso doméstico ni de riego.

El presidente de Desarrollos Alfa estudia la posibilidad de desarrollar los 800 acres de la empresa. El nuevo desarrollo incluirá casas para una, dos y tres familias. Se estima que el 15% de los acres se debe asignar a calles y servicios comunitarios. Alfa estima que los ingresos por las diversas unidades de habitación serán

Unidades de habitación	Una	Dos	Tres
Rendimiento neto por unidad ($)	10,000	12,000	15,000

El costo de conectar el servicio del agua al área es proporcional a la cantidad de unidades construidas. Sin embargo, el municipio cobra un mínimo de $100,000 por el proyecto. Además, el aumento de la capacidad actual del sistema de abastecimiento de agua se limita a 200,000 galones por día, durante las temporadas pico. Los datos siguientes resumen el costo de conectar el servicio del agua, y también el consumo de agua, suponiendo familias de tamaño promedio:

Unidades de habitación	Una	Dos	Tres	Parques y jardines
Costo del servicio del agua por unidad ($)	1000	1200	1400	800
Consumo de agua por unidad (gal/día)	400	600	840	450

Representación matemática. La empresa debe decidir la cantidad de unidades de cada tipo de vivienda que va a construir, y también la cantidad de áreas de recreo que satisfaga el reglamento municipal. Se definen

x_1 = cantidad de casas unifamiliares

x_2 = cantidad de casas para dos familias

*N. del R.T.: 1 acre = 0.4046 hectárea o 1 acre= 4046 m^2.

x_3 = cantidad de casas para tres familias

x_4 = cantidad de áreas de recreo

El objetivo de la empresa es maximizar el rendimiento total, esto es

$$\text{Maximizar } z = 10{,}000x_1 + 12{,}000x_2 + 15{,}000x_3$$

Las restricciones del problema son:

1. Límite de uso de terreno.
2. Límite de cantidad de casas unifamiliares en relación con los demás tipos.
3. Límite de las áreas de recreo.
4. Costo del capital para el servicio de agua.
5. Límite del consumo diario de agua en temporadas pico.

Estas restricciones se expresan matemáticamente como sigue:

1. *Uso del terreno*

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 680\,(= 0.85 \times 800)$$

2. *Casas unifamiliares*

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 0.5$$

o sea

$$0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 \geq 0$$

3. *Áreas de recreo*

$$x_4 \geq \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{200}$$

o sea

$$200x_4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 0$$

4. *Costo del capital para el servicio de agua*

$$1000x_1 + 1200x_2 + 1400x_3 + 800x_4 \geq 100{,}000$$

5. *Consumo de agua*

$$400x_1 + 600x_2 + 840x_3 + 450x_4 \leq 200{,}000$$

6. *No negatividad*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

En formulación de modelos se aconseja poner atención al impacto del error de redondeo. En este modelo, los coeficientes de las restricciones 4 y 5 (costo del capital y consumo de agua) son comparativamente mucho mayores que la mayor parte de los coeficientes de las restricciones restantes. Esta situación puede conducir a un error de redondeo inconveniente, por parte de la máquina, causado por manipular coeficientes relativamente grandes y relativa-

mente pequeños. En este ejemplo se puede rectificar este problema potencial reduciendo proporcionalmente, en 1000, todos los coeficientes de las restricciones 4 y 5; entonces queda

$$x_1 + 1.2x_2 + \ \ 1.4x_3 + 0.8x_4 \ \ \geq 100$$

$$0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.84x_3 + 0.54x_4 \leq 200$$

En cómputo tampoco se desea manejar coeficientes de restricción muy pequeños. En esos casos se aconseja aumentar proporcionalmente todos los coeficientes pequeños, para tener cierta consistencia en la formulación del modelo.

En la figura 2.20 se muestra la solución óptima del modelo. Observe que la programación lineal no produce soluciones enteras, en general. En esta solución resultan x_1 (unifamiliar) = 339.15 y x_4 (recreo) = 1.70, y x_2 (dos) = 0 y x_3 (tres) = 0. Esta solución se puede redondear a $x_1 = 339$ y $x_4 = 2$ (que por cierto también es la solución entera óptima).

La solución óptima no recomienda construir casas para dos y tres familias, a pesar de que su rendimiento por unidad ($12,000 y $15,000) es mayor, en términos absolutos, que para una casa unifamiliar ($10,000). Este resultado indica que el rendimiento por unidad que se da en la función objetivo no es una medida directa de la rentabilidad de una actividad. Además se debe tener en cuenta el costo de los recursos que usa la actividad. En realidad, es lo que logró el *costo reducido* (véase la sección 2.4.1). Los costos reducidos actuales de $3012.47 y $5024.94 dan el exceso de costo de los recursos consumidos por unidad, respecto al retorno por unidad, en casas para dos y tres familias, respectivamente. Para que esas actividades *apenas* sean rentables, se debe reducir el costo por unidad de los recursos, o aumentar el retorno por unidad, en una cantidad igual al costo reducido.

Las restricciones 2, 4 y 5 tienen valores positivos de holgura o excedente, y eso indica que sus recursos son “abundantes”. En consecuencia, sus *precios duales* (valor por unidad) son cero. La restricción 1 representa el terreno disponible, y tiene un valor dual de $4987.53; eso indica que un aumento de 1 acre vale $4987.53 en rendimiento neto. Esta información podría ser valiosa para decidir la compra de más terreno, ya que cualquier precio mayor que $4987.53 por acre sería una proposición desfavorable.

La restricción 3 tiene un precio dual de –$24.94 (en realidad – $24.9377), y como es negativa, todo aumento de su “recurso” afectará negativamente el ingreso total. Pero ¿por qué? Sólo se puede contestar a eso si se conoce cuáles son las unidades del “recurso” de esa restricción. Examinemos de nuevo la restricción:

$$200 \times \text{Recreo} - \text{Unif.} - 2 \times \text{Doble} - 3 \times \text{Triple} \geq 0$$

Esta restricción especifica la cantidad mínima de áreas de recreo en relación con la cantidad de casas. Tal como está la restricción, las unidades de su lado izquierdo están mezcladas. Sin embargo, si se divide entre 200 toda la restricción se obtiene

$$\text{Recreo} - (0.005 \times \text{Unif.} + 0.01 \times \text{Doble} + 0.015 \times \text{Triple}) \geq 0$$

Como la variable Recreo representa la cantidad de áreas de recreo, y cada área de recreo ocupa 1 acre, las unidades de Recreo y las de la expresión entre paréntesis deben ser acres. Así, un aumento de 1 unidad en el lado derecho, es decir, un aumento de 0 a 1) se puede interpretar como un aumento de 1 acre para recreo. Con la restricción modificada se puede decir que el precio dual representa el valor por aumento de un acre en área para recreo. Sin embargo, con la nueva restricción, el precio dual debe ser 200 × (–$24.9377) = –$4987.54, porque se determinó dividiendo la restricción original entre 200. (En realidad, si se modifica la restricción como se indica, y se vuelve a ejecutar el modelo, TORA mostrará en forma directa el nuevo valor dual; ¡haga la prueba!)

LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY

Title: Example 2.5-2, Land Use Model
Final Iteration No.: 8
Objective Value (Max) = 3391521.1970

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1: single	339.1521	10000.0000	3391521.1970
x2: double	0.0000	12000.0000	0.0000
x3: triple	0.0000	15000.0000	0.0000
x4: recreation	1.6958	0.0000	0.0000

Constraint	RHS	Slack-/Surplus+
1 (<)	680.0000	0.0000
2 (>)	0.0000	169.5761+
3 (>)	0.0000	0.0000
4 (>)	100.0000	240.5087+
5 (<)	200.0000	63.5761-

Sensitivity Analysis

Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1: single	10000.0000	7993.3555	infinity	0.0000
x2: double	12000.0000	-infinity	15012.4688	3012.4688
x3: triple	15000.0000	-infinity	20024.9377	5024.9377
x4: recreation	0.0000	-2000000.0000	5000.0000	0.0000

Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1 (<)	680.0000	199.7012	996.8925	4987.5312
2 (>)	0.0000	-infinity	169.5761	0.0000
3 (>)	0.0000	-340.0000	50988.0000	-24.9377
4 (>)	100.0000	-infinity	340.5087	0.0000
5 (<)	200.0000	136.4239	infinity	0.0000

FIGURA 2.20

Resultado del modelo de uso de terreno, obtenido con TORA

Ahora, el nuevo precio dual indica que un aumento de un acre en área de recreo reducirá la utilidad en \$4987.54, lo cual, si se omite la diferencia de \$0.01 por error de redondeo, es exactamente igual al precio dual del recurso uso de suelo (restricción 1), pero con signo contrario. Este resultado tiene sentido desde el punto de vista económico, porque un acre que se asigna al recreo es un acre que se retira de la construcción de casas. Así, no es coincidencia la igualdad de los dos precios duales.

Ejemplo 2.5-3 Problema de programación (horarios de autobuses)

La ciudad de Progreso estudia la factibilidad de un sistema de autobuses para transportación masiva que reduzca el transporte urbano en coche y en consecuencia alivie el problema del

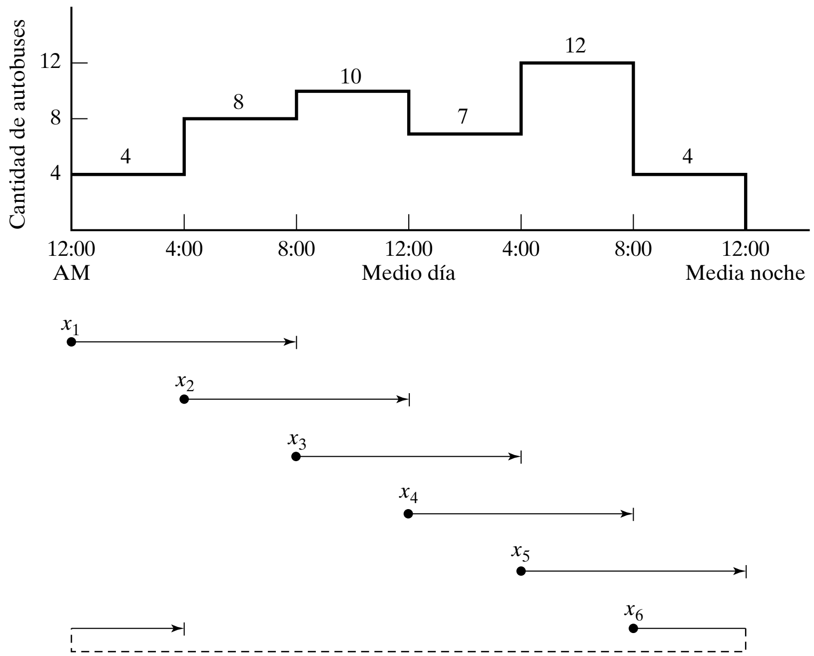


FIGURA 2.21

Cantidad de autobuses en función de la hora del día

esmog. El estudio busca determinar la cantidad mínima de autobuses que satisfaga las necesidades de transporte. Después de reunir la información necesaria, el ingeniero de tránsito observa que la cantidad mínima de autobuses varía con la hora del día, y que la cantidad necesaria de vehículos se puede aproximar con valores constantes durante intervalos consecutivos de 4 horas. La figura 2.21 resume las determinaciones del ingeniero. Para hacer el mantenimiento diario a cada autobús, éste puede trabajar 8 horas sucesivas diariamente.

Representación matemática. Determinar la cantidad de autobuses en funcionamiento durante cada turno (variables) que satisfaga la demanda mínima (restricciones) y minimice al mismo tiempo la cantidad de autobuses en operación (objetivo).

El lector habrá notado ya que la definición de las variables es ambigua. Sabemos que cada autobús debe trabajar durante 8 horas, pero no sabemos cuándo debe comenzar un turno. Si seguimos un horario normal de tres turnos (8:01 A.M. a 4:00 P.M., 4:01 P.M. a 12:00 media noche, y 12:01 A.M. a 8:00 A.M.) y suponemos que x_1, x_2 y x_3 sean las cantidades de autobuses que inician en el primero, segundo y tercer turno, podremos ver, en la parte superior de la figura 2.21, que $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 12$ y $x_3 \geq 8$. La cantidad mínima correspondiente de autobuses diarios es $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 12 + 8 = 30$.

Esta solución sólo es aceptable si los turnos *deben* coincidir con el horario normal de tres turnos. Sin embargo, sería mejor dejar que el proceso de optimización elija la "mejor" hora de inicio de un turno. Una forma razonable de hacerlo es dejar que un turno pueda comenzar cada 4 horas. La parte inferior de la figura 2.21 ilustra este concepto, y se ven turnos traslapados

que pueden comenzar a las 12:01 A.M., 4:01 A.M., 8:01 A.M., 12:01 P.M., 4:01 P.M. y 8:01 P.M.; cada turno abarca 8 horas consecutivas. Entonces se pueden definir las variables como sigue:

x_1 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 A.M.

x_2 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 A.M.

x_3 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 A.M.

x_4 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 P.M.

x_5 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 P.M.

x_6 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 P.M.

El modelo matemático se escribe en la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

sujeta a

$$x_1 + x_6 \geq 4 \, (\text{12:01 A.M.} - \text{4:00 A.M.})$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 \, (\text{4:01 A.M.} - \text{8:00 A.M.})$$

$$x_2 + x_3 \geq 10 \, (\text{8:01 A.M.} - \text{12:00 medio día})$$

$$x_3 + x_4 \geq 7 \, (\text{12:01 P.M.} - \text{4:00 P.M.})$$

$$x_4 + x_5 \geq 12 \, (\text{4:01 P.M.} - \text{8:00 P.M.})$$

$$x_5 + x_6 \geq 4 \, (\text{8:01 P.M.} - \text{12:00 P.M.})$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, 6$$

El resultado que muestra la figura 2.22 indica que se necesitan 26 autobuses para satisfacer la demanda. El horario óptimo indica $x_1 = 4$ autobuses que comienzan a las 12:01 A.M., $x_2 = 10$ a las 4:01 A.M., $x_4 = 8$ a las 12:01 P.M. y x_5 a las 4:01 P.M. Todos los costos reducidos son cero, lo cual indica que el problema tiene soluciones óptimas alternativas.

Los precios duales proporcionan información interesante. Un precio dual igual a cero quiere decir que un aumento en el requisito mínimo del periodo correspondiente no afectará la cantidad total de autobuses en operación. Si el precio dual es 1, un aumento de una unidad en la cantidad mínima de autobuses en determinado periodo hará aumentar la cantidad total de autobuses en operación en 1. Sin embargo, esos cambios se limitan por los intervalos especificados en la figura 2.22. Por ejemplo, el requisito mínimo para el periodo 2 (restricción 2) puede aumentar de 8 a 14, sin requerir un aumento en la cantidad total de autobuses en operación. Pero un aumento en la cantidad de autobuses para el periodo 3 dará como resultado un aumento igual en la cantidad en operación.

En este ejemplo podrá ser que no tenga sentido un análisis de sensibilidad de la función objetivo, porque la naturaleza del modelo requiere que esos coeficientes siempre sean iguales a 1. Si se reestructura la función objetivo para que refleje otras medidas (por ejemplo, minimizar el costo de operación de los autobuses), la situación será diferente, y tendría sentido hacer el análisis de sensibilidad para esos coeficientes.

LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY

Title: Example 2.5-3, Bus Scheduling Model
Final Iteration No.: 10
Objective Value (Min) = 26.

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1: 12:01AM	4.	1.	4.
x2: 4:00AM	10.	1.	10.
x3: 8:00AM	0.	1.	0.
x4: 12:01PM	8.	1.	8.
x5: 4:00PM	4.	1.	4.
x6: 8:00PM	0.	1.	0.

Constraint	RHS	Slack-/Surplus+
1 (>)	4.	0.
2 (>)	8.	6.+
3 (>)	10.	0.
4 (>)	7.	1.+
5 (>)	12.	0.
6 (>)	4.	0.

Sensitivity Analysis

Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1: 12:01AM	1.	0.	1.	0.
x2: 4:00AM	1.	0.	1.	0.
x3: 8:00AM	1.	1.	infinity	0.
x4: 12:01PM	1.	1.	1.	0.
x5: 4:00PM	1.	1.	1.	0.
x6: 8:00PM	1.	1.	infinity	0.

Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1 (>)	4.	0.	infinity	1.
2 (>)	8.	–infinity	14.	0.
3 (>)	10.	4.	infinity	1.
4 (>)	7.	–infinity	8.	0.
5 (>)	12.	11.	infinity	1.
6 (>)	4.	0.	5.	0.

FIGURA 2.22

Resultado del modelo de programación de autobuses, obtenido con TORA

Ejemplo 2.5-4 (Corte de rollos de papel-desperdicio por corte)

La Papelera Moderna produce rollos de papel (rollos de ancho estándar; son tal como salen de la máquina de papel) de 20 pies de ancho normal útil, cada uno. Se atienden los pedidos de los clientes, con anchos distintos, cortando los rollos de ancho estándar. Los pedidos normales, que pueden variar de un día al siguiente, se resumen en la tabla siguiente:

Pedido	Ancho deseado (pies)	Cantidad deseada de rollos
1	5	150
2	7	200
3	9	300

En la práctica se surte un pedido ajustando las cuchillas a los anchos deseados. En general hay varias maneras de cortar un rollo de ancho estándar para surtir determinado pedido. La figura 2.23 muestra tres posiciones factibles de cuchillas para el rollo de 20 pies. Aunque hay otras posiciones factibles, limitaremos por el momento la descripción a considerar las posiciones 1, 2 y 3 de la figura 2.23. Se pueden combinar las posiciones dadas en varias formas, para surtir los pedidos con 5, 7 y 9 pies de ancho. A continuación vemos algunos ejemplos de combinaciones factibles:

1. Cortar 300 (rollos de ancho estándar) con la posición 1 y 75 rollos con la posición 2.
2. Cortar 200 rollos con la posición 1 y 100 rollos con la posición 3.

¿Cuál combinación es la mejor? Esta pregunta se puede contestar teniendo en cuenta la "merma" (el desperdicio) que produce cada combinación. En la figura 2.23, la parte sombreada representa el sobrante del rollo, sin ancho suficiente para surtir los pedidos requeridos. Esos sobrantes se llaman *pérdida de recorte*. Se puede evaluar la "bondad" de cada combinación calculando sus pérdidas de recorte. Sin embargo, como los sobrantes pueden tener anchos distintos, la evaluación se debe basar en el *área* de pérdida por recorte, más que en la *cantidad* de sobrantes. Suponiendo que cada rollo de ancho estándar tiene L pies de longitud, se puede calcular como sigue el área de pérdida por recorte:

$$\text{Combinación 1: } 300(4 \times L) + 75(3 \times L) = 1425L \text{ pies}^2$$

$$\text{Combinación 2: } 200(4 \times L) + 100(1 \times L) = 900L \text{ pies}^2$$

Esas áreas sólo corresponden a las partes sombreadas en la figura 2.23. Toda producción sobrante de los rollos de 5, 7 y 9 pies también se debe tener en cuenta en el cálculo del área de pérdida por recorte. En la combinación 1, la posición 1 produce un sobrante de 300 – 200 = 100 sobrantes de 7 pies, y la combinación 2 produce 75 rollos sobrantes de 7 pies. Así, el área de "merma" adicional es $175(7 \times L) = 1225L$ pies^2. La combinación 2 no produce sobrantes

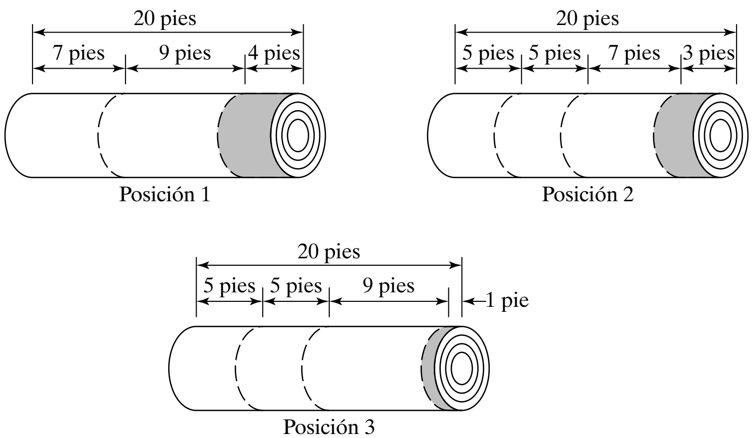


FIGURA 2.23
Pérdida por recortes (sombreada) para las posiciones de cuchillas 1, 2 y 3

de 7 y 9 pies, pero la posición 3 sí produce 200 – 150 = 50 sobrantes de 5 pies, con un área de recorte agregada de $50(5 \times L) = 250L$ pies^2. En consecuencia, se tiene que:

$$\text{Área total de pérdida de recorte para la combinación 1} = 1425L + 1225L = 2650L \text{ pies}^2$$

$$\text{Área total de pérdida de recorte para la combinación 2} = 900L + 250L = 1150L \text{ pies}^2$$

La combinación 2 es mejor, porque produce menos área de pérdida de recorte.

Para llegar a la solución óptima es necesario determinar todos las posiciones de cuchilla posibles, para entonces generar *todas* las combinaciones factibles. Aunque puede no ser muy difícil la determinación de todos las posiciones, también podría suceder que no sea tan fácil generar todas las combinaciones factibles. Es evidente entonces la necesidad de un método sistemático. Es lo que se logra con el modelo de programación lineal.

Representación matemática. Determinar las *posiciones de cuchillas* (variables) que *surtan los pedidos requeridos* (restricciones) con el *área mínima de pérdida de recorte* (objetivo).

La definición de las variables tal como se presentan se debe traducir en forma que las pueda usar el operador de una fábrica. En forma específica, las variables se definen como *cantidad de rollos de ancho estándar a cortar con determinadas posiciones de cuchillas*. Para esta definición se requiere identificar todos las posiciones de cuchillas posibles, como se ven en la siguiente tabla. Las posiciones 1, 2 y 3 se ven en la figura 2.23. El lector se debe convencer que las posiciones 4, 5 y 6 son válidas y que no se ha omitido alguna posición "prometedora". Recuerde que una posición prometedora no puede producir un rollo de desperdicio por recorte de 5 pies de ancho o mayor.

	Posiciones de cuchillas						*Cantidad mínima de rollos*
Ancho requerido (pies)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
5	0	2	2	4	1	0	150
7	1	1	0	0	2	0	200
9	1	0	1	0	0	2	300
Pérdida de recorte por pie de long.	4	3	1	0	1	2	

Para expresar matemáticamente el modelo, se definirán las variables como sigue:

x_j = cantidad de rollos de ancho estándar que se van a cortar de acuerdo con la posición j, $j = 1, 2, .. 6$.

Las restricciones del modelo tienen que ver en forma directa con surtir la demanda de los rollos.

$$\begin{aligned}
\text{Cantidad producida de rollos de 5 pies} &= 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 150 \\
\text{Cantidad producida de rollos de 7 pies} &= x_1 + x_2 + 2x_5 \geq 200 \\
\text{Cantidad producida de rollos de 9 pies} &= x_1 + x_3 + 2x_6 \geq 300
\end{aligned}$$

Para formar la función objetivo se observa que el área total de pérdida por recorte es la diferencia entre el área total de los rollos de ancho estándar que se usan, y el área total que representan todos los pedidos. Entonces

$$\text{Área total de los rollos de ancho estándar} = 20L(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

$$\text{Área total de los pedidos} = L(150 \times 5 + 200 \times 7 + 300 \times 9) = 4850L$$

Entonces, la función objetivo es

$$\text{Minimizar } z = 20L(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 4850L$$

Como la longitud L del rollo de ancho estándar es constante, la función objetivo se reduce, de hecho, a minimizar la cantidad total de rollos de ancho estándar que se usan para surtir los pedidos; esto es

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Entonces, el modelo general se puede plantear como sigue:

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \quad &\geq 150 \text{ (rollos de 5 pies)} \\
x_1 + x_2 + 2x_5 \quad &\geq 200 \text{ (rollos de 7 pies)} \\
x_1 + x_3 + 2x_6 &\geq 300 \text{ (rollos de 9 pies)} \\
x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6&
\end{aligned}$$

La solución óptima (el problema tiene óptimos alternativos) del modelo, que muestra la figura 2.24, especifica cortar 12.5 rollos de ancho estándar según la posición 4, 100 con la posición 5 y 150 según la posición 6. La solución no se puede implementar, porque x_4 no es entero. Para resolver el problema se puede usar un algoritmo entero (véase el capítulo 9) o bien redondear x_4 del lado del la seguridad, a 13 rollos.

En vista del requisito que las variables sean enteras, la solución se interpreta en una forma algo distinta. Por ejemplo, el precio dual de 0.25 correspondiente a la restricción 1 significa que un aumento de 1 rollo en la demanda de rollos de 5 pies requerirá cortar una cuarta parte adicional de un rollo de ancho estándar de 20 pies. Esta recomendación no es práctica. En lugar de ello se puede recomendar cortar un rollo más de 20 pies por cada cuatro rollos adicionales de 5 pies. Esta recomendación es válida mientras se esté dentro del intervalo $[100, \infty]$ especificado por la exploración del lado derecho. A los restantes precios duales se aplica un análisis parecido.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.5A

1. Acerca del modelo del Banco Gane del ejemplo 2.5-1, y su solución en la figura 2.19.
   - **a)** En los resultados de análisis de sensibilidad explique por qué el valor mínimo permitido para el lado derecho de la primera restricción es igual a \$4.8 millones. Por lo mismo, explique por qué el valor máximo del lado derecho de la segunda restricción es igual a 12.
   - **b)** Suponga que el banco asigne todos los \$12 millones a préstamos agrícolas y comerciales. Calcule el rendimiento neto para el banco.
   - **c)** En los resultados se ve que el ingreso neto (óptimo) por intereses de todos los préstamos es de 0.9965 millón de dólares, lo que se traduce en un interés promedio de $\frac{0.9965}{12} = 0.083$. Esta cantidad es menor que el precio dual (valor por unidad) de la primera restricción ($= 0.0864$). Reconcilie la diferencia entre los dos valores.
2. En el ejemplo 2.5-2, de uso de terreno, suponga que Alfa puede comprar otros 100 acres de terreno virgen, en \$450,000. Use los resultados del modelo, en la figura 2.20, para evaluar la decisión de esta compañía.
3. Acerca del modelo de programación (horarios de autobús), en el ejemplo 2.5-3, use los resultados de la figura 2.22 para determinar la cantidad óptima de autobuses, suponiendo que la cantidad mínima de autobuses durante los 6 periodos sucesivos es i) (4, 12, 10, 7, 12, 4) y ii) (4, 8, 7, 7, 12, 4).

LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY

Title: Example 2.5-4, Trim Loss Model
Final Iteration No.: 7
Objective Value (Min) = 262.500

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1: setting1	0.000	1.000	0.000
x2: setting2	0.000	1.000	0.000
x3: setting3	0.000	1.000	0.000
x4: setting4	12.500	1.000	12.500
x5: setting5	100.000	1.000	100.000
x6: setting6	150.000	1.000	150.000

Constraint	RHS	Slack-/Surplus+
1 (>)	150.000	0.000
2 (>)	200.000	0.000
3 (>)	300.000	0.000

Sensitivity Analysis

Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1: setting1	1.000	0.875	infinity	-0.125
x2: setting2	1.000	0.875	infinity	-0.125
x3: setting3	1.000	1.000	infinity	0.000
x4: setting4	1.000	0.000	1.000	0.000
x5: setting5	1.000	0.250	1.250	0.000
x6: setting6	1.000	0.000	1.000	0.000

Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1 (>)	150.000	100.000	infinity	0.250
2 (>)	200.000	0.000	300.000	0.375
3 (>)	300.000	0.000	infinity	0.500

FIGURA 2.24
Resultado del modelo de pérdida por recortes obtenido con TORA

4. Para el modelo por pérdida de recortes en el ejemplo 2.5-4, y su solución en la figura 2.24.

a) Si se cortan 200 rollos con la posición 1, y 100 rollos con la posición 3, calcule el área correspondiente de pérdida por recorte.

b) Suponga que el único rollo de ancho estándar posible tiene 15 pies de ancho. Genere todos las posiciones posibles de cuchilla para producir rollos de 5, 7 y 9 pies, y calcule la pérdida asociada, en “merma” (desperdicio) por pie de longitud.

c) En el modelo original, si la demanda de rollos de 7 pies baja en 80, ¿cuál es la cantidad total de rollos de ancho estándar de 20 pies que se necesitarán para surtir la demanda de los tres tipos de rollo?

d) En el modelo original, si la demanda de rollos de 9 pies cambia a 400, ¿cuántos rollos de ancho estándar de más de 20 pies se necesitarán para satisfacer la nueva demanda?

5. Shale Oil, en la isla de Aruba, tiene una capacidad de 600,000 barriles diarios de crudo. Entre sus productos hay dos clases de gasolina sin plomo: regular y premium. El proceso de refinación abarca tres fases: 1) una torre de destilación que produce gasolina cruda y pesados, entre otros productos; 2) una unidad de desintegración que produce gasolina a partir de una parte de los pesados de la torre de destilación, y 3) una unidad mezcladora que mezcla la gasolina cruda y la desintegrada. La gasolina regular y la premium se pueden mezclar a partir de la gasolina cruda o la desintegrada, a distintos costos de producción. La compañía estima que la utilidad neta por barril de gasolina regular es de $7.70, y de $5.20, dependiendo de si se produce a partir de la gasolina cruda o de la desintegrada. Los valores correspondientes para la calidad premium son $10.40 y $12.30.

En las especificaciones de diseño se requieren 5 barriles de crudo para producir 1 barril de gasolina cruda. La capacidad de la unidad de desintegración es 40,000 barriles de pesados por día. Todo el pesado que resta se usa en forma directa en la unidad de mezcla para producir gasolina final al consumidor. Los límites de demanda de gasolina regular y premium son 80,000 y 50,000 barriles diarios, respectivamente.

a) Desarrolle un modelo para determinar el programa óptimo de producción en la refinería.

b) Suponga que se puede aumentar la capacidad de la torre de destilación a 650,000 barriles de crudo por día, con un costo inicial de $3,500,000 y un costo diario de mantenimiento de $15,000. ¿Recomendaría usted la ampliación? Defina las hipótesis que se puedan necesitar para llegar a esa decisión.

6. El Ingenio Dulce produce azúcar morena, azúcar blanca, azúcar glas y melaza, a partir de guarapo concentrado. La empresa compra 4000 toneladas semanales de ese guarapo, y se le contrata para entregar al menos 25 toneladas semanales de cada clase de azúcar. El proceso de producción comienza fabricando azúcar morena y melaza, a partir del guarapo. Una tonelada de guarapo concentrado produce 0.3 tonelada de azúcar morena y 0.1 tonelada de melaza. A continuación se produce el azúcar blanca procesando el azúcar morena. Se necesita 1 tonelada de azúcar morena para producir 0.8 tonelada de azúcar blanca. Por último, el azúcar glas se produce a partir de azúcar blanca mediante un proceso especial de molienda que tiene una eficiencia de producción de 95% (1 tonelada de azúcar blanca produce 0.95 tonelada de azúcar glas). Las utilidades son $150, $200, $230 y $35 por tonelada de azúcar morena, azúcar blanca, azúcar glas y melaza, respectivamente.

a) Formule el problema en forma de programa lineal, y determine el programa semanal de producción.

b) Investigue la factibilidad económica de aumentar la capacidad de procesamiento de la empresa a más de 4000 toneladas semanales de guarapo.

7. Empresas Fox planea seis proyectos de construcción posibles durante los 4 años siguientes. En la tabla siguiente se muestran los ingresos esperados (a valor presente) y los desembolsos en efectivo para esos proyectos. A Fox se le autoriza emprender cualesquiera de los proyectos, en forma parcial o total. Una terminación parcial de un proyecto tendrá ingresos y desembolsos proporcionales.

	Inversión de capital ($ miles)				
Proyecto	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	*Ingresos ($ miles)*
1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40
2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80
3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
4	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80
5	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20
6	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35
Fondos disponibles ($ miles)	60.0	70.0	35.0	20.0	

a) Formule el problema como programa lineal y determine la (mezcla) proporción óptima de proyectos que maximicen los ingresos totales. No tenga en cuenta el valor del dinero a través del tiempo.

b) Suponga que no se puede acometer parte alguna del proyecto 2, a menos que se haya terminado una parte al menos del proyecto 6. Modifique la formulación del modelo, y determine la nueva solución óptima.

c) En cuanto al modelo original, ¿vale la pena pedir dinero prestado en el año 4?

d) En el modelo original, suponga que todo fondo que quede al final de un año se usa en el año siguiente. Determine la nueva solución óptima, y la cantidad que cada año "pide prestada" al año anterior. Para simplificar, no tenga en cuenta el valor del dinero a través del tiempo.

e) Suponga, en el modelo original, que los fondos anuales disponibles para cualquier año se pueden exceder, si es necesario, pidiendo prestado a otras actividades financieras dentro de la empresa. Sin tener en cuenta el valor actual del dinero, reformule el modelo de programación lineal, y determine la solución óptima. ¿Requeriría la nueva solución préstamo en alguno de los años? En caso afirmativo, ¿cuál es la tasa de retorno del dinero prestado?

8. Manufacturera Acme recibió un contrato para entregar ventanas de vivienda durante los 6 meses siguientes. Las demandas sucesivas para los seis periodos son 100, 250, 190, 140, 220 y 110, respectivamente. El costo de producción por ventana varía de un mes a otro, dependiendo de los costos de mano de obra, materiales y servicios. Acme estima que el costo de producción por ventana, durante los 6 meses siguientes, será \$50, \$45, \$55, \$48, \$52 y \$50, respectivamente. Para aprovechar las fluctuaciones en el costo de manufactura, Acme podría optar por producir más de lo necesario en determinado mes, y guardar las unidades excedentes para entregar en meses posteriores. Sin embargo, eso le ocasionará un costo de almacenamiento de \$8 por ventana y por mes, evaluado con el inventario levantado en el fin de mes.

a) Desarrolle una programación lineal para determinar un programa óptimo de producción para Acme, usando TORA.

b) Resuelva el problema suponiendo que Acme tiene un inventario inicial de 25 ventanas al principio del primer mes.

c) De acuerdo con la solución con TORA, los precios duales en los periodos 1, 2, 4 y 5 son exactamente iguales a los costos unitarios de manufactura durante los mismos periodos, mientras que el del periodo 3 es distinto. Explique por qué.

d) Si el costo de almacenamiento por ventana y por mes aumenta a \$9, ¿cambiará la solución óptima del punto a)?

9. Juan tiene \$100,000 para invertir en cuatro proyectos. La tabla siguiente muestra el flujo de efectivo para las cuatro inversiones.

	Flujo de efectivo (\$ miles) al iniciar el				
Proyecto	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	*Año 5*
1	−1.00	0.50	0.30	1.80	1.20
2	−1.00	0.60	0.20	1.50	1.30
3	0.00	−1.00	0.80	1.90	0.80
4	−1.00	0.40	0.60	1.80	0.95

La información de esta tabla se puede interpretar como sigue: para el proyecto 1, \$1.00 invertido al iniciar el año 1, rendirá \$0.50 al iniciar el año 2, \$0.30 al iniciar el año 3, \$1.80 al iniciar el año 4 y \$1.20 al iniciar el año 5. Los elementos restantes se pueden interpretar en forma análoga.

Un caso sin transacciones se indica con un elemento 0.00. Juan también tiene la opción de invertir en una cuenta bancaria que produce el 6.5% anual. Los fondos acumulados en un año se pueden reinvertir en los años siguientes.

a) Formule el problema como programa lineal, para determinar la asignación óptima de fondos a oportunidades de inversión.

b) Use precios duales para determinar el retorno general sobre la inversión.

c) Si Juan desea gastar $1000 en diversiones al final del año 1, ¿cómo afectaría eso a la cantidad acumulada al iniciar el año 5?

10. Surtidora contrató a El Martillo como proveedor de llaves y cinceles en sus tiendas de artículos automotrices. La demanda semanal de Surtidora consiste en al menos 1500 llaves y 1200 cinceles. La capacidad actual de Martillo, en un turno, no basta para producir las unidades que se le piden, y debe recurrir a tiempo extra y, quizá, a subcontratar en otros proveedores de herramientas. El resultado es un aumento en el costo de producción por unidad, como se ve en la siguiente tabla. La demanda del mercado limita la proporción de cinceles a llaves a un mínimo de 2:1.

Herramienta	Tipo de producción	Producción semanal (unidades)	Costo unitario ($)
Llaves	Normal	0–550	2.00
	Tiempo extra	551–800	2.80
	Subcontratadas	801– ∞	3.00
Cinceles	Normal	0–620	2.10
	Tiempo extra	621–900	3.20
	Subcontratados	901– ∞	4.20

a) Formule el problema como programa lineal y determine el programa óptimo de producción para cada herramienta.

b) Relacione el hecho que la función de costo de producción tiene costos unitarios que aumentan, con la validez del modelo.

c) Relacione los precios duales del modelo con los costos unitarios de producción que aparecen en la tabla.

11. En dos máquinas se procesan cuatro productos en forma secuencial. La siguiente tabla muestra los datos pertinentes del problema.

		Tiempo de manufactura (hr) por unidad				
Máquina	*Costo por hr ($)*	*Producto 1*	*Producto 2*	*Producto 3*	*Producto 4*	*Capacidad (hr)*
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
Precio unitario de venta ($)		75	70	55	45	

a) Formule el problema como modelo de programa lineal y determine la solución óptima.

b) Suponga que cualquier capacidad adicional de las máquinas 1 y 2 sólo se puede tener usando tiempo extra. ¿Cuál es el costo máximo, por hora, que la empresa podría considerar para cualquiera de las máquinas?

c) ¿Cuánto se debe reducir el costo de maquinado por unidad del producto 3, para que apenas fuera rentable?

12. Un fabricante produce tres modelos, I, II y III, de cierto producto, usando las materias primas A y B. La tabla siguiente muestra los datos para el problema.

	Requerida por unidad			
Materia prima	*I*	*II*	*III*	*Disponibilidad*
A	2	3	5	4000
B	4	2	7	6000
Demanda mínima	200	200	150	
Utilidad por unidad ($)	30	20	50	

El tiempo de mano de obra para el modelo I es el doble que para el II y el triple del III. Todo el personal de la fábrica puede producir el equivalente de 1500 unidades del modelo I. Las necesidades del mercado especifican las relaciones 3:2:5 de las producciones de los tres modelos respectivos.

a) Formule el problema como un programa lineal y determine la solución óptima.

b) Suponga que el fabricante puede comprar más unidades de la materia prima *A* a $12 por unidad. ¿Sería adecuado hacerlo?

c) ¿Recomendaría usted que el fabricante comprara más unidades de la materia prima *B* a $5 por unidad?

13. Construcciones Alfa puede competir en dos proyectos de 1 año cada uno. La siguiente tabla muestra el flujo trimestral de efectivo (en millones de dólares) en los dos proyectos.

	Flujo de efectivo (en millones de $) al				
Proyecto	*1/1/08*	*4/1/08*	*7/1/08*	*10/1/08*	*12/31/08*
I	−1.0	−3.1	−1.5	1.8	5.0
II	−3.0	−2.5	1.5	1.8	2.8

Alfa tiene fondos de $1 millón al inicio de cada trimestre, y puede pedir prestado cuando mucho $1 millón a una tasa de interés anual nominal de 10%. Todo el dinero que le presten debe pagarlo al final del trimestre. El dinero sobrante puede ganar trimestralmente un interés anual nominal de 8%. La acumulación neta al final de un trimestre se invierte en el trimestre siguiente.

a) Suponga que a Alfa se le permite una participación parcial o total en los dos proyectos. Determine el grado (%) de participación que maximice el efectivo neto acumulado el 31/12/2008.

b) ¿Es posible en algún trimestre pedir prestado y al mismo tiempo terminar con fondos sobrantes? Explique por qué o cómo.

c) Describa una interpretación económica de los precios duales que resultan en el modelo.

d) Demuestre que el precio dual asociado a la cota superior del dinero pedido prestado al principio del tercer trimestre se puede deducir con los precios duales asociados con las ecuaciones de balance que representan el flujo de entrara y salida de efectivo en las cinco fechas indicadas del año.

14. En previsión de los inmensos gastos escolares, una pareja ha iniciado un programa anual de inversión cuando su hijo cumple 8 años, que durará cuando menos hasta que cumpla 18. La pareja estima que podrán invertir las siguientes cantidades al iniciar cada año:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad ($)	2000	2000	2500	2500	3000	3500	3500	4000	4000	5000

Para evitar sorpresas desagradables, la pareja opta por invertir con seguridad en las siguientes opciones: 1) ahorros asegurados con rendimiento anual de 7.5%; 2) bonos del gobierno a 6 años, que producen 7.9% y tienen un precio actual en el mercado igual al 98% del valor nominal, y 3) bonos municipales a 9 años, que producen el 8.5% con un precio actual de mercado de 1.02 veces el valor nominal.

a) ¿Cómo debe invertir la pareja?

b) Determine la tasa de retorno asociada a cada año.

15. Un empresario tiene la opción de invertir en dos planes: el plan A garantiza que cada dólar invertido ganará $0.70 un año después, y el plan B garantiza que cada dólar invertido ganará $2 a los 2 años. En el plan A se pueden hacer inversiones anuales, y en el plan B sólo se permiten inversiones por periodos múltiplos de 2 años.

a) ¿Cómo debe invertir $100,000 el empresario para maximizar las ganancias al final de 3 años?

b) ¿Vale la pena que el ejecutivo invierta más en los planes?

16. Hay un problema de asignación de aviones a cuatro rutas, que se muestra en los siguientes datos:

			Cantidad de viajes diarios en la ruta			
Tipo de avión	*Capacidad (pasajeros)*	*Cantidad de aviones*	*1*	*2*	*3*	*4*
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Cantidad diaria de clientes			1000	2000	900	1200

Los costos asociados, incluyendo las penalizaciones por perder clientes por falta de espacio son:

	Costo de operación ($) por viaje en ruta			
Tipo de avión	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Penaliz. ($) por cliente perdido	40	50	45	70

a) Determine la asignación óptima de aviones a rutas, y determine la cantidad asociada de viajes.

b) ¿Hay alguna ventaja en aumentar la cantidad de cualquiera de los tres tipos de aviones?

c) Interprete los precios duales asociados con las restricciones que representan los límites de cantidad de clientes atendidos en cada ruta.

17. Se fabrican dos aleaciones, *A* y *B*, a partir de cuatro metales, I, II, III y IV, de acuerdo con las siguientes especificaciones:

Aleación	Especificaciones	Precio de venta ($)
A	Cuando más 80% de I Cuando más 30% de II Cuando menos 50% de IV	200
B	De 40 a 60% de II Cuando menos 30% de III Cuando más 70% de IV	300

A su vez, los cuatro metales son obtenidos a partir de tres minerales, de acuerdo con los siguientes datos:

		Componentes (%)					
Mineral	*Cantidad máxima (ton)*	*I*	*II*	*III*	*IV*	*Otros*	*Precio ($)/ton*
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

a) ¿Cuánta aleación de cada tipo se debe producir? (*Sugerencia:* sean x_{ik} las toneladas del mineral *i* asignadas a la aleación *k*, y defina w_k como las toneladas producidas de la aleación *k*.)

b) ¿Cuánto de cada mineral se debe asignar a la producción de cada aleación?

c) ¿Cuáles de las restricciones de la especificación influye en forma negativa sobre la solución óptima?

d) ¿Cuál es el precio máximo que puede pagar la empresa por tonelada de mineral 1? ¿De mineral 2? ¿De mineral 3?

18. Un jugador participa en un juego que requiere dividir el dinero de la apuesta en cuatro opciones. El juego tiene tres resultados. La tabla siguiente muestra la ganancia o pérdida correspondiente, por cada dólar, para las diversas opciones del juego.

	Ingreso por dólar depositado en la alternativa			
Resultado	*1*	*2*	*3*	*4*
1	−3	4	−7	15
2	5	−3	9	4
3	3	−9	10	−8

El apostador tiene $500 en total, que sólo puede jugar una vez. El resultado exacto del juego no se conoce *a priori*. Por esa incertidumbre, la estrategia del jugador es maximizar la ganancia *mínima* producida por los tres resultados.

a) ¿Cómo debe asignar el apostador los $500 entre las cuatro opciones? (*Sugerencia:* la ganancia neta del jugador puede ser positiva, cero o negativa.)

b) ¿Aconsejaría usted al apostador que arriesgue más dinero?

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., J. Jarvis y M. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2a ed., Wiley, Nueva York, 1990.

William, H., *Model Building in Mathematical Programming*, 3a ed., Wiley, Nueva York, 1990.

PROBLEMAS INTEGRALES

2.1* La empresa Empacadora fabrica y enlata tres extractos de naranja: jugo concentrado, jugo normal y mermelada. Estos productos, para uso comercial, se fabrican en latas de 5 galones. En la mermelada se usan naranjas clase I, y los dos productos restantes se usan de clase II. La siguiente tabla muestra los usos de las naranjas, y la demanda en el año próximo:

Producto	Clase	Libras de naranjas por lata de 5 gal	Demanda máxima (latas)
Mermelada	I	5	10,000
Concentrado	II	30	12,000
Jugo normal	II	15	40,000

Una encuesta de mercado indica que la demanda de jugo normal es cuando menos el doble que la del concentrado.

En el pasado, Empacadora compraba por separado las naranjas de clase I y II, a los precios respectivos de 25 y 20 centavos por libra. Este año hubo una helada inesperada, y los cultivadores tuvieron que cosechar y vender su cosecha por anticipado, sin clasificarla como clase I o II. Se estima que el 30% de la cosecha de 3,000,000 es de clase I, y que sólo el 60% es de clase II. Por esta razón la cosecha se ofrece al precio de descuento uniforme de 19 centavos por libra. La empacadora estima que le costará clasificar las naranjas en clase I y II, más o menos 2.15 centavos por libra. Las naranjas defectuosas (10% de la cosecha) serán desechadas.

Para fines de asignación de costos, el departamento de contabilidad usa el siguiente argumento para estimar el costo de las naranjas de clase I y II. Como el 10% de la cosecha comprada será de calidad menor a la clase II, el costo promedio efectivo, por libra, se puede calcular como $\frac{(19 + 2.15)}{0.9} = 23.5$ centavos. Dada la relación de clase I a clase II en el lote comprado, que es 1 a 2, el costo promedio correspondiente, por libra, con base en los precios anteriores, es $\frac{(20 \times 2 + 25 \times 1)}{3} = 21.67$ centavos. En consecuencia, el aumento en el precio promedio (= 23.5 centavos – 21.67 centavos = 1.83 centavos) se debe reasignar a las dos clases, en una relación de 1:2, obteniendo un costo por libra de clase I igual a $20 + 1.83(\frac{2}{3}) = 21.22$ centavos, y un costo por libra de clase II de $25 + 1.83(\frac{1}{3}) = 25.61$ centavos. Con esta información, el departamento de contabilidad compila la siguiente hoja de rentabilidad de los tres productos.

	Producto (lata de 5 gal)		
	Mermelada	*Concentrado*	*Jugo Normal*
Precio de venta	\$15.50	\$30.25	\$20.75
Costos variables	9.85	21.05	13.28
Indirectos fijos asignados	1.05	2.15	1.96
Costo total	\$10.90	\$23.20	\$15.24
Utilidad neta	4.60	7.05	5.51

Determine un plan de producción para Empacadora.

2.2* Una acería posee una fundidora y dos laminadoras. En la fundidora se cuelan tres tipos de rollos de acero, que se maquinan en su taller antes de embarcarse a las laminadoras; éstas usan los rollos laminados para fabricar varios productos.

*Motivado por “Red Brand Canners” Stanford Business Cases 1965, Escuela de Graduados de Comercio, Universidad Stanford.

*Basado en S. Jain, K. Scott y E. Vasold, “Orderbook Balancind Using a Combination of Linear Programming and Heuristic Techniques”, *Interfaces*, vol. 9, núm. 1, noviembre de 1978, págs. 55 a 67.

Al iniciar cada trimestre, las laminadoras preparan sus consumos mensuales de rollos y los presentan a la fundidora. Entonces, el gerente de la fundidora establece un plan de producción que en esencia está restringido por la capacidad de maquinado en el taller. Los déficit son cubiertos con compras directas a precios mayores, en fuentes externas. En la tabla siguiente se muestra una comparación entre el costo por tejo adquirido en la fundidora, y su precio de compra externa. Sin embargo, la gerencia hace notar que esos déficit no son frecuentes, y que se estima suceden más o menos en el 5% del tiempo.

Tipo de rollo	Peso (lb)	Costo interno ($ por rollo)	Precio de compra en exterior ($ por rollo)
1	800	90	108
2	1200	130	145
3	1650	180	194

Los tiempos de procesamiento en las cuatro máquinas distintas del taller son:

	Tiempo de procesamiento por rollo				
Tipo de máquina	*Rollo 1*	*Rollo 2*	*Rollo 3*	Cantidad de máquinas	Tiempo disponible, hr por máquina por mes
1	1	5	7	10	320
2	0	4	6	8	310
3	6	3	0	9	300
4	3	6	9	5	310

La demanda de rollos en las tres laminadoras durante los 3 meses siguientes es:

	Demanda de rollos					
	Laminadora 1			*Laminadora 2*		
Mes	*Rollo 1*	*Rollo 2*	*Rollo 3*	*Rollo 1*	*Rollo 2*	*Rollo 3*
1	500	200	400	200	100	0
2	0	300	500	300	200	200
3	100	0	300	0	400	200

Establezca un programa de producción para el taller.

2.3 ArkTec arma computadoras PC para clientes privados. Los pedidos para los cuatro trimestres siguientes son 400, 700, 500 y 200, respectivamente. ArkTec tiene la opción de producir más que su demanda en el trimestre, en cuyo caso incurre en un costo de tenencia de $100 por computadora por trimestre. La mayor producción de un trimestre al siguiente requiere contratar más empleados, lo cual aumenta $60 el costo de producción por computadora en ese trimestre. También, si disminuye la producción de un trimestre al siguiente, requiere despedir empleados, lo cual aumenta el en $50 el costo de producción por computadora.

¿Cómo debe programar ArkTec el ensamble de las computadoras para satisfacer la demanda en los cuatro trimestres?

2.4 Muebles Pino fabrica y arma sillas, mesas y libreros. Su fábrica elabora productos semiterminados que se arman en la ensambladora de la empresa.

La capacidad mensual de producción (no ensamblada) de la fábrica es 3000 sillas, 1000 mesas y 580 libreros. La ensambladora emplea 150 trabajadores en dos turnos diarios, de 8 horas cada uno y 5 días por semana. Los tiempos promedio de ensamble por silla, mesa y librero son, respectivamente, 20, 40 y 15 minutos.

El tamaño de la planta laboral en la ensambladora fluctúa, debido a las vacaciones anuales que se toman los empleados. Hay solicitudes pendientes de vacaciones por parte de 20 trabajadores para mayo, 25 para junio y 40 para julio.

El departamento de mercadotecnia pronostica que las ventas de los tres productos durante los meses mayo, junio y julio serán:

	Pronóstico de ventas, unidades			
Producto	*Mayo*	*Junio*	*Julio*	*Inventario al final de abril*
Silla	2800	2300	3350	30
Mesa	500	800	1400	100
Librero	320	300	600	50

El costo de producción y el precio de venta de los tres productos son:

Producto	Costo unitario ($)	Precio unitario ($)
Silla	150	250
Mesa	400	750
Librero	60	120

Si una unidad no se vende en el mes en el que se produce, se conserva para su posible venta en un mes posterior. El costo de almacenamiento es aproximadamente el 2% del costo unitario de producción.

¿Debe Pino aprobar las vacaciones anuales solicitadas?

CAPÍTULO 3

El método símplex

El método gráfico del capítulo 2 indica que la solución óptima de un programa lineal siempre está asociada con un *punto esquina* del espacio de soluciones. Este resultado es la clave del *método símplex* algebraico y general para resolver cualquier modelo de programación lineal.

La transición de la solución del punto esquina geométrico hasta el método símplex implica un procedimiento de cómputo que determina en forma algebraica los puntos esquina. Esto se logra convirtiendo primero a todas las restricciones de desigualdad en ecuaciones, para después manipular esas ecuaciones en una forma sistemática.

Una propiedad general del método símplex es que resuelve la programación lineal en *iteraciones*. Cada iteración desplaza la solución a un nuevo punto esquina que tiene potencial de mejorar el valor de la función objetivo. El proceso termina cuando ya no se pueden obtener mejoras.

El método símplex implica cálculos tediosos y voluminosos, lo que hace que la computadora sea una herramienta esencial para resolver los problemas de programación lineal. Por consiguiente, las reglas computacionales del método símplex se adaptan para facilitar el cálculo automático.

3.1 ESPACIO DE SOLUCIONES EN FORMA DE ECUACIÓN

Para estandarizar, la representación algebraica del espacio de soluciones de programación lineal se forma bajo dos condiciones:

1. Todas las restricciones (excepto las de no negatividad) son ecuaciones con lado derecho no negativo.
2. Todas las variables son no negativas.

3.1.1 Conversión de desigualdades a ecuaciones

En las restricciones ($\leq$), el lado derecho se puede imaginar como representando el límite de disponibilidad de un recurso, y en ese caso el lado izquierdo representaría el uso de ese recur-

so limitado por parte de las actividades (variables) del modelo. La diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de la restricción (≤) representa, por consiguiente, la cantidad no usada u **holgura** del recurso.

Para convertir una desigualdad (≤) en ecuación, se agrega una variable de holgura al lado izquierdo de la restricción. Por ejemplo, en el modelo de Reddy Mikks (Ejemplo 2.1-1), la restricción asociada con el uso de la materia prima *M*1 está dada como

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

Si se define s_1 como la holgura, o cantidad no usada, de *M*1, la restricción se puede convertir en la siguiente ecuación:

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24,\ s_1 \geq 0$$

Prosigamos. Una restricción (≥) establece, normalmente, un límite inferior para las actividades del modelo de programación lineal. Como tal, la cantidad por la que el lado izquierdo es mayor que el límite mínimo (lado derecho) representa un **excedente**.

La conversión de (≥) a (=) se logra restando una variable de excedencia, del lado izquierdo de la desigualdad. Por ejemplo, en el modelo de la dieta (Ejemplo 2.2-2), la restricción que representa los requisitos mínimos de alimento está dada como

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

Si se define a S_1 como una variable de excedencia se puede convertir la restricción en la ecuación siguiente:

$$x_1 + x_2 - S_1 = 800,\ S_1 \geq 0$$

Es importante observar que las variables de holgura y de excedencia, s_1 y S_1, siempre son no negativas.

El único requisito que queda es que el lado derecho de la ecuación que resulte sea no negativo. Esta condición se puede satisfacer siempre, si es necesario multiplicando ambos lados de la ecuación resultante por –1. Por ejemplo, la restricción

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

equivale directamente a la ecuación

$$-x_1 + x_2 + s_1 = -3,\ s_1 \geq 0$$

Ahora se multiplican ambos lados por –1, y se obtiene un lado derecho no negativo, que es lo que se busca; esto es,

$$x_1 - x_2 - s_1 = 3$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1A

1. En el modelo de Reddy Mikks (Ejemplo 2.2-1), considere la solución factible $x_1 = 3$ ton y $x_2 =$ 1 ton. Determine el valor de las holguras asociadas a las materias primas *M*1 y *M*2.
2. En el modelo de la dieta (Ejemplo 2.2-2) determine la cantidad excedente cuando el alimento consiste en 500 lb de maíz y 600 lb de soya.

3. Se tiene la siguiente desigualdad:

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

Demuestre que multiplicar ambos lados por –1 y a continuación convertir la desigualdad en una ecuación equivale a convertirla primero en una ecuación y a continuación multiplicar ambos lados por –1.

4. Se pueden fabricar dos productos distintos, *P*1 y *P*2, en cualquiera de dos máquinas diferentes, *M*1 y *M*2. El tiempo unitario de procesamiento para cualquier producto en cualquier máquina es igual. La capacidad diaria de la máquina *M*1 es de 200 unidades (sea de *P*1, de *P*2, o de una mezcla de ambas) y la capacidad diaria de la máquina *M*2 es de 250 unidades. El supervisor del taller desea balancear el programa de producción de las dos máquinas para que la cantidad total de las unidades producidas en una no sea mayor que 5 unidades, respecto a la cantidad producida en la otra. La utilidad por unidad de *P*1 es de $10, y la de *P*2 es de $15. Plantee el problema en forma de programación lineal en forma de ecuaciones.

5. Indique cómo se puede representar la siguiente función objetivo en forma de ecuación:

$$\text{Minimizar } z = \text{máx}\{|x_1 - x_2 + 3x_3|, |-x_1 + 3x_2 - x_3|\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6. Demuestre que las *m* siguientes ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

equivalen a las $m + 1$ siguientes desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i$$

3.1.2 Manejo de variables no restringidas

En todos los modelos de programación lineal que se presentaron en el capítulo 2 sólo manejamos variables no negativas. Sin embargo, hay casos en los que una variable puede asumir cualquier valor real (positivo, cero o negativo). En el siguiente ejemplo se presenta una aplicación de esa índole.

Ejemplo 3.1-1

McBurger es un restaurante de comida rápida que vende hamburguesas extra y de queso. En una extra se usa un cuarto de libra de carne, y en una de queso sólo se usa 0.2 lb. El restaurante comienza el día con 200 lb de carne, pero puede pedir más, con un costo adicional de 25 centavos por libra para cubrir el costo de la entrega. Toda carne que sobre al final del día se dona a instituciones caritativas. Las utilidades de McBurger son 20 centavos por una extra y 15 centavos por una de queso. En total, McBurger no espera vender más de 900 hamburguesas en cualquier día. ¿Cuántas hamburguesas de cada tipo debe planear McBurger para el día?

Primero examinemos las restricciones. Si x_1 y x_2 representan la cantidad diaria de extra y de queso hechas, la cantidad diaria de carne dependerá de si McBurger se queda con el límite inicial de 200 lb, o si pide carne adicional. En el primer caso, la restricción es $0.25x_1 + 0.2x_2$

≤ 200, y en el segundo es $0.25x_1 + 0.2x_2 \geq 200$. La selección específica de cualquiera de las constantes depende de cuál produce una solución mejor. En otras palabras, no se conoce con anticipación si la restricción trabajará con una holgura (primer caso) o con un excedente (segundo caso). Una forma lógica para tener en cuenta la situación es reemplazar las dos restricciones con

$$0.25x_1 + 0.2x_2 + x_3 = 200, \ x_3 \text{ sin restricciones}$$

Ahora la variable x_3 juega los papeles de holgura o de excedencia, según se desee.

A continuación veamos la función objetivo. McBurger trata de maximizar las utilidades totales, descontando cualquier costo adicional por pedir más libras de carne. En el costo adicional sólo se incurre si x_3 juega el papel de un excedente, esto es, si $x_3 < 0$.

Más que manejar la variable x_3 no restringida en forma directa, usaremos una sustitución normal que exprese la variable no restringida como una función de dos variables no negativas; es decir,

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-, \ \text{donde } x_3^+, x_3^- \geq 0$$

Si $x_3^+ > 0$ y $x_3^- = 0$, x_3^+ representa una holgura. En caso contrario, si $x_3^- > 0$ y $x_3^+ = 0$, entonces x_3^- representa un excedente. La teoría de la programación lineal indica que la solución de un programa lineal nunca puede producir valores positivos para x_3^+ y para x_3^- al mismo tiempo. Eso quiere decir que la restricción se puede escribir como sigue:

$$0.25x_1 + 0.2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 200$$

En este caso, la función objetivo se expresa así:

$$\text{maximizar } z = 0.20x_1 + 0.15x_2 - 0.25x_3^-$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1B

1. En un centro de maquinado se fabrican dos productos. Los tiempos de producción unitarios son 10 y 12 minutos, para los productos 1 y 2, respectivamente. El tiempo total normal de las máquinas es de 2500 minutos por día. En un día, el fabricante puede producir de 150 a 200 unidades del producto 1, pero no más de 45 unidades del producto 2. Para satisfacer la demanda se puede recurrir al tiempo extra, con un costo adicional de \$0.50 por minuto.

   a) Suponga que las utilidades unitarias por los productos 1 y 2 son de \$6.00 y \$7.50, respectivamente; formule el problema como un modelo de programación lineal y resuélvalo con TORA para determinar la producción óptima de cada producto, así como el tiempo extra que se necesita en el centro de maquinado.

   b) Si aumenta el costo por minuto de tiempo extra a \$1.50, ¿debe recurrir la empresa al tiempo extra?

2. JoShop fabrica tres productos, cuyas utilidades unitarias son de \$2, \$5 y \$3, respectivamente. Ha presupuesto 80 horas de mano de obra y 65 horas de tiempo de máquina para producirlos. Los requisitos de mano de obra para los productos 1, 2 y 3 son 2, 1 y 2 horas, respectivamente. Los tiempos requeridos de máquina correspondientes por unidad son 1, 1 y 2 horas. JoShop considera que las horas hombre y horas máquina presupuestas son metas que, si es necesario, se pueden exceder, pero con un costo adicional de \$15 por hora de mano de obra y \$10 por hora de máquina.

   Formule el problema como de programación lineal y determine su solución óptima con TORA.

3. En un problema de programación lineal donde hay varias variables sin restricción, una transformación del tipo $x_j = x_j^+ - x_j^-$, donde $(x_j^+, x_j^-) \geq 0$ elevará al doble la cantidad correspondiente

de variables no negativas. En lugar de esa transformación se pueden reemplazar k variables no restringidas exactamente con $k + 1$ variables no negativas mediante la sustitución $x_j = x_j' - w$, x_j', $w \geq 0$. Use TORA para demostrar que los dos métodos producen la misma solución con el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2,\ x_3 \text{ sin restricción}$$

3.2 TRANSICIÓN DE SOLUCIÓN GRÁFICA A SOLUCIÓN ALGEBRAICA

Las ideas contenidas en la solución gráfica de un modelo de programación lineal son la base para desarrollar el método algebraico símplex. La figura 3.1 marca el paralelismo entre los dos métodos. En el método gráfico, el espacio de soluciones se delimita con los semiespacios

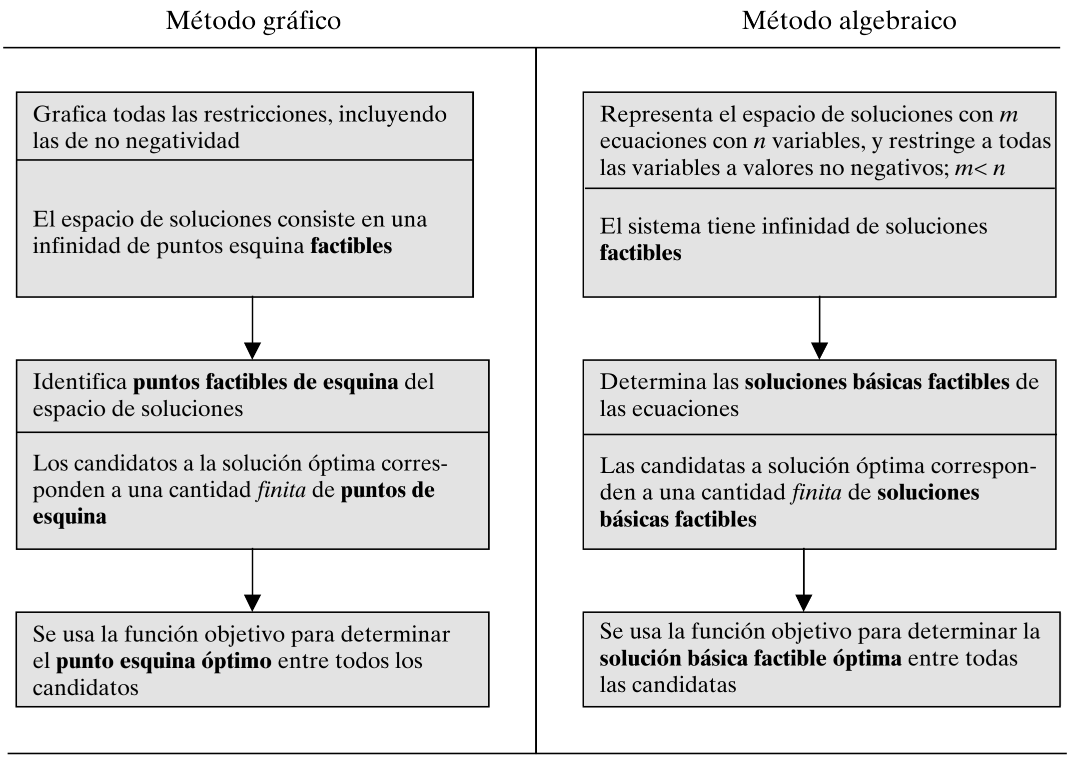


FIGURA 3.1
Transición de la solución gráfica a la solución algebraica

que representan las restricciones, y en el método símplex, el espacio de soluciones se representa con m ecuaciones lineales simultáneas y n variables no negativas. El lector apreciará el sentido de la información de la figura 3.1 al avanzar en el resto de esta sección.

Se puede apreciar en forma visual por qué el espacio gráfico de soluciones tiene una cantidad infinita de puntos de solución; pero, ¿cómo se puede deducir algo parecido a partir de la representación algebraica del espacio de soluciones? La respuesta es que en la representación algebraica, la cantidad m de ecuaciones siempre es *menor o igual a* la cantidad de variables n.[1] Si $m = n$, y si las ecuaciones son consistentes, el sistema sólo tiene una solución; pero si $m < n$ (esto representa la mayor parte de los programas lineales), entonces el sistema de ecuaciones producirá una infinidad de soluciones, de nuevo si es consistente. Como ejemplo sencillo, la ecuación $x = 2$ tiene $m = n = 1$, y es obvio que la solución es única. Pero la ecuación $x + y = 1$ tiene $m = 1$ y $n = 2$, y tiene una cantidad infinita de soluciones. Cualquier punto de la recta $x + y = 1$ es una solución.

Ya demostramos cómo se representa el espacio de soluciones de un programa lineal en forma algebraica. Entonces los candidatos para la solución óptima, que son los puntos esquina, se determinan con las ecuaciones lineales simultáneas como sigue:

En un conjunto de $m \times n$ ecuaciones ($m < n$), si se igualan a cero $n - m$ variables, y a continuación se despejan las m variables restantes de las m ecuaciones, la solución resultante, si es única, debe corresponder a un punto esquina del espacio de soluciones.

En el siguiente ejemplo demostraremos el procedimiento.

Ejemplo 3.2-1

Se tiene el siguiente programa lineal con dos variables:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

En la figura 3.2 se ve el gráfico del espacio de soluciones del problema.

Algebraicamente, el espacio de soluciones de la programación lineal se representa como:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 4$$
$$x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 = 5$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

---

[1] Si la cantidad de ecuaciones m es mayor que la cantidad de variables n, entonces al menos $m - n$ ecuaciones deben ser redundantes.

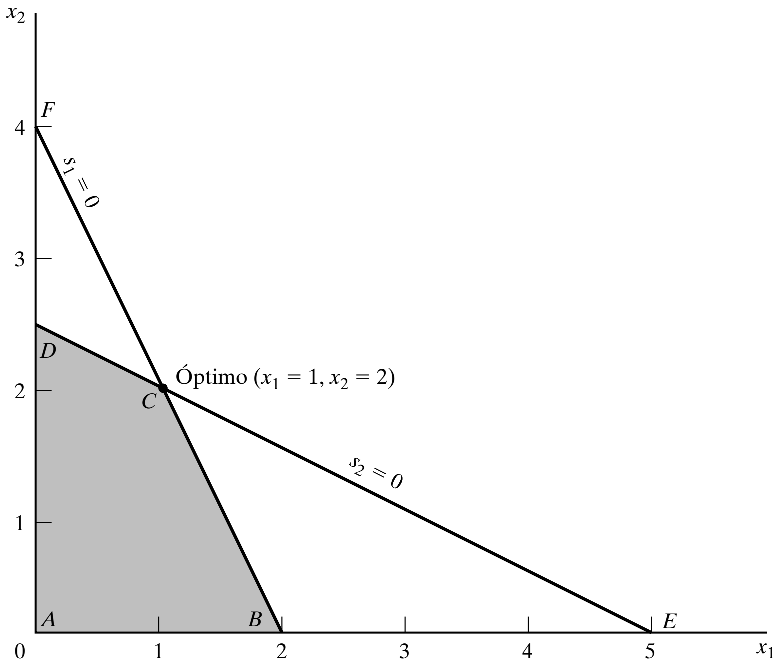


FIGURA 3.2

Espacio de soluciones de la programación lineal del ejemplo 3.2-1

El sistema tiene $m = 2$ ecuaciones y $n = 4$ variables. Así, según la regla que acabamos de presentar, se pueden determinar algebraicamente los puntos esquina igualando a cero $n - m = 4 - 2 = 2$ variables y resolviendo las ecuaciones para determinar las $m = 2$ variables restantes. Por ejemplo, si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, las ecuaciones producen la solución

$$s_1 = 4, \ s_2 = 5$$

Esta solución corresponde al punto A de la figura 3.2 (convénzase el lector de que en realidad $s_1 = 4$ y $s_2 = 5$ en el punto *A*). Se puede determinar otro punto si se hacen $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$ y a continuación se resuelven las dos ecuaciones

$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

En esta forma se obtienen $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, que definen al punto *C* de la figura 3.2.

Es probable que el lector se pregunte cómo se puede saber cuáles de las $n - m$ variables se deben igualar a cero, para obtener determinado punto esquina. Sin las ventajas de la solución gráfica (de la cual sólo se dispone para dos o tres variables) no se puede decir cuáles de las $(n - m)$ variables igual a cero están asociadas con cuál punto esquina. Pero eso no impide enumerar *todos* los puntos esquina del espacio de soluciones. Sólo tenga en cuenta *todas* las combinaciones en las que $n - m$ variables se igualan a cero, y resuelva las ecuaciones que resulten. Una vez resueltas, la solución óptima es el punto esquina *factible* que produce el mejor valor objetivo.

En este ejemplo, se tiene que $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ puntos esquina. Al examinar la figura 3.2, se puede localizar lo que se pudiera llamar puntos esquina “auténticos”, que son los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. ¿Dónde quedan los otros dos? De hecho, los puntos *E* y *F* también son puntos esquina

en este problema, pero son *no factibles*, esto es, no satisfacen todas las restricciones del problema. Esos puntos esquina no factibles no son candidatos para el valor óptimo.

Para hacer una transición completa hacia la solución algebraica necesitamos indicar los puntos esquina por sus nombres algebraicos. En forma específica, las $n - m$ variables que se igualan a cero se llaman **variables no básicas**. Si las m variables restantes tienen una solución única, se llaman **variables básicas** y su solución (al resolver las m ecuaciones) se llama **solución básica**. (En este momento, el lector debe consultar la figura 3.1.) La siguiente tabla muestra todas las soluciones básicas y no básicas para este ejemplo.

Variables no básicas (cero)	Variables básicas	Solución básica	Punto esquina asociado	¿Factible?	Valor objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(5, 4)	A	Sí	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, −3)	F	No	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	D	Sí	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	B	Sí	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, −6)	E	No	—
$(\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2})$	$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$	**(1, 2)**	***C***	**Sí**	**8 (óptimo)**

El lector notará en el ejemplo 3.2-1 que a medida que aumenta el tamaño del problema (esto es, a medida que m y n se hacen grandes), el problema de enumerar todos los puntos esquina es demasiado complicado, computacionalmente. Por ejemplo, para $m = 10$ y $n = 20$ sería necesario resolver $C_{10}^{20} = 184{,}756$ conjuntos de 10×10 ecuaciones; es una tarea abrumadora en realidad, en especial cuando se sabe que un programa lineal de 10×20 es pequeño en una situación de la vida real en que no son raras cientos o hasta miles de variables y restricciones. Sin embargo, el lector puede tener la seguridad que, al final, sólo se investiga una fracción de todas las posibles soluciones básicas factibles (puntos esquina) del espacio de soluciones. En esencia, en el método símplex se usa un procedimiento inteligente de búsqueda, diseñado para llegar al punto esquina óptimo en una forma eficiente.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.2A

1. Compruebe las soluciones básicas y no básicas mencionadas al terminar el ejemplo 3.2-1.

2. Se tiene el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Exprese el problema en forma de ecuaciones.

b) Determine todas las soluciones básicas del problema, y clasifíquelas como factibles y no factibles.

c) Use sustitución directa en la función objetivo para determinar la mejor solución *básica factible*.

d) Compruebe gráficamente que la solución que obtuvo en c) es la óptima para la programación lineal; en consecuencia llegue a la conclusión que la solución óptima se puede determinar algebraicamente considerando sólo las soluciones básicas factibles, es decir, los puntos esquina.

e) Muestre cómo las soluciones básicas *no factibles* se representan en el espacio de solución gráfica.

3. Determine la solución óptima de cada uno de los programas lineales siguientes, enumerando todas las soluciones básicas.

a) Maximizar $z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$
sujeta a

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

b) Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
sujeta a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

4. Demuestre que todas las soluciones básicas del siguiente programa lineal son no factibles.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \geq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Se tiene el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$
$$x_2 \text{ no restringida}$$

En la conversión a la forma de ecuación se usa la sustitución $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Demuestre que una solución básica no puede incluir al mismo tiempo a x_2^+ y x_2^-.

6. Se tiene el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \text{ sin restricción}$$

$$x_2 \geq 0$$

a) Determine todas las soluciones básicas factibles del problema.

b) Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la mejor solución básica.

c) Resuelva gráficamente el problema y compruebe que la solución que obtuvo en b) es la óptima.

3.3 EL MÉTODO SÍMPLEX

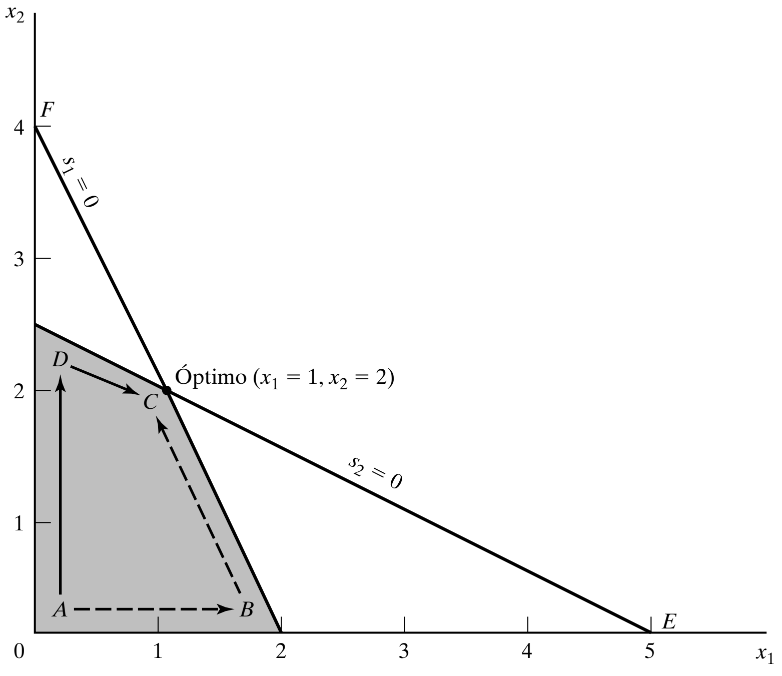
Más que enumerar *todas* las soluciones básicas (puntos esquina) del problema de programación lineal (como hicimos en la sección 3.2), el método símplex sólo investiga "unas pocas selectas" entre ellas. En la sección 3.3.1 se describe la naturaleza iterativa del método y en la sección 3.3.2 se presentan los detalles de cálculo del algoritmo símplex.

3.3.1 Naturaleza iterativa del método símplex

La figura 3.3 muestra el espacio de soluciones de la programación lineal del ejemplo 3.2-1. Normalmente, el método símplex comienza en el origen (punto A), donde $x_1 = x_2 = 0$. En este punto de inicio, el valor de la función objetivo z es cero, y la pregunta lógica es si ese valor

FIGURA 3.3

Proceso iterativo en el método símplex



mejora con un aumento en x_1 y/o x_2 no básicas respecto a sus valores actuales de cero. Contestaremos esta pregunta investigando la función objetivo:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

La función indica que un aumento en x_1 o x_2 (o en ambas) respecto a sus valores actuales de cero *aumentará* el valor de z (recuerde que estamos *maximizando* a z). Sin embargo, en el diseño del método símplex se estipula aumentar las *variables una por una*.

1. Si aumenta x_1, entonces, como se ve en la figura 3.3, su valor debe aumentar para llegar al punto esquina B (recuerde que no se acepta detenerse antes de llegar a B, porque un candidato para el óptimo debe ser un punto esquina). Una vez en B, el método símplex aumentará el valor de x_2 para llegar al punto esquina mejorado C. El punto C es óptimo y se termina el proceso. La trayectoria asociada al algoritmo símplex es $A \rightarrow B \rightarrow C$.
2. Si aumenta x_2, el siguiente punto esquina será D, y a partir de D la solución se mueve hacia el punto óptimo C. El trayecto asociado con el algoritmo símplex es $A \rightarrow D \rightarrow C$.

Nótese que en ambas rutas, $A \rightarrow B \rightarrow C$ y $A \rightarrow D \rightarrow C$, las iteraciones símplex se mueven por los **bordes** del espacio de soluciones, y eso quiere decir que el método no puede atravesar ese espacio para ir en forma directa de A a C.

Es probable que el lector pregunte si hay una ruta específica para decidir cuál variable no básica (cero) debe aumentarse en determinado punto esquina. Por ejemplo, en el punto A se podría aumentar x_1 o x_2, y cualquier selección daría como resultado un valor objetivo mejor. Sin embargo, el método símplex proporciona una regla definida, principalmente para facilitar el desarrollo de un programa de cómputo. En forma específica, como se está maximizando, la variable que tenga el coeficiente positivo en la función objetivo *más grande* es la que se selecciona para aumentar. Si hay un empate, la selección se hace en forma arbitraria. Téngase en cuenta que sólo se trata de una *regla fácil* que, de acuerdo con la experiencia en cómputo, generalmente (pero no siempre) conduce a la menor cantidad de iteraciones.

Esta sección termina con una descripción de los cambios en las variables básicas y no básicas, a medida que el método símplex se mueve de un punto esquina al siguiente. La figura 3.4 muestra que s_1 y s_2 son básicas en el punto A, y x_1 y x_2 son no básicas. Cuando se au-

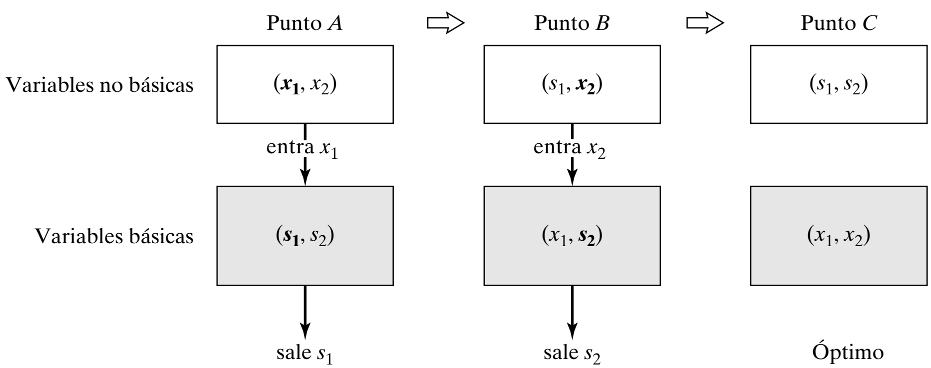


FIGURA 3.4

Intercambio de variables de entrada y de salida en el método símplex

menta x_1 respecto a cero (porque mejora el valor de z) se debe llegar al punto esquina B, con lo que cambia el estado de x_1 de no básica a básica. En forma simultánea, la variable s_1, que era básica en el punto A, se transforma en no básica y asume un valor cero en el punto B. En esencia, el cambio conduce al "intercambio" de la x_1 no básica y la s_1 básica en A para producir las nuevas variables básicas (x_1, s_2) y las variables no básicas (s_1, x_2) en B. Se dice entonces que en A, x_1 *entra* a la solución básica y s_1 *sale* de ella, o la *deja*. En la terminología del método símplex, x_1 y S_1 en el punto A se llaman las variables **de entrada** y **de salida**, respectivamente. Al continuar con el mismo razonamiento en B, x_2 y s_2 son, respectivamente, las variables de entrada y de salida. El proceso termina en el punto C, porque es óptimo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3A

1. En la figura 3.4 se ven los cambios en las variables básicas y no básicas, relacionados con la ruta $A \rightarrow B \rightarrow C$ del espacio de soluciones de la figura 3.3. Haga el diagrama correspondiente para la ruta $A \rightarrow D \rightarrow C$.

2. Acerca de la solución gráfica del modelo de Reddy Mikks que se ve en la figura 2.2, desarrolle el diagrama básico-no básico (equivalente al de la figura 3.4) que especifique las variables de entrada y de salida asociadas con cada iteración, para las siguientes rutas:

a) $A \rightarrow B \rightarrow C$

b) $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$

3. Vea el espacio tridimensional de soluciones de la programación lineal en la figura 3.5, cuyos puntos factibles extremos son $A,\ B,\ \ldots,$ y J.

a) ¿Cuál de los siguientes pares de puntos esquina no pueden representar iteraciones símplex *sucesivas*: (A, B), (B, D), (E, H) y (A, I)? Explique por qué.

b) Suponga que las iteraciones símplex comienzan en A y que el óptimo está en H. Indique si alguna de las rutas siguientes *no* es legítima para el algoritmo símplex, y diga por qué.

(i) $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H$

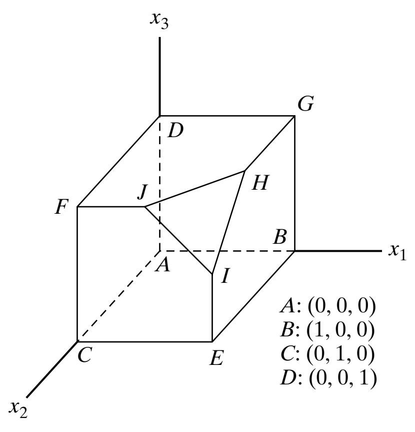
(ii) $A \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow H$

(iii) $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$

4. Para el espacio de soluciones de la figura 3.5, todas las restricciones son del tipo $\leq$ y todas las variables x_1, x_2 y x_3 son no negativas. Suponga que s_1, s_2, s_3 y s_4 (≥ 0) son las holguras asociadas

FIGURA 3.5

Espacio de soluciones del problema 4, del conjunto de problemas 3.3a



con las restricciones que representan los planos *CEIJF, BEIHG, DFJHG* e *IJH*, respectivamente. Identifique las variables básicas y no básicas asociadas con cada punto extremo factible del espacio de soluciones.

5. Acerca del espacio de soluciones en la figura 3.5, donde el algoritmo símplex comienza en el punto *A*, determine la variable de entrada en la *primera* iteración, su valor y la mejoría en *z*, para cada una de las funciones objetivo siguientes:

a) Maximizar $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
b) Maximizar $z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$
c) Maximizar $z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$
d) Maximizar $z = x_1 + x_2 + x_3$

3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo símplex

En esta sección se explican los detalles de cálculo de una iteración símplex, que incluyen las reglas para determinar las variables de entrada y de salida, así como para detener los cálculos cuando se ha llegado a la solución óptima. Como medio de explicación usaremos un ejemplo numérico.

Ejemplo 3.3-1

Usaremos el modelo de Reddy Mikks (Ejemplo 2.1-1) para explicar los detalles del método símplex. El problema se expresa en forma de ecuaciones como sigue:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 24 \text{ (materia prima } M1) \\
x_1 + 2x_2 \qquad + s_2 \qquad\qquad &= 6 \quad \text{(materia prima } M2) \\
-x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 \qquad &= 1 \quad \text{(límite de demanda)} \\
x_2 \qquad\qquad\qquad + s_4 &= 2 \quad \text{(límite de demanda)} \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Las variables s_1, s_2, s_3 y s_4 son las holguras asociadas con las restricciones respectivas.

A continuación se expresará la función objetivo como sigue:

$$z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

De esta manera, la tabla inicial símplex se puede representar como sigue:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	Renglón z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Renglón s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	Renglón s_2
s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	Renglón s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	Renglón s_4

En el diseño de la tabla se especifica el conjunto de variables básicas y no básicas, y también se muestra la solución asociada con la iteración de inicio. Como se explicó en la sección 3.3.1, las iteraciones símplex comienzan en el origen $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Así, el conjunto asociado de variables no básicas y básicas se define como sigue:

$$\text{Variables no básicas (cero):} \quad (x_1, x_2)$$
$$\text{Variables básicas:} \quad (s_1, s_2, s_3, s_4)$$

Dado que las variables no básicas $(x_1, x_2) = (0, 0)$, y al observar el arreglo especial 0-1 de los coeficientes de las variables básicas (s_1, s_2, s_3, s_4) en la tabla, se dispone de inmediato de la siguiente solución (sin más cálculos):

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ s_1 &= 24 \\ s_2 &= 6 \\ s_3 &= 1 \\ s_4 &= 2 \end{aligned}$$

Esta solución se muestra en la tabla, con la lista de las variables básicas en la columna *Básica* de la izquierda, y sus valores en la columna *Solución* de la derecha. De hecho, la tabla define el punto esquina actual especificando sus variables básicas y sus valores, así como el valor correspondiente para la función objetivo, z. Recuerde que las variables no básicas (las que no aparecen en la lista *Básica*) siempre son igual a cero.

¿Es óptima la solución de inicio? En la sección 3.3.1 dijimos que la variable no básica con el coeficiente *más positivo* en una función objetivo de *maximización* se selecciona para entrar a la solución básica. Esta regla se basa en expresar la función objetivo como $z = 5x_1 + 4x_2$. Como la tabla símplex expresa la función objetivo en la forma $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$, la variable de entrada es x_1, porque tiene el coeficiente *más negativo* en la función objetivo, que es de maximización. Si fuera el caso que todos los coeficientes de la función objetivo fueran ≥ 0, no sería posible mejorar z y eso querría decir que se habría llegado al óptimo.

Para determinar la variable de salida, en forma directa con la tabla, se calculan las intersecciones, o coordenadas (x_1) al origen, de todas las restricciones con la dirección *no negativa* del eje x_1 (recuérdese que x_1 es la variable de entrada). Esas intersecciones son las **razones** del lado derecho de las ecuaciones (columna *Solución*) entre los coeficientes de restricción correspondientes, abajo de la variable de entrada x_1, como se ve en la siguiente tabla:

Básica	Entra x_1	Solución	Razón (o intersección)
s_1	6	24	$x_1 = \frac{24}{6} = \mathbf{4} \leftarrow$ mínimo
s_2	1	6	$x_1 = \frac{6}{1} = 6$
s_3	−1	1	$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$ (Ignorar)
s_4	0	2	$x_1 = \frac{2}{0} = \infty$ (Ignorar)

Como se ve en la figura 3.6, las razones *no negativas* son iguales a las intersecciones en dirección de x_1 creciente. Las razones (intersecciones) que corresponden a s_3 y s_4 no se toman en cuenta, porque no limitan a x_1 en la dirección no negativa.

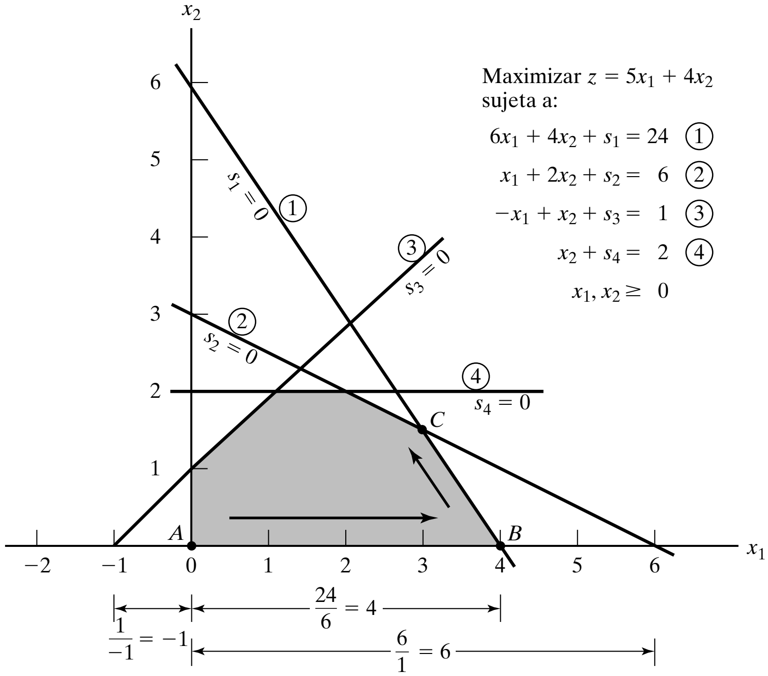


FIGURA 3.6

Interpretación gráfica de las relaciones en el modelo de Reddy Mikks

La razón no negativa mínima corresponde a s_1 básica, y quiere decir que s_1 es la variable de salida (su valor es cero en la nueva iteración). El valor de la variable de entrada x_1 en la nueva solución también es igual a la razón mínima: $x_1 = 4$ (compárela con el punto *B* de la figura 3.6). El aumento correspondiente del valor de la *z* objetivo es ($5 × 4 ton) = $20.

El resultado final de "intercambiar" las variables de entrada y de salida es que las variables no básicas y básicas en el nuevo punto solución (el punto *B*) son:

$$\text{Variables no básicas (cero):} \quad (s_1, x_2)$$
$$\text{Variables básicas:} \quad (x_1, s_2, s_3, s_4)$$

Ahora se deben manipular las ecuaciones de la última tabla de modo que la columna *Básica* y la columna *Solución* identifiquen la nueva solución en el punto *B*. El proceso se llama **operaciones de renglón de Gauss-Jordan** y se detalla en el apéndice A.2.7. Los cálculos son tediosos y voluminosos, por lo que la computadora es el medio esencial para resolver los programas lineales. Se pide al lector que haga la prueba con cálculos a mano, al menos una vez, para que pueda apreciar cómo funciona el método. Después de esta experiencia es posible que nunca deba volver a usar cálculos a mano.

La siguiente es una réplica de la tabla de inicio. Asocia a la **columna pivote** y al **renglón pivote** con las variables de entrada y de salida, respectivamente. A la intersección de la columna pivote con el renglón pivote se le llama **pivote** o **elemento pivote**.

	Básica	z	x_1 ↓	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
	z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	
←	s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Renglón pivote
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
	s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
			Columna pivote							

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos:

1. *Renglón pivote*

Nuevo renglón pivote = Renglón pivote actual ÷ Elemento pivote

2. *Todos los demás renglones, incluyendo z*

Nuevo renglón = (Renglón actual) – (Su coeficiente en la columna pivote) × (Nuevo renglón pivote)

Esos cálculos se aplican a la tabla anterior en la siguiente forma:

1. Nuevo renglón pivote x_1 = Renglón pivote s_1 actual ÷ 6
2. Nuevo renglón z = Renglón z actual – (–5) × Nuevo renglón pivote
3. Nuevo renglón s_1 = Renglón s_2 actual – (1) × Nuevo renglón pivote
4. Nuevo renglón s_3 = Renglón s_3 actual – (–1) × Nuevo renglón pivote
5. Nuevo renglón s_4 = Renglón s_4 actual – (0) × Nuevo renglón pivote

La tabla nueva que corresponde a la nueva solución básica (x_1, s_2, s_3, s_4) se convierte en (¡verifíquelo!):

	Básica	z	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
	z	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
	x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
←	s_2	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
	s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Observe que la nueva tabla tiene las mismas propiedades que la de inicio. Cuando se igualan las variables no básicas x_2 y s_1 a cero, la columna *Solución* muestra en forma automática la nueva solución básica ($x_1 = 4$, $s_2 = 2$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$). El nuevo valor objetivo corres-

pondiente es $z = 20$. Este "acondicionamiento" de la tabla es el resultado de aplicar las operaciones renglón de Gauss-Jordan.

La última tabla identifica a x_2 y s_2 como las variables de entrada y de salida, respectivamente. La justificación de esas selecciones es la siguiente: al examinar la tabla se ve que no es óptimo, porque la variable no básica x_2 tiene un coeficiente negativo en el renglón z. Este razonamiento, igual al que usamos en la tabla de inicio, se aclara al expresar el renglón z en la forma

$$z = \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{5}{6}s_1 + 20$$

Es benéfico un aumento en x_2 respecto a su valor actual de cero, porque hará aumentar el valor de z, y por consiguiente x_2 es la variable de entrada.

A continuación, los cálculos de razones de la siguiente tabla indican que s_2 es la variable de salida.

Básica	x_2 entra	Solución	Razón
x_1	$\frac{2}{3}$	4	$x_2 = 4 \div \frac{2}{3} = 6$
s_2	$\frac{4}{3}$	2	$x_2 = 2 \div \frac{4}{3} =$ **1.5** (mínimo)
s_3	$\frac{5}{3}$	5	$x_2 = 5 \div \frac{5}{3} = 3$
s_4	1	2	$x_2 = 2 \div 1 = 2$

Se ve que $x_2 = 1.5$, y que el aumento correspondiente en z es $\frac{2}{3} \times 1.5 = 1$, dando la nueva $z = 20 + 1 = 21$.

Dadas x_2 y s_2 como variables de entrada y de salida, necesitamos aplicar las siguientes operaciones de renglón de Gauss-Jordan para obtener la siguiente tabla.

1. Nuevo renglón pivote x_2 = Renglón pivote s_2 actual $\div \frac{4}{3}$
2. Nuevo renglón z = Renglón actual $z - (-\frac{2}{3}) \times$ Nuevo renglón pivote
3. Nuevo renglón x_1 = Renglón x_1 actual $- (\frac{2}{3}) \times$ Nuevo renglón pivote
4. Nuevo renglón s_3 = Renglón s_3 actual $- (\frac{5}{3}) \times$ Nuevo renglón pivote
5. Nuevo renglón s_4 = Renglón s_4 actual $- (1) \times$ Nuevo renglón pivote

Con estos cálculos se obtiene la siguiente tabla:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Como *ninguno* de los coeficientes del renglón z asociados con las variables no básicas s_1 y s_2 son negativos, esta última tabla es óptima.

Se puede leer la solución óptima en la tabla símplex como sigue: los valores óptimos de las variables en la columna *Básica* se ven en la columna *Solución* del lado derecho, y se pueden interpretar del siguiente modo

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
x_1	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
x_2	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
z	21	La utilidad diaria es $21,000

El lector puede comprobar que los valores $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = \frac{5}{2}$, $s_4 = \frac{1}{2}$ son consistentes con los valores dados de x_1 y x_2.

La tabla símplex muestra una gran cantidad de información adicional, que comprende:

1. El estado de los recursos.
2. El valor por unidad (precios duales) de los recursos.
3. Todos los datos necesarios para efectuar un análisis de sensibilidad con la solución óptima.

Indicaremos aquí cómo se puede determinar el estado de los recursos. Los otros dos puntos se explicarán en el capítulo 4.

Un recurso se llama **escaso** si las actividades (variables) del modelo lo usan por completo. En caso contrario, es **abundante**. Esta información se obtiene en la tabla óptima revisando el valor de la variable de holgura asociada con la restricción que representa al recurso. Si la variable de holgura es cero, el recurso se usa por completo, y el recurso es escaso. En caso contrario, una holgura positiva indica que el recurso es abundante.

En el modelo de Reddy Mikks, las cuatro restricciones se clasifican como sigue:

Recurso	Variable de holgura	Estado o condición
Materia prima, $M1$	$s_1 = 0$	Escasa
Materia prima, $M2$	$s_2 = 0$	Escasa
Límite de demanda 1	$s_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de demanda 2	$s_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

El estado de los recursos indica que está garantizado un aumento en la disponibilidad de las materias primas $M1$ y $M2$, porque los dos son escasos. La cantidad del aumento se puede calcular con procedimientos adecuados de análisis de sensibilidad. Este punto se explicó en las secciones 2.3.2 y 2.3.3 y se examinará con más detalle en el capítulo 4.

El ejemplo 3.3-1 es de una maximización. En una minimización, la selección de las variables de salida es igual que en el caso de la maximización. Para la variable de entrada, ya que máx $z = -\text{mín}(-z)$, el caso de minimización selecciona la variable de entrada como la variable

no básica con el coeficiente objetivo más *positivo*, y se llega a z mínima cuando todos los coeficientes del renglón z son no positivos.

Las reglas para seleccionar las variables de entrada y de salida se llaman **condiciones** de **optimalidad** y de **factibilidad**. Por comodidad se resumirán a continuación esas condiciones, y los pasos del método símplex.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* que tenga el coeficiente más negativo (positivo) en el renglón de z. Los empates se rompen en forma arbitraria. Se llega al óptimo en la iteración en la que todos los coeficientes de las variables no básicas en el renglón z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. En los problemas de maximización y de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la mínima razón no negativa (con denominador *estrictamente positivo*). Los empates se rompen en forma arbitraria.

Los pasos del método símplex son los siguientes:

Paso 0. Determinar una solución básica factible de inicio.

Paso 1. Seleccionar una *variable de entrada* aplicando la condición de optimalidad. Detenerse si no hay variable de entrada; la última solución es la óptima.

Paso 2. Seleccionar una *variable de salida* aplicando la condición de factibilidad.

Paso 3. Determinar la nueva solución básica con los cálculos adecuados de Gauss-Jordan. Ir al paso 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3B

1. Este problema es para reforzar la comprensión del lector acerca de la condición de factibilidad símplex. En la primera tabla del ejemplo 3.3-1 usamos la prueba de la razón mínima (no negativa) para determinar la variable de salida. Esa condición garantiza que ninguno de los nuevos valores de las variables básicas se volverá negativo. Para demostrar eso, haga usted que s_2 salga de la solución básica, en lugar de s_1. Ahora vea la tabla símplex que resulta y notará que s_1 asume un valor negativo (= –12), que indica que la nueva solución no es factible. Este caso nunca se presenta si se emplea la selección de la variable de salida por razón mínima.

2. Se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &\leq 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo.

a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$

b) Maximizar $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$

c) Maximizar $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$

d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$

e) Minimizar $z = -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4$

3. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad + 6x_4 \quad + x_6 \qquad &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \qquad + x_7 \quad &= 3 \\ -x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \qquad\qquad + x_8 &= 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_8 \geq 0 \end{aligned}$$

Sean x_5, x_6, x_7 y x_8 una solución básica factible inicial. Si x_1 se vuelve básica, ¿cuál de las variables básicas mencionadas se debe volver no básica a nivel cero para que todas las variables sigan siendo no negativas, y cuál sería el valor de x_1 en la nueva solución? Repita este procedimiento con x_2, x_3 y x_4.

4. Se tiene el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 4 \\ 6x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 8 \\ 3x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resuelva el problema *por inspección* (no use operaciones de renglón de Gauss-Jordan), y justifique la respuesta en función de las soluciones básicas del método símplex.

b) Repita el punto a) suponiendo que la función objetivo pide minimizar $z = x_1$.

5. Resuelva el siguiente problema *por inspección* y justifique el método de solución en función de las soluciones básicas del método símplex.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5$$

sujeta a

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(*Sugerencia:* una solución básica sólo consiste en una variable.)

6. La siguiente tabla representa una iteración símplex específica. Todas las variables son no negativas. La tabla no es óptima para un problema de maximización ni para uno de minimización. Así, cuando una variable no básica entra a la solución, puede aumentar o disminuir a z, o dejarla igual, dependiendo de los parámetros de la variable no básica.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Solución
z	0	−5	0	4	−1	−10	0	0	620
x_8	0	3	0	−2	−3	−1	5	1	12
x_3	0	1	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	−1	0	0	6	−4	0	0	0

a) Clasifique las variables en básicas y no básicas, y escriba los valores actuales de todas las variables.

b) Suponga que el problema es de maximización; identifique las variables no básicas que tienen el potencial de mejorar el valor de z. Si cada una de esas variables entra a la solución básica, determine la variable de salida asociada, si es que la hay, y el cambio asociado de z. No use operaciones de renglón de Gauss-Jordan.

c) Repita la parte b), suponiendo que el problema es de minimización.

d) ¿Cuál de la(s) variable(s) no básica(s) no causa(n) un cambio en el valor de z, cuando se eligen para entrar a la solución?

7. Se tiene el espacio bidimensional de soluciones de la figura 3.7.

a) Suponga que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2$$

Si las iteraciones símplex comienzan en el punto A, identifique la ruta hasta el punto óptimo E.

b) Determine la variable de entrada, las razones correspondientes de la condición de factibilidad y el cambio en el valor de z, suponiendo que la iteración de inicio se hace en el punto A y que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + x_2$$

c) Repita el punto b) suponiendo que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2$$

8. Se tiene el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = 16x_1 + 15x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 40x_1 + 31x_2 &\leq 124 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

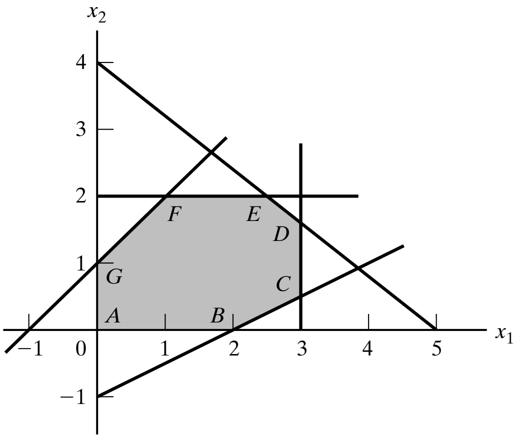


FIGURA 3.7

Espacio de soluciones para el problema 7, del conjunto de problemas 3.3b

a) Resuelva el problema con el método símplex, donde la variable de entrada sea la no básica con el coeficiente *más* negativo en el renglón de z.

b) Resuelva el problema con el algoritmo símplex, seleccionando siempre la variable de entrada como no básica con el coeficiente *menos* negativo en el renglón de z.

c) Compare la cantidad de iteraciones en a) y en b). La selección de variable de entrada como la no básica con el coeficiente *más* negativo del renglón de z, ¿conduce a menor cantidad de iteraciones?

d) Suponga que el sentido de la optimización se cambia multiplicando a z por –1, y ahora es de minimización. ¿Cómo afectaría este cambio a las iteraciones símplex?

9. En el ejemplo 3.3-1 demuestre que el segundo mejor valor óptimo de z se puede determinar de la tabla óptima.

10. ¿Puede usted ampliar el procedimiento del problema 9 para determinar el tercer mejor valor óptimo de z?

11. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsos para rasuradoras y mochilas. En las tres fabricaciones se usa piel y material sintético, pero la piel parece ser la materia prima limitante principal. En el proceso de producción intervienen dos clases de mano de obra especializada: costura y terminado. La tabla siguiente muestra la disponibilidad de los recursos, sus consumos por los tres productos y las utilidades por unidad.

	Requerimientos de recurso por unidad			
Recurso	*Bolso de mano*	*Bolso para rasuradora*	*Mochila*	*Disponibilidad diaria*
Piel (pie^2)	2	1	3	42 pies^2
Costura (hr)	2	1	2	40 hr
Acabado (hr)	1	0.5	1	45 hr
Precio de venta ($)	24	22	45	

a) Formule el problema como programa lineal y resuélvalo con TORA.

b) Con la solución óptima, determine el estado de los recursos.

3.3.3 Iteraciones símplex con TORA

Con TORA se pueden hacer todas las iteraciones símplex en el formato descrito en la sección 3.3.2. Ingrese el modelo de programación lineal en la forma acostumbrada (véase el apéndice B). A continuación, en el menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar), seleccione `Solve` ⇒ `Algebraic` ⇒ `Iterations` ⇒ `All-Slack` (resolver/algebraico/iteraciones/todas holguras). La selección All-Slack indica que la solución básica de inicio consiste sólo en variables de holgura. Las opciones restantes se presentarán en las secciones 3.4, 4.3 y 7.4.2. A continuación, especifique la exactitud que desee en el resultado y haga clic en `Go To Output Screen` (ir a la pantalla de resultados).

La figura 3.8 muestra las iteraciones símplex generadas por TORA para el modelo de Reddy Mikks (archivo ch3ToraReddyMikks.txt). Puede usted generar una o todas las iteraciones, haciendo clic en `Next Iteration` (iteración siguiente) o en `All Iterations` (todas las iteraciones). Si opta usted por generar las iteraciones una por una, podrá especificar las variables de entrada y de salida haciendo clic en los encabezados de su columna y renglón correspondientes. Si sus selecciones son correctas, la columna se vuelve verde y el renglón se vuelve rojo. Si no, aparecerá un mensaje de error. Esta clase de retroalimentación le debe ayu-

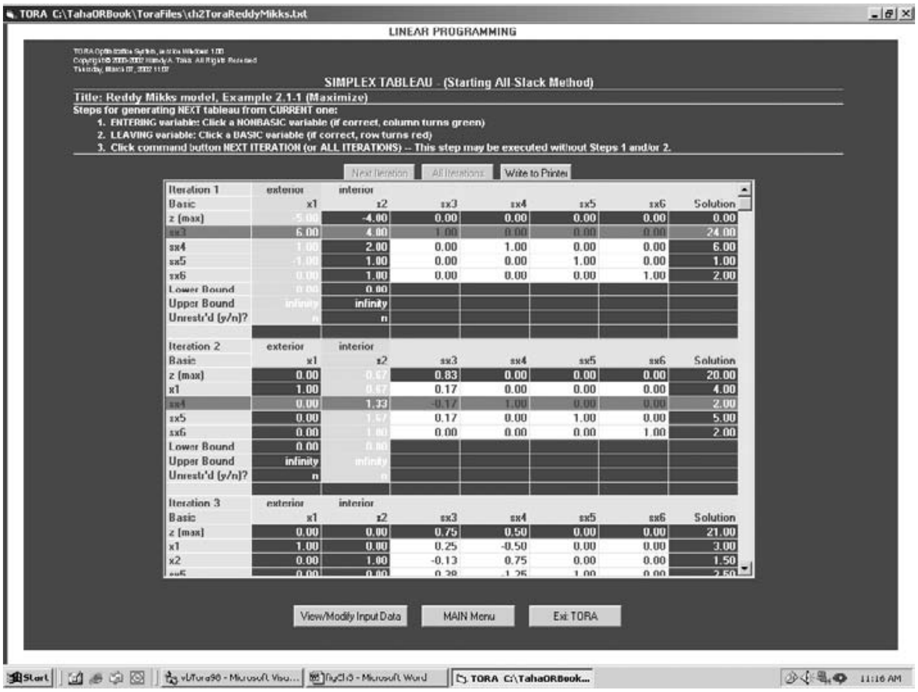


FIGURA 3.8

Iteraciones símplex para el modelo de Reddy Mikks con TORA

dar a concentrarse en comprender los conceptos básicos del método símplex, sin hacer las tediosas operaciones de renglón de Gauss-Jordan.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3C

1. Para el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &\leq 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\leq 3 \\ -x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Use la opción de iteraciones en TORA para determinar la tabla óptima.

b) En la tabla óptima seleccione cualquier variable no básica para "enviar" a la solución básica, y haga clic en `Next Iteration` para obtener la iteración asociada. ¿Cómo se compara el nuevo valor objetivo con el óptimo en a)? La idea es demostrar que la tabla de a) es óptima, porque ninguna de las variables no básicas puede mejorar el valor objetivo.

2. En el problema 1, use TORA para determinar la siguiente solución óptima a partir de la tabla óptima.

3.4 SOLUCIÓN ARTIFICIAL DE INICIO

Como se demostró en el ejemplo 3.3-1, los programas lineales en los que todas las restricciones son ($\leq$) con lados derechos no negativos ofrecen una cómoda solución factible básica de inicio con todas las holguras. Los modelos donde intervienen restricciones del tipo ($=$) o ($\geq$) no poseen esta propiedad.

El procedimiento para iniciar programas lineales "de mal comportamiento" con restricciones ($=$) y ($\geq$) es permitir que **variables artificiales** desempeñen el trabajo de holguras en la primera iteración, para después, en alguna iteración posterior, desecharlas en forma legítima. Aquí presentaremos dos métodos muy relacionados: el método *M* y el método de dos fases.

3.4.1 Método *M*

El método *M* comienza con la programación lineal en forma de ecuación (Sección 3.1). Una ecuación *i* que no tenga una holgura (o una variable que pueda hacer el papel de una holgura) se aumenta con una variable artificial, R_i, para formar una solución de inicio parecida a la solución básica con todas las holguras. Sin embargo, como las variables artificiales son ajenas al modelo de programación lineal, se usa un mecanismo de retroalimentación en el que el proceso de optimización trata en forma automática de hacer que esas variables tengan nivel cero. En otras palabras, la solución final será como si las variables artificiales nunca hubieran existido en primer lugar. El resultado deseado se obtiene *penalizando* las variables artificiales en la función objetivo.

Dado *M*, un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente, $M \rightarrow \infty$), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una **penalización** adecuada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

Al usar esta penalización, el proceso de optimización forzará en forma automática a las variables artificiales para que sean cero (siempre que el problema tenga una solución factible).

Ejemplo 3.4-1

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si se usan x_3 como excedente en la segunda restricción y x_4 como una holgura en la tercera restricción, la forma del problema en ecuación es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La primera y segunda ecuaciones no tienen variables que puedan desempeñar el papel de holguras, pero la tercera sí, porque tiene la holgura x_4. Así, se agregan las variables artificiales R_1 y R_2 en las dos primeras ecuaciones y se penalizan en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$. La programación lineal que resulta es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3} + R_1 \phantom{{}+ R_2 + x_4} &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+ R_1} + R_2 \phantom{{}+ x_4} &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3 + R_1 + R_2} + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En el nuevo modelo se pueden usar ahora R_1, R_2 y x como solución básica de inicio, como se ve en la siguiente tabla (por comodidad se eliminó la columna z, porque no cambia en todas las iteraciones).

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	−4	−1	0	$-M$	$-M$	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Antes de proseguir con los cálculos del método símplex se necesita hacer que el renglón z sea consistente con el resto de la tabla. En forma específica, en la tabla $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, lo cual produce la solución básica de inicio $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $x_4 = 4$. Esta solución indica que el valor de z debe ser $M \times 3 + M \times 6 = 9M$, en lugar de 0 como se ve en el lado derecho del renglón de z. Esta inconsistencia se debe a que R_1 y R_2 tienen coeficientes distintos de cero ($-M$, $-M$) en el renglón de z (compárelo con la solución de inicio con todas las variables de holgura del ejemplo 3.3-1, donde los coeficientes de las holguras en el renglón de z son cero).

Esta inconsistencia se puede eliminar sustituyendo a R_1 y R_2 en el renglón de z usando las ecuaciones adecuadas de restricción para eliminarlas. En particular, observe los elementos marcados (=1) en el renglón R_1 y en el de R_2. Si se multiplica *cada* renglón R_1 y R_2 por M y se agrega la *suma* al renglón z, R_1 y R_2 saldrán del renglón objetivo, esto es

$$\text{Nuevo renglón } z = \text{Renglón anterior } z + (M \times \text{Renglón } R_1 + M \times \text{Renglón } R_2)$$

Entonces, la tabla modificada es la siguiente (¡verifíquelo!):

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	$-4 + 7M$	$-1 + 4M$	$-M$	0	0	0	$9M$
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Observe que la nueva $z = 9M$, lo que ahora es consistente con los valores de la solución básica factible de inicio $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $x_4 = 4$.

La última tabla queda lista para aplicarle el método símplex, con las condiciones de optimalidad y factibilidad presentadas en la sección 3.3.2. Como se está minimizando la función objetivo, la variable x_1, que es la que tiene el coeficiente más *positivo* en el renglón de z (= –4 + 7M) entra a la solución. La razón mínima de la condición de factibilidad especifica que R_1 es la variable que sale.

Una vez determinadas las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se puede calcular con las operaciones familiares de Gauss-Jordan. Observe que el nuevo renglón de z se determina multiplicando el nuevo renglón pivote por –(–4 + 7M) y sumando el resultado al renglón actual de z.

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	0	$\frac{1+5M}{3}$	$-M$	$\frac{4-7M}{3}$	0	0	$4+2M$
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
x_4	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

Esta última tabla muestra que x_2 y R_2 son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Al continuar con los cálculos símplex se necesitarán dos iteraciones más para llegar al óptimo: $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$, $z = \frac{17}{5}$.

Observe que las variables artificiales R_1 y R_2 salen de la solución básica en las iteraciones primera y segunda, resultado consistente con el concepto de penalizar las variables artificiales en la función objetivo.

Acerca del método M se pueden hacer dos observaciones:

1. El uso de la penalización M podrá no forzar la variable artificial hasta el nivel cero en la iteración símplex final, si el problema de programación lineal no tiene una solución factible (es decir, si las restricciones no son consistentes). En este caso, la iteración símplex final incluirá cuando menos una variable artificial a un nivel positivo. En la sección 3.5.4 se demuestra este caso.

2. La aplicación de la técnica M implica, teóricamente, que $M \rightarrow \infty$. Sin embargo, al usar la computadora M debe ser finito, pero *suficientemente grande*. ¿Qué tan grande es "suficientemente grande"? es una pregunta abierta. En forma específica, M debe ser lo bastante grande como para funcionar como penalización. Al mismo tiempo no debe ser tan grande como para perjudicar la exactitud de los cálculos símplex, al manipular una mezcla de números muy grandes y muy pequeños.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4A

1. Calcule a mano la terminación de la iteración símplex del ejemplo 3.4-1 y obtenga la solución óptima.

2. Genere las iteraciones símplex del ejemplo 3.4-1 usando el módulo de Tora `Iterations` ⇒ `M-method` (iteraciones/método M) en el archivo ch3ToraMmethodEx3-4-1.txt). Compare el efecto, sobre la solución, de usar $M = 1$, $M = 10$ y $M = 1000$. ¿Qué conclusión puede sacar de este experimento?

3. En el ejemplo 3.4-1 identifique la tabla de inicio para cada uno de los casos (independientes) que siguen, y desarrolle el renglón z asociado eliminando todas las variables artificiales por sustitución:

a) La tercera restricción es $x_1 + 2x_2 \geq 4$.
b) La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 \leq 6$.
c) La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 = 6$.
d) La función objetivo es maximizar $z = 4x_1 + x_2$.

4. Se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 3 \quad (1) \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 10 \quad (2) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \quad (3) \\ 6x_1 + 7x_2 &\leq 3 \quad (4) \\ 4x_1 + 8x_2 &\geq 5 \quad (5) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para cada uno de los siguientes problemas, desarrolle el renglón de z después de eliminar las variables artificiales por sustitución:
a) Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeta a (1), (3) y (4)
b) Maximizar $z = 2x_1 - 7x_2$ sujeta a (1), (2), (4) y (5)
c) Minimizar $z = 3x_1 + 6x_2$ sujeta a (3), (4) y (5)
d) Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2$ sujeta a (1), (2) y (5)
e) Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeta a (1) y (5)

5. Se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo:
a) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$
b) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$
c) Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + x_3$
d) Minimizar $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$

6. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 4 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema indica que x_3 y x_4 pueden desempeñar el papel de holguras en las dos ecuaciones. Difieren de las holguras porque tienen coeficientes diferentes de cero en la función objetivo. Se pueden usar x_3 y x_4 como variables de inicio pero, como en el caso de las variables artificiales se deben eliminar por sustitución en la función objetivo, para poder hacer las iteraciones símplex. Resuelva el problema con x_3 y x_4 como variables de inicio básicas, y sin usar variables artificiales.

7. Resuelva el siguiente problema usando a x_3 y x_4 como variables básicas factibles de inicio. Como en el problema 6, no use variables artificiales.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad &\geq 7 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 \qquad &= 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

La variable x_3 juega el papel de holgura. Así, no se necesita variable artificial en la primera restricción. Sin embargo, en la segunda sí se necesita una variable artificial. Use esta solución de inicio (x_3 en la primera restricción y R_2 en la segunda) para resolver este problema.

9. Muestre cómo el método *M* indica que el siguiente problema no tiene solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.4.2 Método de dos fases

Debido al impacto potencial adverso del error de redondeo sobre la exactitud del método *M*, donde se manipulan en forma simultánea coeficientes grandes y pequeños, el método de dos fases reduce el problema eliminando por completo la constante *M*. Como su nombre indica, el método resuelve la programación lineal en dos fases: la fase I trata de determinar una solución básica factible de inicio y, si se encuentra, se invoca la fase II para resolver el problema original.

Fase I. El problema se pone en forma de ecuación y se agregan a las restricciones las variables artificiales necesarias (exactamente como en el método *M*) para asegurar una solución básica de inicio. A continuación se determina una solución básica de las ecuaciones resultantes, que *minimice* la suma de las variables artificiales. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de programación lineal no tiene solución factible, y termina el proceso (recuerde que una variable artificial positiva significa que no se satisface una restricción original). En caso contrario, se prosigue a la fase II.

Fase II. Se usa la solución factible de la fase I como solución básica factible de inicio para el problema *original*.

Ejemplo 3.4-2

Usaremos el mismo problema que en el ejemplo 3.4-1.

Fase I.

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + R_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tabla asociada es la siguiente:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método M, se eliminan R_1 y R_2 por sustitución en el renglón de r, usando los siguientes cálculos:

$$\text{Nuevo renglón } r = \text{Renglón } r \text{ anterior} + [1 \times \text{Renglón } R_1 + 1 \times \text{Renglón } R_2)$$

El nuevo renglón r se usa para resolver la fase I del problema, con lo que se obtiene la siguiente tabla óptima (compruébelo con `Iterations` ⇒ `Two-phase Method de TORA`):

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	−1	1	1

Como mínimo de $r = 0$, la fase I produce la solución básica factible $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ y $x_4 = 1$. Llegados a este punto, las variables artificiales ya cumplieron su misión y se pueden eliminar de la tabla las columnas, por completo, y pasar a la fase II.

Fase II. Después de eliminar las columnas artificiales, el problema *original* se escribe así:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \tfrac{1}{5}x_3 \qquad &= \tfrac{3}{5} \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 \qquad &= \tfrac{6}{5} \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En esencia, la fase I es un procedimiento que transforma las ecuaciones originales de restricción en tal forma que se obtiene una solución factible básica de inicio para el problema. La tabla asociada con la fase II del problema es, por consiguiente:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

De nuevo, como las variables básicas x_1 y x_2 tienen coeficientes no cero en el renglón de z, deben sustituirse y eliminarse con los siguientes cálculos:

Nuevo renglón z = Renglón z anterior + ($4 \times$ Renglón x_1 + $1 \times$ Renglón x_2)

La tabla inicial de la fase II resulta entonces

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Como se está minimizando, x_3 debe entrar a la solución. Con la aplicación del método símplex se obtendrá el óptimo en una iteración más (compruébelo con TORA).

La salida de las columnas de las variables artificiales al terminar la fase I sólo se hace cuando todas ellas sean *no básicas* (como ilustra el ejemplo 3.4-2). Sin embargo, es posible que las variables artificiales sigan siendo *básicas* pero a nivel *cero* al final de la fase I. En ese caso, esas variables forman, por necesidad, parte de la solución básica de inicio para la fase II. En consecuencia, se deben modificar los cálculos en la fase II para asegurar que una variable artificial nunca se haga positiva durante las iteraciones en esa fase II.

Las reglas para garantizar que una variable artificial que es *cero* al final de la fase I nunca se vuelva positiva durante la fase II, son las siguientes:

1. Si en la columna pivote el coeficiente de restricción correspondiente a la variable básica artificial es positivo, definirá al *elemento pivote* en forma automática (porque corres-

ponde a la razón mínima de cero) y, como se busca, la variable artificial se vuelve no básica en la siguiente iteración.

2. Si el elemento de la columna pivote es cero, la siguiente iteración dejará la variable artificial inalterada, en el nivel cero.
3. Si el elemento de la columna pivote es negativo, la razón mínima no se asociará con la variable artificial básica (cero). En este caso, si la razón mínima resultante resulta ser positiva, la variable artificial asumirá un valor positivo en la siguiente iteración (¿se da usted cuenta por qué?) y se necesitará evitar que eso suceda. Para hacerlo, se *obliga* a la variable artificial a salir de la solución de cualquier modo. Si se observa que la variable artificial está en el nivel cero, la eliminación de la solución básica no afectará la factibilidad de las variables básicas restantes.

Resumiendo, la regla de la fase II indica obligar a la variable artificial a salir de la solución básica en cualquier momento en que su coeficiente de restricción en la columna de pivote sea positivo o negativo. De hecho, esta regla se puede aplicar al final de la fase I, para eliminar las variables artificiales cero de la solución básica, antes de siquiera comenzar con la fase II (véase el problema 5, conjunto de problemas 3.4b).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4B

1. En la fase I, si la programación lineal es de maximización, ¿se maximiza la suma de las variables artificiales en la fase I? Explique por qué.
2. Para cada caso del problema 4, conjunto de problemas 3.4a, escriba la función objetivo correspondiente en la fase I.
3. Resuelva el problema 5, conjunto de problemas 3.4a, con el método de dos fases.
4. Escriba la fase I para el siguiente problema, y resuélvalo a continuación con TORA para demostrar que no tiene solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Se tiene el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Use TORA para demostrar que la fase I termina con una variable artificial *básica* cero.

b) Con cálculos a mano, haga la fase II con la variable artificial cero como parte de la solución básica de inicio. Asegúrese de que las variables artificiales nunca asuman valores positivos.

c) Demuestre que la variable artificial cero se puede sacar de la solución básica óptima de la fase I (antes de comenzar la fase II) seleccionando una variable de entrada con elemento pivote *no cero* en el renglón de la variable artificial. A continuación haga la fase II con la nueva solución básica.

6. Se tiene el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Use TORA para demostrar que la fase I termina con dos variables artificiales cero en la solución básica.

b) Demuestre que cuando se aplica el procedimiento del problema 5c) al final de la fase I, sólo se puede hacer no básica una de las dos variables artificiales cero.

c) Demuestre que la restricción original asociada con la variable artificial cero que no se puede hacer no básica en b) debe ser redundante; en consecuencia, se puede eliminar por completo su renglón y su columna al iniciar la fase II.

7. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La tabla símplex óptima al final de la fase I se da como:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R	Solución
z	−5	0	−2	−1	−4	0	0
x_2	2	1	1	0	1	0	2
R	−5	0	−2	−1	−4	1	0

Demuestre que las variables no básicas x_1, x_3, x_4 y x_5 nunca pueden asumir valores positivos al final de la fase II. En consecuencia, sus columnas se pueden eliminar antes de iniciar la fase II. En esencia, la eliminación de esas variables reduce las ecuaciones de restricción del problema a $x_2 = 2$. Eso quiere decir que no se necesitará hacer la fase II, porque el espacio de soluciones se reduce a un solo punto.

La conclusión general de este problema es que todas las variables no básicas con coeficientes *estrictamente negativos* en el renglón *z* al final de la fase I se pueden eliminar de la tabla porque nunca pueden asumir valores positivos al final de la fase II. Por cierto, los coeficientes negativos de las variables no artificiales en el renglón *z* sólo pueden presentarse si una variable artificial es básica (a nivel cero) al final de la fase I.

8. Considere el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8$$
$$2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Indique cómo se pueden modificar las desigualdades para obtener un conjunto de ecuaciones que requiera usar sólo una variable artificial (en lugar de dos).

3.5 CASOS ESPECIALES DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO SÍMPLEX

En esta sección se examinarán cuatro casos especiales que se presentan al aplicar el método símplex.

1. Degeneración.
2. Óptimos alternativos.
3. Soluciones no acotadas.
4. Soluciones inexistentes (o no factibles).

El interés de estudiar esos casos especiales es doble: 1) presentar una explicación *teórica* de esos casos, y 2) presentar una interpretación *práctica* de lo que pudieran significar esos resultados especiales en un problema en la vida real.

3.5.1 Degeneración

Al aplicar la condición de factibilidad del método símplex, se puede romper un empate en la razón mínima en forma arbitraria. Cuando se presenta un empate, al menos una variable *básica* será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución es **degenerada**.

No hay que alarmarse al manejar una solución degenerada, a excepción de una pequeña incomodidad teórica de *ciclado*, que describiremos en breve. Desde el punto de vista práctico, la condición indica que el modelo tiene al menos una restricción *redundante.* Para poder presentar mejor perspectiva de los impactos prácticos y teóricos de la degeneración presentaremos un ejemplo numérico, que resolveremos en forma algebraica y gráfica.

Ejemplo 3.5-1 (Solución óptima degenerada)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sean x_3 y x_4 las variables de holgura. La siguiente tabla muestra las iteraciones símplex.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-3	-9	0	0	0
entra x_2	x_3	1	4	1	0	8
sale x_3	x_4	1	2	0	1	4
1	z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
entra x_1	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
sale x_4	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(óptima)	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0	-1	2	0

En la iteración de inicio empatan x_3 y x_4 como variable de salida. Es la razón por la que la variable básica x_4 es cero en la iteración 1, y se obtiene así una solución básica degenerada. Se alcanza el óptimo después de una iteración más.

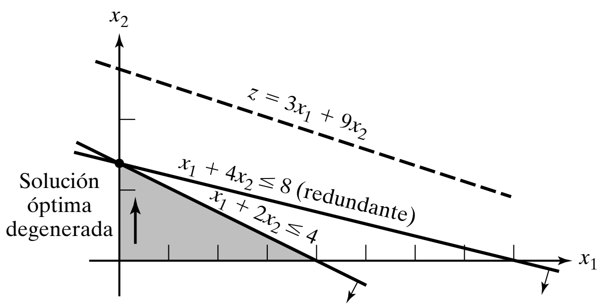
¿Qué implica la degeneración en la práctica? Véase la figura 3.9, que muestra la solución gráfica del modelo. Pasen tres líneas por el punto óptimo ($x_1 = 0, x_2 = 2$). Como éste es un problema bidimensional, el punto está *sobredeterminado* y una de las restricciones es redundante.

En la práctica, el sólo conocer que algunos recursos son superfluos puede ser valioso durante la implementación de la solución. Esta información también puede conducir a descubrir irregularidades en la construcción del modelo. Desafortunadamente no hay técnicas fiables para identificar las restricciones redundantes en forma directa a partir de la tabla.

Desde el punto de vista teórico, la degeneración tiene dos implicaciones. La primera es el fenómeno de **ciclos** o **círculos**. Al ver las iteraciones símplex 1 y 2, el lector notará que el valor objetivo no mejora ($z = 18$). Por consiguiente, es posible que el procedimiento símplex repita una serie de iteraciones sin mejorar el valor objetivo, y nunca terminar los cálculos (véase un ejemplo en el problema 4, conjunto de problemas 3.5a). Aunque hay métodos para eliminar los ciclos, éstos conducen a retardos drásticos en los cálculos. Por esta razón, la mayor parte de los programas informáticos para programación lineal no prevén los ciclos, basados en el hecho que rara vez suceden en la práctica.

FIGURA 3.9

Degeneración de programación lineal en el ejemplo 3.5-1



El segundo aspecto teórico surge al examinar las iteraciones 1 y 2. Las dos, aunque difieren en la clasificación de las variables en básica y no básica, producen valores idénticos para todas las variables y el objetivo, que son

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ z = 18$$

Entonces, ¿es posible detener los cálculos en la iteración 1 (cuando aparece la degeneración por primera vez) aun cuando no sea óptima? La respuesta es no, porque la solución puede ser *temporalmente* degenerada, como se ve en el problema 2, conjunto de problemas 3.5a.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5A

1. Vea la gráfica del espacio de soluciones de la figura 3.10. Suponga que las iteraciones símplex inician en *A* y que la solución óptima está en *D*. Además, suponga que la función objetivo se define de tal modo que x_1 entra primero a la solución.

a) Identifique (en la gráfica) los puntos esquina que definen la trayectoria del método símplex hacia el punto óptimo.

b) Determine la cantidad máxima posible de iteraciones símplex, necesarias para alcanzar la solución óptima, suponiendo que no hay ciclos.

2. Considere la programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Use el módulo algebraico de TORA para demostrar que las iteraciones símplex asociadas son temporalmente degeneradas.

b) Compruebe el resultado resolviendo el problema con el módulo gráfico de TORA.

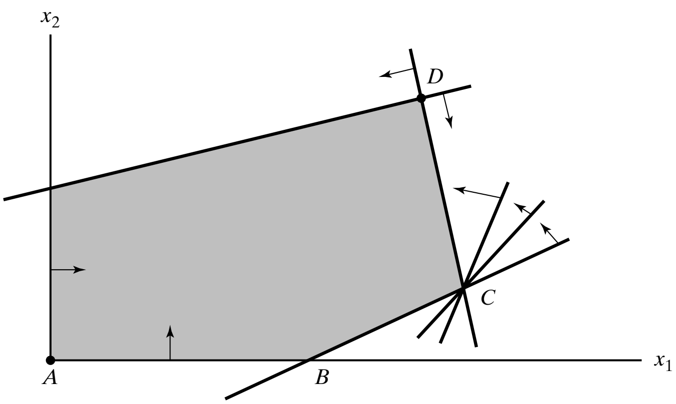


FIGURA 3.10

Espacio de soluciones del problema 1, conjunto de problemas 3.5a

3. Acerca de la programación lineal del problema 2:

a) Use TORA para generar las iteraciones símplex. ¿Cuántas iteraciones se necesitan para llegar al óptimo?

b) Intercambie las restricciones 1 y 3, y vuelva a resolver el problema. ¿Cuántas iteraciones se necesitan para resolverlo?

c) Explique por qué son distintas las cantidades en a) y b).

4. Se tiene el siguiente problema lineal (autor: E. M. Beale):

$$\text{Maximizar } z = \tfrac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - 6x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 &\leq 0 \\ \tfrac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + 3x_4 &\leq 0 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En el menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar) de TORA, seleccione `Solve` ⇒ `Algebraic` ⇒ `Iterations` ⇒ `All-slack` (resolver/algebraico/iteraciones/todas holguras) para mostrar la pantalla de tabla símplex. A continuación recorra las iteraciones símplex sucesivas usando el comando `Next iteration` (iteración siguiente); no use `All iterations` (todas las iteraciones), porque si lo hace el método entrará en un ciclo infinito. Observará que la solución básica factible de inicio, con todas las variables de holgura en la iteración 1, reaparecerá en forma idéntica en la iteración 7. El ejemplo ilustra la ocurrencia de ciclado en las iteraciones símplex, y la posibilidad que existe de que el algoritmo nunca converja hacia la solución óptima.

Es interesante que si se convierten todos los coeficientes de este programa lineal a valores enteros (con los multiplicadores adecuados), el algoritmo símplex llegará al óptimo en una cantidad finita de iteraciones. ¡Haga la prueba!

3.5.2 Óptimos alternativos

Cuando la función objetivo es paralela a una restricción *obligatoria* (es decir, una restricción que se satisface como ecuación en la solución óptima), la función objetivo asumirá el *mismo valor óptimo*, que se llama **óptimos alternativos**, en más de un punto de solución. El siguiente ejemplo muestra que hay una cantidad *infinita* de esas soluciones. También demuestra un significado práctico de encontrar óptimos alternativos.

Ejemplo 3.5-2 (Infinidad de soluciones)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 3.11 muestra cómo pueden presentarse óptimos alternativos en el modelo de programación lineal cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria. Todo punto del *segmento de recta BC* representa un óptimo alternativo con el mismo valor objetivo $z = 10$.

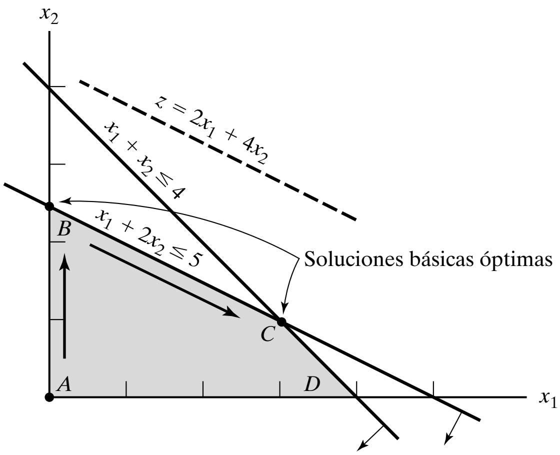


FIGURA 3.11
Óptimos alternativos de la programación lineal en el ejemplo 3.5-2

La siguiente tabla muestra las iteraciones del modelo.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-2	-4	0	0	0
entra x_2	x_3	1	2	1	0	5
sale x_3	x_4	1	1	0	1	4
1 (óptima)	z	0	0	2	0	10
entra x_1	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
sale x_4	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2	z	0	0	2	0	10
(óptima alternativa)	x_2	0	1	1	-1	1
	x_1	1	0	-1	2	3

La iteración 1 llega al óptimo $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$ y $z = 10$, que coincide con el punto B de la figura 3.11. ¿Cómo saber en esta iteración que existen óptimos alternativos? Examine los coeficientes de las variables *no* básicas, en la ecuación z de la iteración 1. El coeficiente de x_1 no básica es cero, lo que indica que x_1 puede entrar a la solución básica sin cambiar el valor de z, pero causando un cambio en los valores de las variables. Eso es justo lo que hace la iteración 2: dejar que x_1 entre a la solución básica, con lo que se obliga a que salga x_4. Esto da como resultado un nuevo punto de solución en C ($x_1 = 3, x_2 = 1, z = 10$). (La opción `Iterations` [iteraciones] de TORA permite determinar óptimos alternativos a partir de la tabla óptima.)

El método símplex sólo determina los dos puntos esquina, B y C. Se pueden determinar matemáticamente todos los puntos (x_1, x_2) en el segmento de recta BC como promedio ponderado no negativo de los puntos B y C. Así, dado $0 \leq \alpha \leq 1$ y que

$$B\text{: } x_1 = 0,\ x_2 = \tfrac{5}{2}$$

$$C\text{: } x_1 = 3,\ x_2 = 1$$

todos los puntos del segmento de recta BC se expresan con

$$\hat{x}_1 = \alpha(0) + (1 - \alpha)(3) = 3 - 3\alpha$$
$$\hat{x}_2 = \alpha(\tfrac{5}{2}) + (1 - \alpha)(1) = 1 + \tfrac{3}{2}\alpha$$

Cuando $\alpha = 0$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (3, 1)$, que es el punto C. Cuando $\alpha = 1$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, \frac{5}{2})$, que es el punto B. Con valores de α entre 0 y 1, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ está entre B y C.

En la práctica, los óptimos alternativos son útiles porque permiten escoger entre muchas soluciones sin que se deteriore el valor objetivo. Por ejemplo, en este caso, la solución en B indica que sólo la actividad 2 está en un nivel positivo, mientras que en C ambas actividades son positivas. Si el ejemplo representa un caso de mezcla de productos, podría ser benéfico, desde el punto de vista de competencia en ventas, fabricar dos productos en lugar de uno. En este caso, la solución C puede ser más atractiva.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5B

1. En la siguiente programación lineal use el módulo de iteraciones de TORA para determinar tres soluciones óptimas básicas alternativas, y a continuación escriba una expresión general para obtener todos los óptimos alternativos no básicos que satisfagan esas tres soluciones básicas.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Resuelva el siguiente programa lineal usando la opción `Iterations` (iteraciones) de TORA:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Con la tabla óptima demuestre que todos los óptimos alternativos no son puntos esquina (es decir, son no básicos). Haga una demostración gráfica bidimensional del tipo de espacio de soluciones y la función objetivo que produzcan este resultado.

3. Para la siguiente programación lineal use la opción `Iterations` (iteraciones) de TORA para demostrar que la solución óptima es degenerada, y que ninguna de las soluciones alternativas es punto esquina.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.5.3 Solución no acotada

En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables pueden aumentar en forma indefinida sin violar alguna de las restricciones, y eso significa que el espacio de soluciones es *no acotado* al menos en una dirección. El resultado es que el valor objetivo puede aumentar (en caso de maximización) o disminuir (si se trata de minimización) en forma indefinida. En ese caso, tanto el espacio de soluciones como el valor óptimo objetivo no están acotados.

La no acotación apunta hacia la posibilidad de que el modelo esté mal construido. Las irregulares más probables en esos modelos son que no se hayan tomado en cuenta una o más restricciones no redundantes, y que los parámetros (constantes) de algunas restricciones puedan no haberse estimado en forma correcta.

Los siguientes ejemplos muestran cómo se puede reconocer la no acotación, tanto del espacio de soluciones como del valor objetivo, en la tabla símplex.

Ejemplo 3.5-3 (Valor objetivo no acotado)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Iteración de inicio.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	−2	−1	0	0	0
x_3	1	−1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

En la tabla de inicio tanto x_1 como x_2 son candidatos para entrar en la solución. Como x_1 tiene el coeficiente más negativo, se selecciona, normalmente, como la variable de entrada. Sin embargo, *todos* los coeficientes de *restricción* bajo x_2 son *negativos* o *cero*, y eso indica que x_2 puede aumentar en forma indefinida sin violar cualquiera de las restricciones (compárese con la interpretación gráfica de la razón mínima, en la figura 3.6). Como cada aumento de una unidad en x_2 aumentará 1 a z, un aumento infinito de x_2 también dará como resultado un aumento infinito en z. Así, el problema no tiene solución acotada. Este resultado se puede ver en la figura 3.12. El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x_2, y el valor de z puede aumentar en forma indefinida.

La regla para reconocer la no acotación es que si en cualquier iteración *todos* los coeficientes de restricción de *toda* variable no básica son cero o negativos, entonces el *espacio de soluciones* no está acotado en esa dirección. Si además el coeficiente objetivo de esa variable es negativo en caso de maximización, o positivo en caso de minimización, entonces también el *valor objetivo* es no acotado.

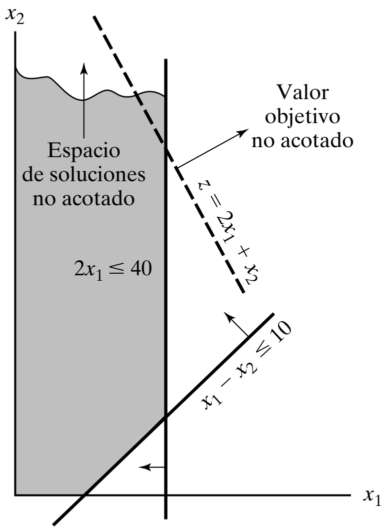


FIGURA 3.12

Solución no acotada de la programación lineal en el ejemplo 3.5-3

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5C

1. Resuelva el ejemplo 3.5-3 usando la opción `Iterations` (iteraciones) de TORA, y demuestre que aunque la solución comience con x_1 como variable de entrada (de acuerdo con la condición de optimalidad), el algoritmo símplex conducirá al final a una solución no acotada.
2. Para la programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 \qquad + \ \ x_3 &\leq 10 \\ x_1 - \ \ x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a) Inspeccione las restricciones y determine la dirección (x_1, x_2 o x_3) en la que el espacio de soluciones no está acotado.

   b) Sin hacer más cálculos, ¿qué puede usted concluir acerca del valor objetivo óptimo?

3. En algunos modelos de PL (programación lineal) mal hechos, el espacio de soluciones puede ser no acotado, aunque el problema pueda tener un valor objetivo acotado. Ese caso puede indicar irregularidades en la construcción del modelo. En los problemas grandes podrá ser difícil detectar la no acotación por inspección. Deduzca un procedimiento para determinar si un espacio de soluciones está acotado o no.

3.5.4 Solución no factible

Los modelos de programación lineal con restricciones inconsistentes no tienen solución factible. Estos casos nunca suceden si *todas* las restricciones son del tipo $\leq$ (suponiendo lados de-

rechos no negativos), porque las holguras permiten tener una solución factible. Para otros tipos de restricciones se usan variables artificiales. Aunque esas variables artificiales se penalizan en la función objetivo, para obligarlas a ser cero en el óptimo, eso sólo puede suceder si el modelo tiene un espacio factible. En caso contrario, al menos una variable artificial será *positiva* en la iteración óptima.

Desde el punto de vista práctico, un espacio no factible indica la posibilidad de que el modelo no esté bien formulado.

Ejemplo 3.5-4 (Espacio de soluciones no factibles)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La tabla siguiente muestra las iteraciones símplex del modelo.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_4	x_3	R	Solución
0	z	$-3-3M$	$-2-4M$	M	0	0	$-12M$
entra x_2	x_3	2	1	0	1	0	2
sale x_3	R	3	4	-1	0	1	12
1	z	$1+5M$	0	M	$2+4M$	0	$4-4M$
(pseudo-óptima)	x_2	2	1	0	1	0	2
	R	-5	0	-1	-4	1	4

La iteración óptima 1 indica que la variable artificial R es *positiva* (= 4), que además indica que el problema es no factible. La figura 3.13 muestra el espacio de soluciones no factibles. Al permitir que la variable artificial sea positiva, el método símplex ha invertido, en esencia, la dirección de la desigualdad de $3x_1 + 4x_2 \geq 12$ a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ (¿puede usted explicar cómo?). El resultado es lo que se puede llamar una **solución pseudo-óptima**.

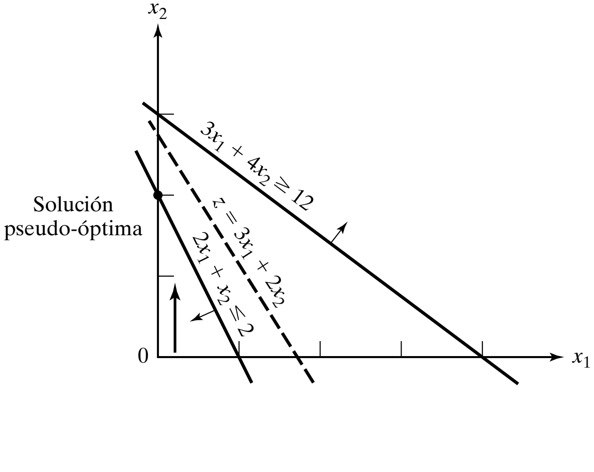


FIGURA 3.13

Solución no factible de la programación lineal en el ejemplo 3.5-4

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5D

1. Toolco produce tres clases de herramientas: *T*1, *T*2 y *T*3. Para ello usa dos materias primas, *M*1 y *M*2, según los datos de la siguiente tabla:

	Unidades de materias primas por herramienta		
Materia prima	*T1*	*T2*	*T3*
*M*1	3	5	6
*M*2	5	3	4

La disponibilidad diaria de las materias primas es 1000 y 1200 unidades, respectivamente. El departamento de ventas informa al gerente de producción que, de acuerdo con sus investigaciones, la demanda diaria mínima de las tres unidades en conjunto debe ser 500 unidades. ¿Podrá satisfacer esa demanda el departamento de producción? En caso negativo, ¿qué es lo más que puede suministrar Toolco de las tres herramientas?

2. En el modelo de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_1 + 3x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Use `Iterations` ⇒ `M-Method` (iteraciones/método M) de TORA para demostrar que la solución óptima incluye una variable artificial básica, pero a nivel cero. Este problema ¿tiene una solución óptima *factible*?

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1990.

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Dantzig, G. y M. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.

Nering, E. y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.

Schrage, L., *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems, Inc., Chicago, 1999.

Taha, H., "Linear Programming", capítulo II-1 en *Handbook of Operations Research*, J. Moder y S. Elmaghraby (eds.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.

PROBLEMAS INTEGRALES

3.1 Una enlatadora pequeña produce cinco artículos enlatados, que se obtienen de tres clases de frutas frescas. En el proceso de manufactura intervienen dos departamentos de producción, diseñados originalmente con capacidades excedentes, para prever expansiones en el futuro. De hecho, la empresa funciona con un turno diario en la actualidad, y fácilmente puede aumentar a dos o tres turnos para satisfacer aumentos en la demanda. La restricción real por lo pronto parece ser la

disponibilidad limitada de fruta fresca. Debido a capacidad limitada de refrigeración en las instalaciones de la compañía, se debe comprar fruta fresca diariamente.

Un joven investigador de operaciones acaba de entrar a la empresa. Después de analizar la producción, decide formular un modelo maestro de programación lineal para la planta. En él intervienen cinco variables de decisión (para los cinco productos) y tres restricciones (para las materias primas). Con tres restricciones y cinco variables, la teoría de la programación lineal establece que la solución óptima no puede incluir más de tres productos. "¡Ajá!", dice el analista "¡la empresa no opera en forma óptima!"

Programa entonces una reunión con el gerente de planta para discutir los detalles de la programación lineal. El gerente, que parece seguir bien el concepto de modelado, concuerda con el analista en que el modelo es una representación cercana a la realidad.

El analista pasa a explicar que, según la teoría de la programación lineal, la cantidad óptima de productos no debe ser mayor que tres, porque el modelo sólo tiene tres restricciones. Entonces, podría vale la pena descontinuar los dos productos menos rentables.

El gerente escucha y le indica al analista que la empresa está comprometida a fabricar los cinco productos, por la naturaleza competitiva del mercado, y que de ninguna manera se puede descontinuar cualesquiera de los productos. El investigador de operaciones responde que la única forma de remediar la situación es agregar cuando menos dos restricciones, en cuyo caso es probable que el modelo de programación lineal óptimo incluya a los cinco productos.

En este punto, el gerente se confunde, porque la idea de tener más restricciones para poder producir más no le sugiere optimalidad alguna. El analista dice al gerente "es lo que dice la teoría de programación lineal".

¿Cuál es la opinión de usted acerca de esta "paradoja"?

3.2[2] Una empresa camionera de transportes, que se especializa en embarques menores que una camionada, funciona en varias terminales localizadas estratégicamente en Estados Unidos. Cuando las cargas llegan a una terminal se clasifican, sea para entregar a clientes locales o para transferir a otras terminales. En las terminales trabajan operadores *oferentes* y *casuales*. Los *oferentes* son empleados sindicalizados a quienes se les garantiza una semana de trabajo de 40 horas. Un empleado ofrecido asignado a uno de los tres turnos normales del día debe trabajar en el mismo turno durante cinco días consecutivos, pero puede comenzar el ciclo en cualquier día de la semana. Los empleados *casuales* se contratan en forma temporal por cualquier cantidad de horas, para manejar los picos que puedan rebasar la capacidad de trabajo de los *oferentes*. El contrato con el sindicato restringe a los empleados casuales a menos de 40 horas a la semana.

Las cargas llegan a la terminal a todas horas y, para fines prácticos, su nivel varía en forma continua de acuerdo con la hora del día. Un estudio de datos históricos indica que el nivel de carga tiene un comportamiento semanal repetitivo, que llega al máximo durante el fin de semana (del viernes al domingo). La política de la empresa dice que una carga debe procesarse en menos de 16 horas a partir de su llegada a la terminal.

Desarrolle un modelo para determinar la asignación semanal de los trabajadores *oferentes*.

---

[2]Basado en un estudio hecho por el autor para una empresa de transportes a nivel nacional.

C A P Í T U L O 4

Análisis de dualidad y sensibilidad

La solución óptima de una programación lineal se basa en una toma instantánea de las condiciones que prevalecen en el momento de formular y resolver el modelo. En el mundo real, los ambientes de decisión rara vez permanecen estáticos, y es esencial determinar cómo cambia la solución óptima cuando cambian los parámetros del modelo. Eso es lo que hace el *análisis de sensibilidad*. Proporciona técnicas de cómputo eficientes para estudiar el comportamiento dinámico de la solución óptima que resulta al hacer cambios en los parámetros del modelo.

Ya explicamos el análisis de sensibilidad a un nivel elemental en la sección 2.3. En este capítulo usaremos la teoría de la dualidad para presentar un tratamiento algebraico de este importante aspecto práctico.

4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El problema **dual** es una programación lineal definida en forma directa y sistemática a partir del modelo original (o **primal**) de programación lineal. Los dos problemas están relacionados en forma tan estrecha que la resolución óptima de un problema produce en forma automática la resolución óptima del otro.

En la mayor parte de las presentaciones de programación lineal, el dual se define para varias formas del primal, dependiendo del sentido de la optimización (maximización o minimización), tipos de restricciones ($\leq$, $\geq$ o $=$), y la orientación de las variables (no negativa o no restringida). Este tipo de tratamiento puede confundir (véase el problema 7, conjunto de problemas 4.1a). Por esta razón presentaremos *una sola* definición que comprenda en forma automática a *todas* las formas del primal.

Nuestra definición del problema dual requiere expresar el problema primal en *forma de ecuaciones*, como se presentó en la sección 3.1: todas las restricciones son ecuaciones, con lado derecho no negativo y todas las variables son no negativos. Este requisito es consistente con el formato de la tabla de inicio símplex. En consecuencia, todo resultado obtenido a partir de la solución primal óptima se aplican en forma directa al problema dual asociado.

Para mostrar cómo se forma el problema dual, se define el primal en *forma de ecuación* como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Las variables x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, incluyen las variables excedentes, holguras y artificiales, si las hay.

La tabla 4.1 muestra cómo se construye el problema dual a partir del primal. De hecho se tiene que:

1. Se define una variable dual por cada ecuación primal (restricción).
2. Se define una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) de una variable primal definen los coeficientes en el lado izquierdo de la restricción dual, y su coeficiente objetivo define el lado derecho.
4. Los coeficientes objetivo del dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de restricción primal.

Las reglas para determinar el sentido de la optimización (maximización o minimización), el tipo de restricción ($\leq$, $\geq$ o $=$), y el signo de las variables duales (siempre no restringido) se resumen en la tabla 4.2. Nótese que el sentido de la optimización en el dual siempre es el opuesto al del primal. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción (es decir, $\leq$ o $\geq$) en el dual es que si el objetivo del dual es *minimización* (es decir, "apunta hacia abajo"), las restricciones son todas del tipo $\geq$ (es decir, "apuntan hacia arriba"). Cuando el objetivo del dual es maximización lo contrario es válido.

TABLA 4.1 Construcción del dual a partir del primal

	Variables primales						
	x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	
Variables duales	c_1	c_2	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
				↑ *j*-ésima restricción dual			↑ Coeficientes objetivo duales

TABLA 4.2 Reglas para construir el problema dual

Objetivo del problema primal[a]	Problema dual		
	Objetivo	*Tipo de restricciones*	*Signo de variables*
Maximización	Minimización	$\geq$	No restringido
Minimización	Maximización	$\leq$	No restringido

[a] Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

En los siguientes ejemplos se demuestra el uso de las reglas de la tabla 4.2, y también se muestra que la definición comprende todas las formas del primal, en forma automática.

Ejemplo 4.1-1

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ \left.\begin{aligned} y_1 + 0y_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\text{ sin restricción} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \text{ sin restricción}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1-2

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 \geq 3$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 5$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -y_1 \qquad &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 \text{ sin restricción} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0)$$

Ejemplo 4.1-3

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
	Sustituir $x_1 = x_1^+ - x_1^-$	
Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$	Maximizar $z = 5x_1^+ - 5x_1^- + 6x_2$	
sujeta a	sujeta a	
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1^+ - x_1^- + 2x_2 = 5$	y_1
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$-x_1^+ + x_1^- + 5x_2 - x_3 = 3$	y_2
$4x_1 + 7x_2 \leq 8$	$4x_1^+ - 4x_1^- + 7x_2 + x_4 = 8$	y_3
x_1 no restringida, $x_2 \geq 0$	$x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sujeta a

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 &\geq -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1 - y_2 + 4y_3 = 5)$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$\left.\begin{aligned} -y_2 \qquad &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ sin restricción} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1 \text{ sin restricción},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0)$$

Las restricciones primera y segunda se sustituyen por una ecuación. La regla general en este caso es que una variable primal no restringida corresponde siempre a una restricción dual de igualdad. A la inversa, una ecuación primal produce una variable dual no restringida.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.1A

1. En el ejemplo 4.1-1, deduzca el problema dual asociado si el sentido de la optimización en el problema primal se cambia a minimización.

2. En el ejemplo 4.1-2 deduzca el problema dual asociado si el problema primal se aumenta con una tercera restricción, $3x_1 + x_2 = 4$.

3. En el ejemplo 4.1-3 demuestre que aun cuando se cambie el sentido de la optimización en el primal a minimización, una variable primal no restringida corresponde siempre a una restricción dual de igualdad.

4. Escriba el dual de cada uno de los siguientes problemas primales:

a) Maximizar $z = -5x_1 + 2x_2$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) Minimizar $z = 6x_1 + 3x_2$

sujeta a

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

c) Maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 - x_2 = 6$$
$$x_1, x_2 \text{ sin restricción}$$

5. Acerca del ejemplo 4.1-1. Para aplicar el método símplex al primal se requiere usar una variable artificial en la segunda restricción del primal, para asegurar una solución básica de inicio. Demuestre que la presencia de una variable artificial en el primal no afecta la definición del dual, porque conduce a una restricción dual redundante.

6. ¿Cierto o falso?

a) El dual del problema dual da como resultado el primal original.

b) Si la restricción primal está originalmente en forma de ecuación, la variable dual correspondiente es necesariamente no restringida.

c) Si la restricción primal es del tipo $\leq$, la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva) dependiendo de si el objetivo primal es maximización (minimización).

d) Si la restricción primal es del tipo $\geq$, la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva) dependiendo si el objetivo primal es minimización o (maximización).

e) Una variable primal no restringida dará como resultado una restricción dual de igualdad.

7. Con frecuencia se citan las siguientes reglas explícitas, en la mayor parte de los libros sobre investigación de operaciones y programación lineal, para formar el problema dual. Demuestre que esas reglas están implícitas en la definición general de la tabla 4.2.

Problema de maximización		Problema de minimización
Restricciones		Variables
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Sin restricción
Variables		Restricciones
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Sin restricción	$\Leftrightarrow$	$=$

4.2 RELACIONES PRIMAL-DUAL

Los cambios que se hacen en el modelo original de programación lineal afectan a los elementos de la tabla óptima actual (el que se tenga en el momento), que a su vez puede afectar la optimalidad y/o la factibilidad de la solución actual. Por esta razón estudiaremos cómo se recalculan los elementos de la tabla símplex óptimo para reflejar los nuevos cambios.

Esta sección comienza con un breve repaso de matrices, que son adecuadas para efectuar los cálculos de la tabla símplex. A continuación se presentan las relaciones entre las soluciones óptimas primal y dual.

4.2.1 Repaso de operaciones matriciales sencillas

En los cálculos de la tabla símplex sólo se usan tres operaciones matriciales elementales: (vector renglón) × (matriz); (matriz) × (vector columna), y (escalar) × (matriz). Por comodidad resumiremos aquí esas operaciones. Primero presentaremos algunas definiciones sobre matrices:[1]

1. Una *matriz* **A**, de tamaño $(m \times n)$, es un arreglo rectangular de m renglones y n columnas.
2. Un *vector renglón* **V**, de tamaño m, es una matriz de $(1 \times m)$.
3. Un *vector columna* **P**, de tamaño n, es una matriz de $(n \times 1)$.

Estas definiciones se pueden representar en forma matemática como sigue:

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_m),\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

1. (Vector renglón × matriz, VA.) La operación sólo se define si el tamaño del vector renglón **V** es igual a la cantidad de renglones de **A**. En ese caso,

$$\mathbf{VA} = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i a_{i1},\ \sum_{i=1}^{m} v_i a_{i2},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} v_i a_{in} \right)$$

[1] En el apéndice A se presenta un repaso de matrices más completo.

Por ejemplo,

$$(11,\ 22,\ 33)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} = (1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33,\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33)$$

$$= (242,\ 308)$$

2. (Matriz × vector columna, AP.) La operación sólo se define si la cantidad de columnas de **A** es igual al tamaño del vector columna **P**. En ese caso,

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}p_j\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}p_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}p_j\end{pmatrix}$$

Para ilustrar, tenemos

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 22\\ 33\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33\\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}242\\ 308\end{pmatrix}$$

3. (Escalar × matriz, αA.) Dada la cantidad escalar (o constante) α, la operación de multiplicación $\alpha\mathbf{A}$ dará como resultado una matriz del mismo tamaño que **A**, cuyo elemento (i,j)-ésimo es igual a αa_{ij}. Por ejemplo, si $\alpha = 10$,

$$(10)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\end{pmatrix}$$

En general, $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$. La misma operación se amplía por igual a la multiplicación de vectores por escalares. Por ejemplo, $\alpha\mathbf{V} = \mathbf{V}\alpha$ y $\alpha\mathbf{P} = \mathbf{P}\alpha$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2A

1. Se tienen las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1 = (11,\ 22),\ \mathbf{V}_2 = (-1,\ -2,\ -3)$$

En cada uno de los casos siguientes indique si la operación matricial respectiva es legítima y, en caso afirmativo, calcule el resultado.

a) $\mathbf{AV}_1$

b) $\mathbf{AP}_1$

c) $\mathbf{AP}_2$

d) $\mathbf{V}_1\mathbf{A}$

e) $\mathbf{V}_2\mathbf{A}$

f) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$

g) $\mathbf{V}_1\mathbf{P}_1$

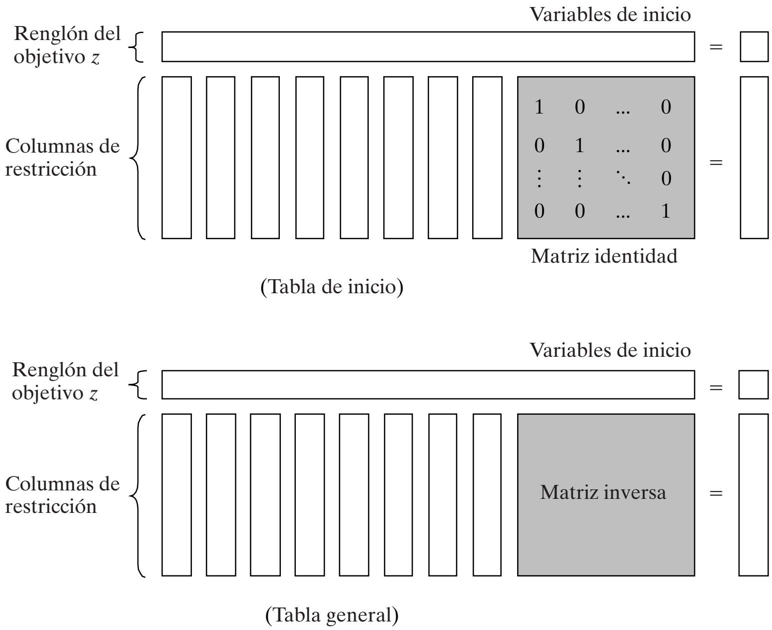


FIGURA 4.1
Esquema de las tablas símplex de inicio y general

4.2.2 Planteamiento de la tabla símplex

En el capítulo 3 se siguió un formato específico para plantear la tabla símplex. Este formato es la base de los desarrollos en este capítulo.

La figura 4.1 es una representación esquemática de las tablas símplex *de inicio* y *general*. En la tabla de inicio, los coeficientes de las restricciones abajo de las variables de inicio forman una **matriz identidad**: todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y fuera de la diagonal principal iguales a cero. Con este arreglo, las demás iteraciones de la tabla símplex, generadas con las operaciones de renglón de Gauss-Jordan (véase el capítulo 3) modificarán los elementos de la matriz identidad para producir la llamada **matriz inversa**. Como veremos en el resto de este capítulo, la matriz inversa es la clave del cálculo de todos los elementos de la tabla símplex asociada.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2B

1. Véase la tabla óptima del ejemplo 3.3-1.

a) Identifique la matriz inversa (óptima).

b) Demuestre que el lado derecho es igual a la inversa multiplicada por el vector del lado derecho de las restricciones originales.

2. Repita el problema 1 con la última tabla del ejemplo 3.4-1.

4.2.3 Solución dual óptima

Las soluciones primal y dual se relacionan en forma tan estrecha que la solución óptima del problema primal produce en forma directa (con unos pocos de cálculos adicionales) la solución óptima del dual. En esta sección se describen dos métodos para calcular este resultado.

Método 1

$$\begin{pmatrix}\text{Valores óptimos}\\ \text{de las variables } \textit{duales}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vector renglón de los coeficientes}\\ \text{objetivos originales de las}\\ \text{variables básicas óptimas } \textit{primales}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inversa } \textit{primal}\\ \text{óptima}\end{pmatrix}$$

Los elementos del vector renglón de los coeficientes objetivos del primal original deben aparecer en el mismo orden que aparecen las variables básicas en la columna *Básica* de la tabla símplex. Esto se explica en el ejemplo 4.2-1.

Método 2

La solución dual óptima se puede determinar resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}\text{Coeficiente } z\text{-}\textit{primal} \text{ óptimo (costo}\\ \text{reducido) de cualquier variable } x_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de la}\\ j\text{-ésima restricción } \textit{dual}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de la}\\ j\text{-ésima restricción } \textit{dual}\end{pmatrix}$$

Observe con cuidado que, como *el dual del problema dual es en sí mismo el problema primal* (compruébelo), los métodos presentados se pueden aplicar en forma simétrica para determinar la solución óptima del primal a partir de la del dual. Esto podría implicar ventajas de cómputo si la cantidad de variables en el primal fuera bastante menor que la cantidad de restricciones. Ya que la cantidad de cálculos símplex depende mucho de la cantidad de restricciones, en este caso es más eficiente resolver el dual, a partir del cual se pueda determinar entonces la solución del primal (véase el problema 1, conjunto de problemas 4.2c).

Ejemplo 4.2-1

Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Para preparar el problema para su solución con método símplex se agrega una holgura x_4 en la primera restricción, y una R artificial en la segunda. Los problemas primal y dual asociado resultantes se definen así:

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$
sujeta a	sujeta a
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	$y_1 + 2y_2 \ge 5$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$	$2y_1 - y_2 \ge 12$
$x_1, x_2, x_3, x_4, R \ge 0$	$y_1 + 3y_2 \ge 4$
	$y_1 \ge 0$
	$y_2 \ge -M (\Rightarrow y_2$ no restringida)

TABLA 4.3 Tabla óptima del primal del ejemplo 4.2-1

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	R	*Solución*
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	$\frac{274}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

La tabla 4.3 muestra la tabla primal óptima. La matriz inversa óptima, que se señala bajo las variables de inicio x_4 y R es

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Ahora indicaremos cómo se determinan los valores duales óptimos usando los dos métodos que se citaron al iniciar esta sección.

Método 1. Primero se observa que las variables primales óptimas aparecen en la tabla en *orden del renglón*, primero x_2 y después x_1. Eso quiere decir que los elementos de los coeficientes originales del objetivo para las dos variables deben aparecer en el mismo orden, que es:

$$\begin{aligned}(\text{Coeficientes objetivo originales}) &= (\text{Coeficiente de } x_2, \text{ coeficiente de } x_1)\\ &= (12,\ 5)\end{aligned}$$

Así, los valores duales óptimos se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}(y_1,\ y_2) &= \begin{pmatrix}\text{Coeficientes objetivo}\\ \text{originales de } x_2,\ x_1\end{pmatrix} \times (\text{Inversa óptima})\\ &= (12,\ 5)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\\ &= \left(\tfrac{29}{5},\ -\tfrac{2}{5}\right)\end{aligned}$$

Método 2. Como el problema dual tiene dos variables se necesitan dos ecuaciones para llegar a la solución. Tomaremos las restricciones duales asociadas con las variables primales de inicio, x_4 y R. Como se ve en la definición de dual, las restricciones duales asociadas con las variables primales de inicio son:

$$\begin{aligned}&\text{Variable de inicio } x_4\text{:} \quad y_1 \geq 0\\ &\text{Variable de inicio } R\text{:} \quad y_2 \geq -M\end{aligned}$$

También, de acuerdo con la tabla óptima (tabla 4.3),

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } x_4 = \tfrac{29}{5}$$

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } R = -\tfrac{2}{5} + M$$

Entonces, de acuerdo con el método 2,

$$\begin{aligned}\tfrac{29}{5} &= y_1 - 0 &&\Rightarrow y_1 = \tfrac{29}{5}\\ -\tfrac{2}{5} + M &= y_2 - (-M) &&\Rightarrow y_2 = -\tfrac{2}{5}\end{aligned}$$

Nótese que en cada ecuación interviene exactamente una variable, y por tanto la solución dual está disponible de inmediato. Éste es siempre el caso de las restricciones duales asociadas con las variables de inicio.

En realidad, las restricciones duales asociadas con dos variables primales *cualesquiera* se podrían usar exactamente igual, para obtener la solución dual. Por ejemplo, en la tabla óptima, las variables primales x_1 y x_3 producirán las siguientes ecuaciones respectivas (¡verifíquelo!):

$$y_1 + 2y_2 - 5 = 0$$

$$y_1 + 3y_2 - 4 = \tfrac{3}{5}$$

La solución de estas dos ecuaciones produce los mismos valores duales óptimos, $y_1 = \frac{29}{5}$ y $y_2 = -\frac{2}{5}$. Sin embargo, obsérvese que las ecuaciones que se obtienen no son tan sencillas como las asociadas con x_4 y R (convénzase usted mismo: dos variables cualesquiera de x_1, x_2, x_3, x_4 y R producirán la misma solución).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2C

1. Resuelva con TORA el dual del problema siguiente, y a continuación determine su solución óptima a partir de la solución del dual. ¿Es mejor este procedimiento desde el punto de vista de cómputo?

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 20 \\ 7x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\geq 30 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\geq 35 \\ 2x_1 + 4x_2 - 15x_3 &\geq 10 \\ 12x_1 + 10x_2 \qquad &\geq 90 \\ x_2 - 10x_3 &\geq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución *óptima* produce la siguiente ecuación objetivo:

$$z + 0x_1 + 23x_2 + 7x_3 + (5 + M)x_4 + 0x_5 = 150$$

donde las variables básicas de inicio son x_4 artificial y x_5 de holgura. Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima a partir de la ecuación de z óptima.

3. En la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

El renglón objetivo óptimo es

$$z + 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 16$$

Con esta información determine la solución dual óptima.

4. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Escriba el problema dual asociado.

b) Dado que las variables básicas óptimas son x_1 y x_3, determine la solución dual óptima asociada.

5. Determine una solución factible del siguiente conjunto de desigualdades, usando el problema dual:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq -4$$
$$3x_1 - 5x_2 \leq 2$$
$$x_1 \text{ sin restricción}$$
$$x_2 \geq 0$$

(*Sugerencia*: aumente la función objetivo trivial maximizar $z = 0x_1 + 0x_2$ a las desigualdades y a continuación resuelva el dual.)

6. Determine el valor óptimo de la función objetivo para el siguiente problema, con sólo inspeccionar el dual (no resuelva el dual por el método símplex).

$$\text{Minimizar } z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4.2.4 Cálculos con la tabla símplex

En esta sección se indica cómo se puede generar toda la tabla símplex en cualquier iteración, a partir de los datos *originales* del problema y la *inversa* asociada con la iteración. Usando la distribución de la tabla símplex de la figura 4.1 se puede dividir los cálculos en dos tipos:

1. Columnas de restricción (lados izquierdo y derecho).
2. Renglón objetivo z.

Cálculos de columnas de restricción. En cualquier iteración símplex, una columna del lado izquierdo o derecho se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de restric-}\\ \text{ción en iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en la}\\ \text{iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna original}\\ \text{de restricción}\end{pmatrix} \qquad (\textit{Fórmula } 1)$$

Cálculos de renglón objetivo *z*. En cualquier iteración símplex, el coeficiente de x_j en la función objetivo se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Coeficiente de la variable}\\ x_j \text{ en la ecuación } \textit{primal}\\ \text{de } z \text{ (costo reducido)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de}\\ \text{la restricción } \textit{dual}\\ \text{correspondiente}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de}\\ \text{la restricción } \textit{dual}\\ \text{correspondiente}\end{pmatrix} \qquad (\textit{Fórmula } 2)$$

Nótese que la fórmula 2 es igual a la que se usó en el método 2, sección 4.2.3, para determinar la solución dual óptima.

Ejemplo 4.2-2

Se usará la programación lineal del ejemplo 4.2-1 para ilustrar la aplicación de las fórmulas 1 y 2. De acuerdo con la tabla óptima de la tabla 4.3,

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

El uso de la fórmula 1 se ilustra calculando todas las columnas de lado izquierdo y lado derecho de la tabla óptima:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_1 \text{ en}\\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en la}\\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna de}\\ x_1 \text{ original}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

De manera parecida se calculan las siguientes columnas de restricción:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_2 \text{ en}\\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_3 \text{ en}\\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{7}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de } x_4 \text{ en}\\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Column de } R \text{ en}\\ \text{la iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de lado}\\ \text{derecho en la}\\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\ \frac{26}{5}\end{pmatrix}$$

A continuación se demostrará cómo se hacen los cálculos del renglón objetivo, con la fórmula 2. Los valores óptimos de las variables duales $(y_1,\ y_2) = (\frac{29}{5},\ -\frac{2}{5})$, se calcularon en el ejemplo

4.2-1, con dos métodos distintos. Estos valores se usan en la fórmula 2 para determinar los coeficientes asociados de z como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{Coeficiente de } x_1 \text{ en } z = y_1 + 2y_2 - 5 = \tfrac{29}{5} + 2 \times -\tfrac{2}{5} - 5 = 0\\
&\text{Coeficiente de } x_2 \text{ en } z = 2y_1 - y_2 - 12 = 2 \times \tfrac{29}{5} - (-\tfrac{2}{5}) - 12 = 0\\
&\text{Coeficiente de } x_3 \text{ en } z = y_1 + 3y_2 - 4 = \tfrac{29}{5} + 3 \times -\tfrac{2}{5} - 4 = \tfrac{3}{5}\\
&\text{Coeficiente de } x_4 \text{ en } z = y_1 - 0 = \tfrac{29}{5} - 0 = \tfrac{29}{5}\\
&\text{Coeficiente de } R \text{ en } z = y_2 - (-M) = -\tfrac{2}{5} - (-M) = -\tfrac{2}{5} + M
\end{aligned}$$

Es importante observar que los cálculos con las fórmulas 1 y 2 se pueden aplicar en cualquier iteración, sea de los problemas primales o duales. Todo lo que se necesita es la inversa asociada con la iteración primal o dual, y los datos de la programación lineal original.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2D

1. En la solución del ejemplo 4.1-2, use la opción `Iterations` ⇒ `M-method` (iteraciones/método M) para generar la primera iteración, y a continuación aplique las fórmulas 1 y 2 para comprobar todos los elementos de la tabla resultante.
2. En el modelo de programación lineal siguiente:

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 14x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
2x_1 + 7x_2 + x_3 \quad &= 21\\
7x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 21\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de cada una de las siguientes soluciones básicas:

a) Variables básicas $= (x_2, x_4)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$

b) Variables básicas $= (x_2, x_3)$, Inversa $= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

c) Variables básicas $= (x_2, x_1)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{7}{45} \end{pmatrix}$

d) Variables básicas $= (x_1, x_4)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

3. Se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad &= 30\\
3x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5 \quad &= 60\\
x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_6 &= 20\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

Compruebe la optimalidad y la factibilidad de cada una de las siguientes soluciones básicas:

a) Variables básicas $= (x_4, x_3, x_6)$, Inversa $= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Variables básicas $= (x_2, x_3, x_1)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) Variables básicas $= (x_2, x_3, x_6)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Compruebe toda la tabla símplex asociada con la siguiente solución básica y compruebe su optimalidad y factibilidad.

$$\text{Variables básicas} = (x_1, x_2, x_5), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \quad &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Identifique la mejor solución entre las siguientes soluciones básicas factibles:

(i) Variables básicas $= (x_4, x_3)$, Inversa $= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(ii) Variables básicas $= (x_2, x_1)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(iii) Variables básicas $= (x_2, x_3)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

b) La solución que se obtuvo en a). ¿Es la óptima del modelo de programación lineal?

6. A continuación se muestra la tabla óptima para un modelo de programación lineal de maximización con tres restricciones $(\leq)$ y todas las variables no negativas. Las variables x_4, x_5 y x_6 son las

holguras asociadas a las tres restricciones. Determine el valor objetivo óptimo asociado en dos formas distintas, usando las funciones objetivo primal y dual.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	−1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	−1	1	2

7. Se tiene el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La siguiente tabla óptima corresponde a valores específicos de b_1 y b_2:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	a	7	d	e	150
x_1	1	b	2	1	0	30
x_5	0	c	−8	−1	1	10

Determine lo siguiente:

a) Los valores b_1 y b_2 del lado derecho

b) Los elementos a, b, c, d, e

c) La solución dual óptima

8. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Aplique el problema dual para comprobar que la solución básica (x_1, x_2) no es óptima.

4.2.5 Valor objetivo primal y dual

En los problemas primal-dual, si uno es de maximización el otro debe ser de minimización. Desde este punto de vista, los valores objetivo en los dos problemas se relacionan de la siguiente manera:

Para cualquier par de soluciones primales y duales *factibles*,

$$\begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{maximización}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{minimización}\end{pmatrix}$$

En el óptimo, la relación es válida estrictamente como ecuación.

Obsérvese que la relación no especifica cuál problema es primal y cuál es dual. En este caso sólo importa el sentido de la optimización (maximización o minimización).

Ejemplo 4.2-3

En el ejemplo 4.2-1, $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{3})$ y $(y_1 = 6, y_2 = 0)$ son soluciones factibles primal y dual. Los valores asociados de las funciones objetivo son $z = 10\frac{2}{3}$ y $w = 60$. También, la solución óptima de los dos problemas, que es $(x_1 = \frac{26}{5}, x_2 = \frac{12}{5}, x_3 = 0)$ y $(y_1 = \frac{29}{5}, y_2 = -\frac{2}{5})$ producen $z = w = 54.8$. Ambos cálculos demuestran la relación mencionada.

La relación indica que para todas las soluciones primales y duales *factibles*, el valor objetivo en el problema de minimización establece siempre una cota superior del valor objetivo en el problema de maximización. Dado que las iteraciones sucesivas del problema de maximización obtienen valores crecientes de z, y las del problema de minimización obtienen valores decrecientes de w, al final, en el curso de las iteraciones, se llegará a un punto de equilibrio donde los valores objetivo de maximización y de minimización deben ser iguales; esto es, $z = w$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2E

1. Estime un intervalo para el valor objetivo óptimo de los siguientes programas lineales:

a) Minimizar $z = 5x_1 + 2x_2$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Maximizar $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

d) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. En el problema 1a) sean y_1 e y_2 las variables duales. Determine si los siguientes pares de soluciones primal-dual son óptimos:

a) $(x_1 = 3, x_2 = 1; \quad y_1 = 4, y_2 = 1)$
b) $(x_1 = 4, x_2 = 1; \quad y_1 = 1, y_2 = 0)$
c) $(x_1 = 3, x_2 = 0; \quad y_1 = 5, y_2 = 0)$

4.3 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

El problema de programación lineal se puede considerar como modelo de asignación de recursos, en el que el objetivo es maximizar los ingresos o las utilidades, sujetos a recursos limitados. Si se aprecia el problema desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interpretaciones económicas interesantes del modelo de programación lineal de asignación de recursos.

Para formalizar la descripción se considerará la siguiente representación de los problemas generales primal y dual, en donde el primal asume el papel de un modelo de asignación de recursos:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
sujeta a	sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$
$x_j \geq 0, \; j=, 2, \ldots, n$	$y_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$

Desde el punto de vista de modelo de asignación de recursos, el problema primal tiene n actividades económicas y m recursos. El coeficiente c_j del primal representa la utilidad por unidad de actividad j. El recurso i, cuya disponibilidad máxima es b_i, se consume con la tasa de a_{ij} unidades por unidad de actividad j.

4.3.1 Interpretación económica de variables duales

En la sección 4.2.5 se indicó que para dos soluciones *factibles* primal y dual cualquiera, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

La igualdad estricta, $z = w$, es válida cuando las soluciones primal y dual son óptimas ambas.

Examinemos primero la condición óptima $z = w$. Como el problema primal representa un modelo de asignación de recursos, se puede imaginar que z representa la utilidad moneta-

ria. Como b_i representa la cantidad disponible de unidades del recurso i, la ecuación $z = w$ se puede expresar en forma dimensional como sigue:

$$\$ = \sum_i (\text{unidades del recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad del recurso } i)$$

Eso quiere decir que las variables duales y_i representan el **valor por unidad** del recurso i. (En la sección 2.3.3 se obtuvo esta misma interpretación, por vía gráfica, sin usar la dualidad.) En las publicaciones, las variables y_i se conocen con el nombre abstracto de **precios duales**. Otros nombres (que de igual manera no sugieren nada) son **precios sombra** y **multiplicadores símplex**.

Con la misma lógica, la desigualdad $z < w$ asociada con dos soluciones asociadas, primal y dual, se interpreta como sigue:

$$(\text{Utilidad}) < (\text{Valor de los recursos})$$

Según esta relación, siempre que los ingresos totales por todas las actividades sean menores que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no son óptimas. La optimalidad (retorno máximo) sólo se alcanza cuando se han explotado los recursos por completo, lo que sólo puede suceder cuando los datos (valor de los recursos) son iguales a los resultados ($ de utilidad). En términos económicos se dice que el sistema permanece *inestable* (no óptimo) cuando los datos (valor de los recursos) son mayores que el resultado (retorno o ingreso). La estabilidad sólo se obtiene cuando las dos cantidades son iguales.

Ejemplo 4.3-1

El modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) y su dual son los siguientes:

Primal de Reddy Mikks	Dual de Reddy Mikks
Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$	Minimizar $w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$
sujeta a	sujeta a
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (recurso 1, $M1$)	$6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (recurso 2, $M2$)	$4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (recurso 3)	$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
$x_2 \leq 2$ (recurso 4)	
$x_1, x_2 \geq 0$	
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$	$y_1 = .75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 = 0, w = 21$

En resumen, el modelo de Reddy Mikks maneja la producción de dos clases de pintura (para exteriores y para interiores) usando dos materias primas, $M1$ y $M2$ (recursos 1 y 2) y sujeta a las condiciones del mercado representadas por las restricciones tercera y cuarta. El modelo busca determinar las toneladas de pinturas para exteriores y para interiores que maximicen la utilidad (expresada en miles de dólares).

La solución dual óptima indica que el valor por unidad de la materia prima $M1$ (recurso 1) es $y_1 = 0.75$ (o sea, $750 por tonelada), y por unidad de materia prima $M2$ (recurso 2) es $y_2 = 0.5$ (es decir, $500 por tonelada). En la sección 2.3.3 mostramos en forma gráfica que esos mismos resultados son válidos para los intervalos (20, 36) y (4, 6.67), para los recursos 1 y 2, respectivamente (esos intervalos también se deducirán en forma algebraica en la sección 4.5.1). Así, la materia prima $M1$ se puede aumentar desde su consumo actual de 24 toneladas, hasta un máximo de 36 toneladas, con un aumento correspondiente en la utilidad de $12 \times \$750$

= \$9000. De igual forma, el límite para la materia prima $M2$ puede aumentarse desde 6 toneladas hasta un máximo de 6.67 toneladas, con un aumento correspondiente en la utilidad de $0.67 \times$ \$500 = \$335. Se pueden mostrar interpretaciones parecidas si bajan las cantidades de materia prima respecto a los niveles actuales, pero dentro de los intervalos de aplicabilidad indicados. La explicación no quiere decir que los recursos mencionados no se puedan cambiar a valores fuera de los intervalos citados. Sólo indica que la utilidad por unidad, para cada recurso, sólo se aplica dentro de los márgenes especificados.

Para los recursos 3 y 4, que representan los requerimientos del mercado, los precios duales (valores duales óptimos) ambos son de cero, lo que indica que sus recursos asociados son abundantes. De aquí que su valor por unidad es cero.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.3A

1. En el ejemplo 4.3-1 calcule el cambio de la utilidad óptima en cada uno de los casos siguientes:

a) La restricción para la materia prima $M1$ (recurso 1) es $6x_1 + 4x_2 \leq 22$.

b) La restricción para la materia prima $M2$ (recurso 2) es $x_1 + 2x_2 \leq 4.5$.

c) Las condiciones del mercado representadas por el recurso 4 son $x_2 \leq 10$.

2. NWAC Electronics fabrica cuatro clases de cables sencillos para un contratista gubernamental. Cada cable debe pasar por cuatro operaciones consecutivas: corte, estañado, encamisado e inspección. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes del caso.

	Minutos por unidad				
Cable	*Corte*	*Estañado*	*Encamisado*	*Inspección*	*Utilidad por unidad (\$)*
SC320	10.5	20.4	3.2	5.0	9.40
SC325	9.3	24.6	2.5	5.0	10.80
SC340	11.6	17.7	3.6	5.0	8.75
SC370	8.2	26.5	5.5	5.0	7.80
Capacidad diaria (minutos)	4800.0	9600.0	4700.0	4500.0	

El contratista garantiza una producción mínima de 100 unidades de cada uno de los cuatro cables.

a) Formule el problema como modelo de programación lineal y use TORA para determinar el programa óptimo de producción.

b) Con base en los precios duales generados por TORA, ¿recomienda usted aumentar la producción diaria de alguna de las cuatro operaciones? Explique por qué.

c) Los requisitos de producción mínima de los cuatro cables, ¿representan una ventaja o una desventaja para NWAC Electronics? Describa una explicación con base en los precios duales que proporciona TORA.

d) La contribución unitaria actual a la utilidad, especificada por el precio dual, ¿puede garantizarse si se aumenta la capacidad del estañado en 10 por ciento?

3. BagCo produce sacos y bolsas de piel. Para un saco se requiere 8 m^2 de piel, y en una bolsa sólo se usan 2 m^2. Las necesidades de mano de obra para los dos productos son 12 y 5 horas, respectivamente. Los suministros semanales actuales de piel y de mano de obra se limitan a 1200 m^2 y a 1850 horas, respectivamente. La empresa vende los sacos y las bolsas a \$350 y a \$120, respectivamente. El objetivo es determinar el programa de producción que maximice los ingresos netos. BagCo planea un aumento de producción. ¿Cuál es el precio mínimo de compra que debería pagar la empresa por piel adicional? ¿Por mano de obra adicional?

4.3.2 Interpretación económica de restricciones duales

Se pueden interpretar las restricciones duales, usando la fórmula 2 de la sección 4.2.4, que indica que en cualquier iteración primal

$$(\text{Coeficiente objetivo de } x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

De nuevo se aplicará el análisis dimensional para interpretar esta ecuación. La utilidad c_j por unidad de actividad j está en $ por unidad. En consecuencia, para tener consistencia, la cantidad $\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ también debe estar en $ por unidad. Además, como c_j representa una utilidad, la cantidad $\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, que aparece en la ecuación con signo contrario, debe representar un costo. Al mismo tiempo, como a_{ij} es la cantidad del recurso i que usa la actividad j, las variables duales y_i deben representar al **costo imputado** por unidad de recurso i y se puede considerar que la cantidad $\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ es el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de actividad j.

La condición de optimalidad de maximización del método símplex indica que un aumento en la cantidad de una actividad j no usada (no básica) puede mejorar la utilidad sólo en caso de que su coeficiente objetivo $(\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j)$ sea negativo. En función de la interpretación anterior, esta condición establece que

$$\begin{pmatrix} \text{Costo imputado de} \\ \text{recursos por unidad} \\ \text{de actividad } j \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \text{Utilidad por unidad} \\ \text{de actividad } j \end{pmatrix}$$

Así, la condición de optimalidad de maximización indica que es económicamente bueno aumentar una actividad a un valor positivo si su utilidad unitaria es mayor que su costo imputado unitario.

Para que el lector se familiarice con la notación normal que se usa en las publicaciones presentaremos la definición

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

que representa el costo imputado de los recursos usados, por unidad de actividad j. La notación $(z_j - c_j)$ es el coeficiente objetivo de x_j en la tabla símplex y se llama con frecuencia **costo reducido** de la actividad j. En realidad, en algunos libros se usa $z_j - c_j$ para calcular en forma directa el coeficiente de la ecuación objetivo (en lugar de usar operaciones de renglón de Gauss-Jordan). El uso de $z_j - c_j$ en los cálculos símplex es, en realidad, una parte del *método símplex revisado* que describiremos en el capítulo 7.

Ejemplo 4.3-2

TOYCO arma tres juguetes: trenes, camiones y coches, con tres operaciones. Los límites diarios de tiempo disponible para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y las utilidades por tren, camión y coche de juguete son $3, $2 y $5, respectivamente. Los tiempos de armado por tren, en las tres operaciones son 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos respectivos por camión y por coche son (2, 0, 4) y (1, 2, 0) minutos (un tiempo de cero indica que no se usa la operación).

Si x_1, x_2 y x_3 representan la cantidad diaria de unidades armadas de trenes, camiones y coches, y si el modelo de programación lineal correspondiente, y su dual son los siguientes:

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeta a	sujeta a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La solución primal óptima indica producir camiones de juguete ($x_2 = 100$) y coches de juguete ($x_3 = 230$), pero no armar trenes ($x_1 = 0$), porque no son rentables.

Suponga que la competencia obliga a TOYCO a producir también trenes de juguete. ¿Cómo se puede hacer la producción? Si se considera el problema desde el punto de vista de la interpretación de $z_1 - c_1$ para x_1, los trenes de juguete tienen atractivo económico sólo si $z_1 < c_1$. Así, TOYCO puede aumentar la utilidad por unidad de c_1 aumentando el precio unitario de venta, o disminuyendo el costo imputado z_1 de los recursos usados $z_1(= y_1 + 3y_2 + y_3)$. Podría no ser posible aumentar la utilidad por unidad, porque TOYCO desea permanecer competitivo en el mercado. Es más plausible una disminución en z_1, porque implica hacer mejoras en las operaciones de ensamble, que principalmente reduzcan su uso unitario de tiempos disponibles para las operaciones. Si r_1, r_2 y r_3 representan las proporciones con las que se reducen los tiempos unitarios de las tres operaciones, el problema requiere determinar r_1, r_2 y r_3 de tal modo que el nuevo costo imputado z_1 de las tres operaciones sea menor que la utilidad unitaria c_1; esto es,

$$1(1 - r_1)y_1 + 3(1 - r_2)y_2 + 1(1 - r_3)y_3 < 3$$

Para los valores dados de $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ y $y_3 = 0$, esta desigualdad se reduce a (¡compruébelo!)

$$r_1 + 6r_2 > 4$$

Así, todos los valores de r_1 y r_2 entre 0 y 1 que satisfagan $r_1 + 6r_2 > 4$ deben hacer que los trenes de juguete sean rentables. Sin embargo podrá ser que no se pueda alcanzar este objetivo, porque requiere reducciones en los tiempos de las operaciones 1 y 2, que no parecen prácticas. Por ejemplo, aun reducciones hasta de 50% en esos tiempos (esto es, $r_1 = r_2 = 0.5$) no satisfacen la condición dada.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.3B

1. Suponga, en el ejemplo 4.3-2, que para los trenes de juguete el tiempo por unidad de operación 2 se puede reducir de 3 minutos a cuando mucho 1.25 minutos. ¿Cuánto debe reducirse el tiempo por unidad de la operación 1 para hacer que los trenes de juguete sean apenas rentables?
2. En el ejemplo 4.3-2 suponga que TOYCO estudia la posibilidad de introducir un cuarto juguete: carro de bomberos. En el armado no se usa la operación 1. Sus tiempos de armado por unidad en las operaciones 2 y 3 son 1 y 3 minutos, respectivamente. La utilidad por unidad es $4. ¿Aconsejaría usted a TOYCO que introdujera este nuevo producto?

3. En JoShop se usan tornos y taladros verticales para producir cuatro clases de partes para maquinaria: *PP*1, *PP*2, *PP*3 y *PP*4. En la tabla siguiente se resumen los datos pertinentes.

	Tiempo de maquinado, minutos por unidad de				
Máquina	*PP*1	*PP*2	*PP*3	*PP*4	*Capacidad (minutos)*
Tornos	2	5	3	4	5300
Taladros verticales	3	4	6	4	5300
Utilidad por unidad ($)	3	6	5	4	

Para las partes que no se producen con la solución óptima actual, determine la tasa de deterioro en la utilidad óptima por aumento unitario de cada uno de esos productos.

4. Acerca de la solución óptima del problema 3, para JoShop, la empresa estima que por cada parte que no se produce (de acuerdo con la solución óptima) se puede obtener una reducción del 20% del tiempo de maquinado, en toda la tabla, por mejoras en el proceso. ¿Harían las mejoras que esas partes fueran rentables? Si no, ¿cuál es el porcentaje mínimo de reducción necesario para obtener rentabilidad?

4.4 OTROS ALGORITMOS SÍMPLEX PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

En el algoritmo símplex presentado en el capítulo 3, el problema se inicia en una solución básica factible. Las iteraciones sucesivas siguen siendo básicas y factibles, pero avanzan hacia la optimalidad, hasta llegar al óptimo en la última iteración. A veces se llama método **símplex primal** a este algoritmo.

Esta sección presenta dos algoritmos más: el **símplex dual** y el **símplex generalizado**. En el símplex dual, la programación lineal se inicia en una solución básica que es (mejor que la) óptima, pero no es factible, y las iteraciones sucesivas siguen siendo básica y (mejores que la) óptima, a medida que se acercan a la factibilidad. En la última iteración se encuentra la solución factible (óptima). En el método símplex generalizado se combinan los métodos símplex primal y dual en un solo algoritmo. Maneja problemas que comienzan siendo no óptimos y no factibles a la vez. En este algoritmo se asocian las iteraciones sucesivas con soluciones básicas (factibles o no factibles). En la iteración final la solución es óptima y no factible al mismo tiempo (suponiendo, claro está, que exista una).

Se pueden aplicar los tres algoritmos, el primal, el dual y el generalizado con eficacia en los cálculos del análisis de sensibilidad, lo que se indicará en la sección 4.5.

4.4.1 Método dual símplex

Como en el método símplex (primal), la base el método símplex dual es que cada iteración siempre esté asociada a una solución básica. Las condiciones de optimalidad y factibilidad se establecen para preservar la optimalidad de las soluciones básicas y al mismo tiempo mover las iteraciones de la solución hacia la factibilidad.

Condición dual de factibilidad. La variable de salida x_r es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen en forma arbitraria). Si todas las variables básicas son no negativas, termina el algoritmo.

Condición dual de optimalidad. La variable de entrada se determina entre las variables no básicas, como la que corresponde a

$$\min_{\text{No básica } x_j}\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{\alpha_{rj}}\right|, \alpha_{rj} < 0\right\}$$

donde $z_j - c_j$ es el coeficiente objetivo del renglón z en la tabla, y α_{rj} es el coeficiente *negativo* de restricción de la tabla, asociado con el renglón de la variable de salida x_r, y con la columna de la variable x_j no básica. Los empates se rompen arbitrariamente.

Observe que la *condición de optimalidad dual* garantiza que se mantendrá la optimalidad en todas las iteraciones.

Para el inicio de una programación lineal que sea óptima y no factible a la vez, se deben satisfacer dos requisitos:

1. La función objetivo debe satisfacer la condición de optimalidad del método símplex regular (capítulo 3).
2. Todas las restricciones deben ser del tipo ($\leq$).

Por la segunda condición se requiere convertir toda ($\geq$) a ($\leq$), sólo multiplicando ambos lados de la desigualdad ($\geq$) por -1. Si en la programación lineal hay restricciones ($=$) se puede reemplazar la ecuación con dos desigualdades. Por ejemplo,

$$x_1 + x_2 = 2$$

equivale a

$$x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 \geq 1$$

o bien

$$x_1 + x_2 \leq 1,\ -x_1 - x_2 \leq -1$$

Después de convertir todas las restricciones en ($\leq$), la programación lineal tendrá una solución de inicio no factible si, y sólo si al menos uno de los lados derechos de las desigualdades es estrictamente negativo. En caso contrario, si z es óptima y ninguno de los lados derechos es negativo no habrá necesidad de aplicar el método símplex dual, porque la solución de inicio ya es óptima y factible.

Ejemplo 4.4-1

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este ejemplo se multiplican por -1 las dos primeras desigualdades para convertirlas a restricciones ($\leq$). Así, la tabla de inicio es:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	-3	-2	0	0	0	0
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	1	1	0	0	1	3

La tabla comienza óptima (todas las $z_j - c_j \leq 0$ en el renglón z) y la solución básica de inicio es no factible ($x_3 = -3$, $x_4 = -6$, $x_5 = 3$).

Según la condición dual de factibilidad, x_4 $(= -6)$ es la variable de salida. La tabla siguiente muestra cómo se usa la condición dual de optimalidad para determinar la variable de entrada.

Variable	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Renglón de z $(z_j - c_j)$	-3	-2	0	0	0
Renglón de x_4, α_{4j}	-4	-3	0	1	0
Razón, $\left\lvert \frac{z_j - c_j}{\alpha_{4j}} \right\rvert$, $\alpha_{4j} < 0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	—	—	—

Las razones indican que x_2 es la variable de entrada. Observe que una variable x_j es candidata para entrar a la solución básica sólo que su α_{ij} sea estrictamente negativa. Eso quiere decir que no se deben tener en cuenta las variables x_3, x_4 y x_5.

La siguiente tabla se obtiene con las conocidas operaciones de renglón.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	4
x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	1
Razón	$\frac{1}{5}$	—	—	2	—	

Esta tabla muestra que sale x_3 y entra x_1, y así se obtiene la siguiente tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{21}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{6}{5}$

Esta última tabla es factible (y óptima) por lo que se termina el algoritmo. La solución correspondiente es $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ y $z = \frac{21}{5}$.

Para reforzar la comprensión del método símplex dual por parte del lector, la figura 4.2 muestra en forma gráfica la trayectoria seguida por el algoritmo para resolver el ejemplo 4.4-1. Se inicia en el punto extremo *A* (que es no factible y mejor que el óptimo), pasa a *B* (que todavía es no factible y mejor que el óptimo) y por último se vuelve factible en *C*. En este punto termina el proceso, con *C* como solución óptima factible.

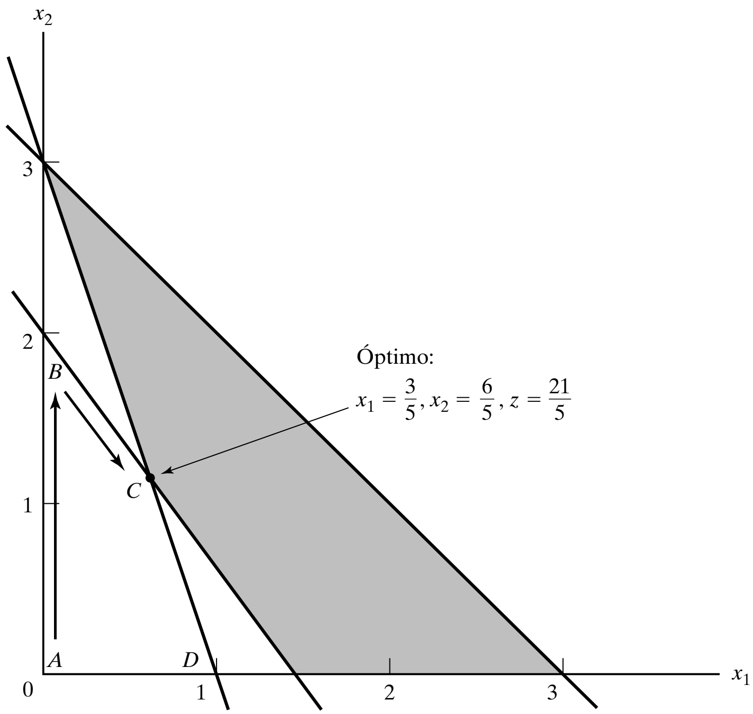
El programa TORA contiene un módulo tutorial para el método símplex dual. En el menú `Resolver/Modificar` seleccione `Resolver` ⇒ `Algebraico` ⇒ `Iteraciones` ⇒ `Símplex Dual`. Recuerde que necesita convertir las restricciones (=) en desigualdades. Sin embargo, no necesitará convertir las restricciones (≥), porque TORA convierte en forma automática la tabla de inicio símplex dual. Si la programación lineal no satisface los requisitos iniciales del símplex dual, aparecerá un mensaje en la pantalla.

Como en el método símplex regular, el módulo tutorial le permite seleccionar desde antes a las variables de entrada y de salida. A continuación, una retroalimentación adecuada le avisa si su selección es correcta.

Se pide al lector usar todo lo posible el modo tutorial de TORA, con el conjunto de problemas 4.4a, para evitar la tediosa tarea de hacer las operaciones de renglón de Gauss-Jordan. De esta forma se podrá concentrar en comprender los conceptos principales del método.

FIGURA 4.2

Proceso iterativo símplex dual para el ejemplo 4.4-1



CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.4A

1. Vea el espacio de soluciones en la figura 4.3, donde se desea determinar el punto extremo óptimo que use el método símplex *dual* para minimizar $z = 2x_1 + x_2$. La solución óptima está en el punto $F(0.5, 1.5)$ de la gráfica.

a) Si la solución básica de inicio (no factible, pero mejor que el óptimo) está en el punto G, ¿sería posible que las iteraciones del método símplex dual siguieran la trayectoria $G \rightarrow E \rightarrow F$? Explique por qué.

b) Si la solución básica de inicio (no factible) inicia en el punto L, identifique una trayectoria posible del método símplex dual que conduzca al punto óptimo factible en F.

2. Genere las iteraciones símplex dual para los problemas siguientes, usando TORA, y describa la trayectoria del algoritmo en el espacio gráfico de soluciones.

a) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) Minimizar $z = 5x_1 + 6x_2$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$4x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

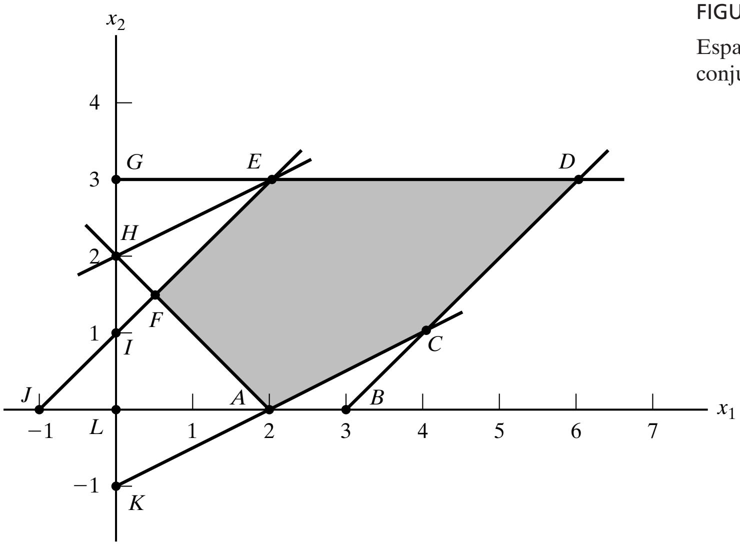


FIGURA 4.3

Espacio de soluciones para el problema 1, conjunto de problemas 4.4a

c) Minimizar $z = 4x_1 + 2x_2$
sujeta a

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$3x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

d) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeta a

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. *Símplex dual con restricciones artificiales*. Se tiene el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 4$$
$$-x_1 + 9x_2 - x_3 \geq 3$$
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución básica de inicio formada por x_4 y x_5 de excedente, y x_6 de holgura, no es factible porque $x_4 = -4$ y $x_5 = -3$. Sin embargo, el símplex dual no se aplica en forma directa, porque x_1 y x_3 no satisfacen la condición de optimalidad de maximización. Demuestre que al aumentar la restricción artificial $x_1 + x_3 \leq M$ (siendo M lo suficientemente grande para no eliminar algún punto factible en el espacio original de soluciones) y después usar la nueva restricción como renglón de pivote, al seleccionar x_1 como la variable de entrada (por tener el coeficiente objetivo más negativo) se obtendrá un renglón objetivo óptimo. A continuación aplique el método símplex dual normal con el problema modificado.

4. Use el procedimiento de la restricción artificial, que se describió en el problema anterior, para resolver los problemas siguientes con el método símplex dual. En cada caso indique si la solución resultante es factible, no factible o no acotada.

a) Maximizar $z = 2x_3$
sujeta a

$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 8$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) Maximizar $z = x_1 - 3x_2$
sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

c) Minimizar $z = -x_1 + x_2$
sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\geq 5 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - 5x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

d) Maximizar $z = 2x_3$
sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 7x_3 &\geq 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 \\ 3x_1 + x_2 - 10x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Resuelva la siguiente programación lineal de tres formas distintas (use TORA por comodidad). Describa su opinión acerca de cuál método parece ser el más eficiente, desde el punto de vista computacional.

$$\text{Minimizar } z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 &\geq 12 \\ x_2 - 5x_3 - 6x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.4.2 Algoritmo símplex generalizado

El algoritmo símplex (primal) del capítulo 3 inicia siendo factible, pero no óptimo. El símplex dual comienza mejor que el óptimo, pero no factible. ¿Y si un modelo de programación lineal iniciara no óptimo y no factible al mismo tiempo? Hemos visto que el símplex primal tiene en cuenta la no factibilidad de la solución de inicio usando variables artificiales. En forma parecida, el símplex dual tiene en cuenta la no optimalidad usando restricciones artificiales (véase el problema 3, conjunto 4.4a). Aunque esos procedimientos tienen por objeto ampliar el cómputo *automático*, los detalles pueden hacer perder de vista lo que realmente implica el algoritmo símplex, que es que la solución óptima de una programación lineal siempre se asocia con una solución de punto de esquina (o básica). Con base en esta observación el lector debería poder "adaptar" su propio algoritmo símplex para modelos de programación lineal que inician siendo no óptimos y no factibles a la vez. En el siguiente ejemplo se ilustra lo que se llama algoritmo símplex generalizado.

Ejemplo 4.4-2

El modelo de programación lineal del problema 4a), del conjunto 4.4a, se puede poner en la tabla siguiente, en el que la solución básica de inicio (x_4, x_5, x_6) es al mismo tiempo no óptima (por x_3) y no factible (por $x_4 = -8$). (La primera ecuación se multiplicó por -1 para revelar la no factibilidad en forma directa, en la columna *Solución*.)

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	−2	0	0	0	0
x_4	1	−2	2	1	0	0	−8
x_5	−1	1	1	0	1	0	4
x_6	2	−1	4	0	0	1	10

El problema se puede resolver sin usar variables ni restricciones artificiales, como sigue: quitar primero la no factibilidad aplicando una versión de la condición símplex dual de factibilidad, que seleccione a x_4 como variable de salida. Para determinar cuál es la variable de entrada todo lo que se necesita es una variable no básica cuyo coeficiente de restricción en el renglón x_4 sea estrictamente negativo. Se puede hacer la selección sin cuidarse de mantener la optimalidad, porque de cualquier manera es no existente en este punto (compárela con la condición de optimalidad dual). El resultado es la siguiente tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	−2	0	0	0	0
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	−1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
x_5	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0
x_6	$\frac{3}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	1	14

Ahora la solución en esta tabla es factible, pero no óptima, y podremos usar el símplex primal para determinar la solución óptima. En general, si no nos hubiéramos encontrado la factibilidad en la tabla anterior, habría que repetir el procedimiento las veces necesarias hasta satisfacer la factibilidad, o hasta que haya pruebas de que el problema no tenga solución factible. Una vez establecida la factibilidad, el siguiente paso es atender la optimalidad, aplicando la condición adecuada de optimalidad del método símplex primal.

La esencia del ejemplo 4.4-2 es que el método símplex no es rígido. En las publicaciones abundan las variaciones del método símplex (por ejemplo, el método primal-dual, el método simétrico, el método entrecruzado y el método múltiplex) que dan la impresión que cada uno es distinto, cuando en realidad todos buscan una solución de punto esquina, con inclinación hacia los cálculos automáticos y quizá hacia la eficiencia de cómputo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.4B

1. El modelo de programación lineal, en el problema 4c), conjunto 4.4a, no tiene solución factible. Indique cómo se detecta esta condición en el *procedimiento símplex generalizado*.
2. El modelo de programación lineal del problema 4d), conjunto 4.4a, no tiene solución acotada. Indique cómo se detecta esta condición en el *procedimiento símplex generalizado*.

4.5 ANÁLISIS POSTÓPTIMO O DE SENSIBILIDAD

En la sección 2.3 se describió el análisis de sensibilidad a un nivel elemental. En esta sección se aplicará la dualidad y los cálculos primal-dual de la sección 4.2 para examinar el tema en forma más completa.

El análisis de sensibilidad investiga el cambio de la solución óptima que resulta de hacer cambios en los parámetros del modelo de programación lineal. La tabla siguiente contiene todos los casos posibles que pueden surgir en el análisis de sensibilidad, así como las acciones necesarias para obtener la nueva solución (suponiendo que exista):

Condición resultante de los cambios	Acción recomendada
La solución actual queda ótima y factible.	No es necesaria acción alguna.
La solución actual se vuelve no factible.	Usar el símplex dual para recuperar la factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Usar el símplex primal para recuperar la optimalidad.
La solución actual se vuleve no óptima y no factible, al mismo tiempo.	Usar el método símplex generalizado para obtener una nueva solución.

Los tres primeros casos se investigarán en esta sección. El cuarto, como es una combinación de los casos 2 y 3, se tratará en el problema integral 4.3.

El modelo de TOYCO en el ejemplo 4.3-2 servirá para explicar los distintos procedimientos. Recuérdese que ese modelo es del ensamble de tres clases de juguetes: trenes, camiones y coches. Cada artículo requiere tres operaciones sucesivas. Se desea determinar la cantidad de unidades de cada juguete que haga máxima a la utilidad. A continuación se repiten el modelo y su dual, por comodidad.

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeta a	sujeta a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La tabla óptima asociada para el primal es:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

4.5.1 Cambios que afectan la factibilidad

La factibilidad de la solución óptima en el momento sólo puede variar si 1) cambia el lado derecho de las restricciones, o 2) se agrega al modelo una restricción nueva. En ambos casos se tiene no factibilidad cuando al menos un elemento del lado derecho en la tabla óptima se hace negativo; esto es, una o más de las variables básicas actuales se vuelve negativa.

Cambios en el lado derecho. Estos cambios requieren volver a calcular el lado derecho de la tabla, usando la fórmula 1 de la sección 4.2.4, esto es,

$$\begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de}\\ \text{la tabla en la iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en}\\ \text{la iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de}\\ \text{la iteración } i\end{pmatrix}$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla expresa los valores de las variables básicas. El siguiente ejemplo ilustrará el procedimiento.

Ejemplo 4.5-1

Suponga que TOYCO desea ampliar sus líneas de ensamble aumentando en 40% la capacidad diaria de cada una, hasta 602, 644 y 588 minutos, respectivamente. Con esos aumentos, el único cambio que se hará en la tabla óptima es el lado derecho de las restricciones (y el valor objetivo óptimo). Así, la nueva solución básica se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 328 \end{pmatrix}$$

Así, las variables básicas actuales —x_2, x_3 y x_6— siguen siendo factibles con los nuevos valores 140, 322 y 28. La utilidad óptima correspondiente es \$1890.

Aunque la nueva solución es atrayente, tanto desde el punto de vista de mayor utilidad, TOYCO reconoce que para implementarla pasará algo de tiempo. En consecuencia se hizo otra proposición que es cambiar la holgura de capacidad de la operación 3 ($x_6 = 20$ minutos) a la capacidad de la operación 1, con lo que cambia la combinación de las tres operaciones a 450, 460 y 400 minutos, respectivamente. La solución resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Esta solución es no factible, porque $x_6 = -40$. Se aplicará el método símplex dual para recuperar la factibilidad. Primero se modifica el lado derecho de la tabla, como se ve en la columna sombreada. Observe que el valor asociado de $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = \$1370$.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1370
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	110
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	-40

Comenzando con el símplex dual, sale x_6 y entra x_4, con lo que la tabla óptima factible es la siguiente (en general, el símplex dual requerirá más de una iteración para recuperar la factibilidad).

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	5	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1350
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_4	-1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20

La solución óptima (en función de x_1, x_2 y x_3) queda igual que en el modelo original. También se demuestra que no se usó la capacidad adicional para la operación 1 ($x_4 = 20$). La única conclusión entonces es que la operación 2 es el cuello de botella.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5A

1. En el modelo de TOYCO mencionado al iniciar la sección 4.5, indique si es mejor asignar la capacidad en exceso de 20 minutos a la operación 3 que a la operación 2 en lugar de la operación 1.

2. Suponga que TOYCO desea cambiar las capacidades de las tres operaciones de acuerdo con los casos siguientes:

a) $\begin{pmatrix}460\\500\\400\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}500\\400\\600\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}300\\800\\200\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}450\\700\\350\end{pmatrix}$

Use análisis de sensibilidad para determinar la solución óptima en cada caso.

3. En el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.1-1, aparece su tabla óptima en el ejemplo 3.3-1. Si las disponibilidades diarias de las materias primas *M*1 y *M*2 aumentan a 28 y 8 toneladas, respectivamente, aplique el análisis de sensibilidad para determinar la nueva solución óptima.

4. Ozark Farm tiene 20,000 pollos a los que alimentan durante 8 semanas antes de ponerlos en el mercado. El alimento semanal de cada pollo varía según el siguiente programa:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
lb/pollo	0.26	0.48	0.75	1.00	1.30	1.60	1.90	2.10

Para llegar a un peso deseado en 8 semanas, el alimento debe satisfacer las necesidades nutritivas, para lo cual se mezclan los ingredientes. Aunque es grande una lista normal de ingredientes, para simplificar limitaremos el modelo sólo a tres de ellos: caliza, maíz y soya. También las necesidades nutritivas se limitarán a tres tipos: calcio, proteína y fibra. La tabla siguiente resume el contenido nutritivo de los ingredientes seleccionados, así como su costo.

	Contenido (lb) por lb de			
Ingrediente	*Calcio*	*Proteína*	*Fibra*	*$ por lb*
Caliza	0.380	0.00	0.00	0.12
Maíz	0.001	0.09	0.02	0.45
Soya	0.002	0.50	0.08	1.60

La mezcla de ingredientes debe contener:

a) Al menos 0.8%, pero no más de 1.2% de calcio

b) Al menos 22% de proteínas

c) Al menos 5% de fibra cruda

Desarrolle un programa óptimo para el periodo de 8 semanas.

Intervalo de factibilidad de los elementos del lado derecho. Otra forma de examinar el efecto de cambiar la disponibilidad de los recursos (es decir, el vector del lado derecho) es determinar el intervalo para el cual la solución actual o del momento permanece factible. El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

Ejemplo 4.5-2

En el modelo de TOYCO, suponer que lo que interesa es determinar el intervalo de factibilidad de la capacidad de la operación 1. Se puede hacer reemplazando el lado derecho con

$$\begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}$$

La cantidad D_1 representa el cambio en la capacidad de la operación 1, arriba y abajo del valor actual de 430 minutos. La solución actual básica permanece factible si todas las variables básicas son no negativas, esto es,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 + D_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + \frac{D_1}{2} \\ 230 \\ 20 - 2D_1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estas condiciones conducen a las siguientes cotas de D_1:

$$(x_2 \geq 0): 100 + \tfrac{D_1}{2} \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200$$

$$(x_3 \geq 0): x_3 \text{ es independiente de } D_1$$

$$(x_6 \geq 0): 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10$$

Así, la solución básica actual permanece factible cuando

$$-200 \leq D_1 \leq 10$$

Esto equivale a variar los minutos de disponibilidad de la operación en el intervalo

$$430 - 200 \leq (\text{Capacidad de la operación 1}) \leq 430 + 10$$

o sea

$$230 \leq (\text{Capacidad de la operación 1}) \leq 440$$

El cambio en el valor objetivo óptimo asociado con D_1 es $D_1 y_1$, siendo y_1 el valor por unidad (precio dual), en $ por minuto de la operación 1.

Para ilustrar el uso del intervalo determinado, suponga que la capacidad de la operación 1 cambia desde su valor actual de 430 a 400 minutos. La solución básica actual permanece factible, porque la nueva capacidad queda dentro del intervalo factible. Para calcular los valores nuevos de las variables se usa

$$D_1 = 400 - 430 = -30$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + \frac{(-30)}{2} \\ 230 \\ 20 - 2(-30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 230 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Para calcular el cambio asociado en el valor óptimo de la función objetivo se calculan primero los precios duales, con el método 1 de la sección 4.2.3, esto es

$$\begin{pmatrix}\text{Valores óptimos de} \\ \text{las variables duales}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Coeficientes originales} \\ \text{de las variables óptimas} \\ \text{básicas primales}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inversa} \\ \text{óptima}\end{pmatrix}$$

Así,

$$(y_1, y_2, y_3) = (2, 5, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 0)$$

Esto quiere decir que el valor de la operación 1 por minuto es $y_1 = \$1$, y que el cambio de la utilidad óptima es $D_1y_1 = -30 \times 1 = -\$30$. Recuerde $y_1 = 1$, el valor dado por unidad, sigue siendo válido sólo dentro del intervalo especificado:

$$-200 \leq D_1 \leq 10$$

Todo cambio que salga de este intervalo causa no factibilidad; de aquí la necesidad de usar el método símplex dual para determinar la nueva solución, si es que existe.

Para determinar los intervalos factibles D_2 y D_3, los cambios asociados con las operaciones 2 y 3 se pueden usar procedimientos parecidos (véase el problema 1, conjunto de problemas 4.5b). La determinación de D_1, D_2 y D_3 en la forma establecida, y su relación con los valores duales óptimos y_1, y_2 y y_3 sólo son válidas cuando se considera por separado cada recurso. Si se quisiera cambiar los tres recursos *al mismo tiempo*, se debe deducir un conjunto distinto de condiciones, con los elementos del lado derecho $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$ (véase el problema 2, conjunto de problemas 4.5b).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5B

1. En el modelo de TOYCO suponga que D_2 y D_3 representan los cambios de la disponibilidad de las operaciones 2 y 3.

a) Determine el intervalo de variación para D_2 y D_3, que mantenga la factibilidad de la solución actual, suponiendo que los cambios se aplican a una operación cada vez.

b) Determine el valor por cambio de un minuto en las capacidades de las operaciones 2 y 3.

c) Si cambia la disponibilidad de la operación 2 desde los 460 minutos actuales, hasta 500 minutos, determine la nueva solución y el cambio correspondiente en la utilidad óptima.

d) Si cambia la disponibilidad de la operación 3 de 420 a 450 minutos, calcule la nueva solución y su cambio asociado en la utilidad óptima.

e) Si la disponibilidad de la operación 3 cambia de 420 a 380 minutos, determine la nueva solución óptima y el cambio asociado en la utilidad óptima.

2. En el modelo de TOYCO, suponga que los cambios D_1, D_2 y D_3 se hacen *simultáneamente* en las tres operaciones.

a) Determine las condiciones que mantengan la factibilidad de la solución óptima actual.

b) Si cambian las disponibilidades de las operaciones 1, 2 y 3 a 438, 500 y 410 minutos, respectivamente, use las condiciones de la parte a) para demostrar que la solución básica actual sigue siendo factible, y determine el cambio de utilidad óptima usando los precios duales óptimos.

c) Si cambian las disponibilidades de las tres operaciones a 460, 440 y 380 minutos, respectivamente, use las condiciones obtenidas en a) para demostrar que la solución básica actual se vuelve no factible, y a continuación aplique el método símplex dual para determinar la nueva solución.

3. Para el modelo de TOYCO:

a) Suponga que todo tiempo adicional para la operación 1, respecto a su capacidad actual de 430 minutos diarios, se debe hacer en tiempo extra, a $50 por hora. El costo por hora incluye tanto la mano de obra como el funcionamiento de la máquina. ¿Hay ventajas económicas de recurrir al tiempo extra para la operación 1?

b) Suponga que el trabajador de la operación 2 conviene en trabajar 2 horas de tiempo extraordinario diarias, a $45 por hora. Además, el costo de la operación misma es $10 por hora. ¿Cuál es el efecto neto de esta actividad sobre la utilidad diaria?

c) ¿Vale la pena usar tiempo extra para la operación 3?

d) Suponga que aumenta la disponibilidad diaria de la operación 1 a 440 minutos. Todo tiempo extra incurrido en exceso de la capacidad máxima actual costará $40 por hora. Determine la nueva solución óptima, incluyendo la utilidad neta asociada.

e) Suponga que disminuye la disponibilidad de la operación 2 en 15 minutos diarios, y que el costo por hora de la operación durante el tiempo normal es $30. ¿Vale la pena disminuir la disponibilidad de la operación 2?

4. La compañía Gutchi fabrica bolsas de mano, estuches para rasuradoras y mochilas. En la fabricación de los tres productos se necesitan piel y materiales sintéticos, y la piel es la materia prima limitante. En el proceso de producción se usan dos clases de mano de obra calificada: costura y acabado. La tabla siguiente muestra la disponibilidad de los recursos, su uso en los tres productos y las utilidades por unidad.

	Requerimientos del recurso por unidad			
Recurso	*Bolsa*	*Estuche*	*Mochila*	*Disponibilidad diaria*
Piel (pie^2)	2	1	3	42
Costura (hr)	2	1	2	40
Acabado (hr)	1	0.5	1	45
Utilidad ($)	24	22	45	

Formule el problema como programación lineal y determine la solución óptima con TORA. A continuación indique si los cambios siguientes en los recursos mantendrán factible la solución actual. En los casos en los que se mantenga la factibilidad, determine la nueva solución óptima (los valores de las variables y de la función objetivo).

a) La piel disponible aumenta a 45 $pies^2$.

b) La piel disponible disminuye 1 pie^2.

c) Las horas disponibles de costura cambian a 38.

d) Las horas disponibles de costura cambian a 46.

e) Las horas disponibles de acabado disminuyen a 15.

f) Las horas disponibles de acabado aumentan a 50.

g) ¿Recomendaría usted contratar un costurero más a $15 por hora?

5. HiDec produce dos modelos de artículos electrónicos, donde se usan resistores, capacitores y chips. La tabla siguiente es un resumen de los datos de este caso.

	Requerimientos del recurso por unidad		
Recurso	*Modelo 1 (unidades)*	*Modelo 2 (unidades)*	*Disponibilidad máxima (unidades)*
Resistor	2	3	1200
Capacitor	2	1	1000
Chips	0	4	800
Utilidad ($)	3	4	

Sean x_1 y x_2 las cantidades producidas de los modelos 1 y 2, respectivamente. A continuación se tiene el modelo de programación lineal y su tabla símplex óptima asociada.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200 \quad \text{(Resistores)}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 1000 \quad \text{(Capacitores)}$$
$$4x_2 \leq 800 \quad \text{(Chips)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1750
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	450
s_3	0	0	-2	2	1	400
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	100

a) Determine el estado de cada recurso.

b) En función de la utilidad óptima, determine el valor de un resistor. De un capacitor. De un chip.

c) Determine el intervalo de aplicabilidad de los precios duales para cada recurso.

d) Si la cantidad disponible de resistores aumenta a 1300 unidades, determine la nueva solución óptima.

e) Si se reduce la cantidad de chips disponibles a 350 unidades, ¿podría usted determinar la solución óptima nueva en forma directa a partir de la información? Explique por qué.

f) Si la disponibilidad de los capacitores se limita por el intervalo de aplicabilidad calculado en c), determine el intervalo correspondiente de utilidad óptima y los intervalos correspondientes de la cantidad de unidades a producir, de los modelos 1 y 2.

g) Un nuevo contratista ofrece vender a HiDec más resistores a 40 centavos cada uno, pero sólo si HiDec compra un mínimo de 500 unidades. ¿Debe aceptar la oferta HiDec?

6. Gapco tiene un presupuesto diario de 320 horas de mano de obra y 350 unidades de materia prima, para fabricar dos productos. Si es necesario, la empresa puede emplear hasta 10 horas diarias de tiempo extra de mano de obra, con un costo adicional de $2 por hora. Se necesita 1 hora de mano de obra y 3 unidades de materia prima para producir una unidad del producto 1, y 2 ho-

ras de mano de obra y 1 unidad de materia prima para producir 1 unidad del producto 2. La utilidad por unidad del producto 1 es $10, y la del producto 2 es $12. Sean x_1 y x_2 la cantidad diaria fabricada de productos 1 y 2, respectivamente, y x_3 las horas diarias de tiempo extra usadas. El modelo de programación lineal y su tabla símplex óptima asociada son los siguientes:

$$\text{Maximizar } z = 10x_1 + 12x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 320 \quad \text{(Horas de mano de obra)} \\ 3x_1 + x_2 \qquad &\leq 350 \quad \text{(Materia prima)} \\ x_3 &\leq 10 \quad \text{(Tiempo extra)} \\ x_1, x_2, x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Básica	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	0	0	$\frac{26}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{5}$	2256
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	128
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	74
x_3	0	0	1	0	0	1	10

a) Determine la solución óptima del problema.

b) Determine los precios duales y los intervalos de aplicabilidad de sus recursos asociados.

c) Examine los precios duales de las horas de mano de obra (restricción 1) y las horas de tiempo extra (restricción 3). ¿No deberían ser iguales esos dos valores? Explique por qué.

d) Actualmente, Gapco paga $2 adicionales por hora de tiempo extra. ¿Cuánto es lo máximo que puede aceptar pagar la empresa?

e) Si Gapco puede adquirir 100 unidades diarias más de materia prima a $1.50 cada una. ¿Aconsejaría usted que lo hiciera? ¿Y si el costo de la materia prima fuera $2 por unidad?

f) Suponga que Gapco puede adquirir cuando mucho 200 unidades adicionales de materia prima por día. Determine la solución óptima asociada.

g) Suponga que Gapco no puede usar más de 8 horas diarias de tiempo extra; determine la nueva solución óptima.

7. *La regla de 100% de factibilidad*. Para probar si los cambios *simultáneos* $D_1, D_2, \ldots,$ y D_m en el lado derecho de las restricciones puede mantener la factibilidad de la solución actual, se puede aplicar una regla simplificada. Suponga que el lado derecho b_i de la restricción i se cambia a $b_i + D_i$, *uno por uno*, y que $p_i \leq D_i \leq q_i$ es el intervalo correspondiente de factibilidad, obtenido con el procedimiento del ejemplo 4.5-2. Por definición, $p_i \leq 0\,(q_i \geq 0)$ porque representa la disminución (aumento) máxima admisiblede b_i. A continuación se define a r_i igual a $\frac{D_i}{P_i}$ o $\frac{D_i}{q_i}$, según si D_i es negativa o positiva, respectivamente. Por definición, $0 \leq r_i \leq 1$. Entonces, la regla de 100% indica que, dados los cambios $D_1, D_2, \ldots,$ y D_m, una condición *suficiente* (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca factible es que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m \leq 1$. Si no se satisface esta condición, la solución actual puede o no puede permanecer factible. También, la regla no se aplica si D_i se sale del intervalo (p_i, q_i).

En realidad la regla de 100% es demasiado débil para ser útil en forma consistente. Aun en los casos donde se pueda confirmar la factibilidad, todavía hay que obtener la nueva solución con las condiciones de factibilidad regulares símplex (como se hizo en el problema 2).

Para demostrar la debilidad de la regla aplíquela a las partes b) y c) del problema 2. La regla no puede confirmar la factibilidad de la solución en b) y no se aplica en c) (porque los cambios de D_i salen de los intervalos admisibles). El problema 8 demostrará también este punto.

8. Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Demuestre que la solución óptima incluye tanto a x_1 como a x_2, y que los intervalos de factibilidad de las dos restricciones, consideradas una por una, son $-3 \leq D_1 \leq 6$ y $-3 \leq D_2 \leq 6$.

b) Suponga que aumentan los dos recursos en forma simultánea, en Δ (> 0) dada uno. Primero, demuestre que la solución básica permanece factible para toda $\Delta > 0$. A continuación demuestre que la regla de 100% confirma la factibilidad sólo si el aumento está dentro del intervalo $0 < \Delta < 3$ unidades. Si no es así, la regla falla para $3 \leq \Delta \leq 6$ y no se aplica para $\Delta > 6$.

9. Demuestre que la regla de 100% de factibilidad del problema 7 se basa en la condición:

$$\begin{pmatrix}\text{Inversa} \\ \text{óptima}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Vector original del} \\ \text{lado derecho}\end{pmatrix} \geq 0$$

Adición de nuevas restricciones. La adición de una nueva restricción a un modelo existente puede llevar a uno de los dos casos siguientes:

1. La nueva restricción es *redundante*, lo que quiere decir que se satisface con la solución óptima actual y, por consiguiente, se puede eliminar por completo del modelo.
2. La solución actual viola la nueva restricción, y en este caso se puede aplicar el método símplex dual para recuperar la factibilidad.

Observe que la adición de una nueva restricción, como en el caso 2, nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual.

Ejemplo 4.5-3

Suponga que TOYCO cambia el diseño de los juguetes, y que para el cambio se requerirá agregar una cuarta operación en las líneas de ensamble. La capacidad diaria de la nueva operación es 500 minutos, y los tiempos por unidad, para los tres productos en esta operación, son 3, 1 y 1 minutos, respectivamente. La restricción resultante se forma, por consiguiente, como sigue:

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

Esta restricción es redundante, porque queda satisfecha con la solución óptima actual $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 230$. Eso quiere decir que la solución óptima actual permanece sin cambio.

Ahora suponga que los tiempos por unidad, en TOYCO, para la cuarta operación son 3, 3 y 1 minutos, respectivamente. Todos los datos restantes del modelo permanecen igual. En este caso, la cuarta restricción

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$$

no queda satisfecha por la solución óptima actual. En consecuencia, debemos aumentar la nueva restricción a la tabla óptima actual, como sigue (x_7 es una holgura):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	3	3	1	0	0	0	1	500

Como las variables x_2 y x_3 son básicas, se deben sustituir y eliminar sus coeficientes de restricción en el renglón de x_7, lo que se puede hacer con la siguiente operación:

Nuevo renglón de x_7 = Renglón anterior de x_7 − {3 × (Renglón de x_2) + 1 × (Renglón de x_3)}

Entonces, la nueva tabla es la siguiente:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	$\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	-30

La aplicación del método símplex dual dará como resultado la nueva solución óptima $x_1 = 0$, $x_2 = 90$, $x_3 = 230$ y $z = \$1330$ (¡compruébela!).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5C

1. En el modelo de TOYCO suponga que la cuarta operación tiene las siguientes especificaciones: la máxima producción, basada en 480 minutos diarios, es 120 unidades del producto 1, o bien 480 unidades del producto 2, o bien 240 unidades del producto 3. Determine la solución óptima, suponiendo que la capacidad diaria se limita a a) 570 minutos, b) 548 minutos.
2. *Restricciones secundarias.* En lugar de resolver un problema usando todas sus restricciones se puede comenzar identificando sus llamadas *restricciones secundarias*. Son las que se cree menos restrictivas en función de la solución óptima. El modelo se resuelve usando las restricciones restantes (primarias). A continuación se pueden aumentar las restricciones secundarias, una por una. Se descarta una restricción secundaria que se vea que satisface el óptimo disponible. El proceso continúa hasta que se hayan tenido en cuenta todas las restricciones secundarias.

Aplique el procedimiento propuesto al siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 20 \\ 7x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\leq 30 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 35 \\ 12x_1 + 6x_2 &\leq 90 \\ x_2 - 9x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.5.2 Cambios que afectan la optimalidad

En esta sección se examinan dos soluciones particulares que podrían afectar la optimalidad de la solución actual:

1. Cambios en los coeficientes objetivo originales.
2. Adición de una nueva actividad económica (variable) al modelo.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo. Esos cambios sólo afectan la optimalidad de la solución. Por consiguiente requieren recalcular los coeficientes del renglón z, con el siguiente procedimiento:

1. Calcular los valores duales con los métodos 1 y 2 de la sección 4.2.3.
2. Usar los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4, para determinar los nuevos coeficientes en el renglón de z.

Se presentarán dos casos:

1. El nuevo renglón de z satisface la condición de optimalidad, y la solución permanece sin cambio (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar).
2. La condición de optimalidad no se satisface, y en ese caso se aplica el método símplex (primal) para recuperar la optimalidad.

Ejemplo 4.5-4

En el modelo de TOYCO, suponga que la empresa tiene nueva política de precios para igualar la competencia. Bajo la nueva política, las utilidades por unidad son \$2, \$3 y \$4, por los trenes, camiones y coches, respectivamente. La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Así,

$$(\text{Nuevos coeficientes objetivo de } x_2, x_3 \text{ y } x_6 \text{ básicas}) = (3, 4, 0)$$

Las variables duales se calculan con el método 1 de la sección 4.2.3, como sigue:

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}, 0)$$

Los coeficientes del renglón z se determinan como la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales (fórmula 2, sección 4.2.4). No es necesario recalcular los coeficientes de las variables básicas x_2, x_3 y x_6 en el renglón objetivo, porque siempre son iguales a cero, independientemente de los cambios hechos a los coeficientes objetivo (¡compruébelo!).

$$x_1\text{:}\quad y_1 + 3y_2 + y_3 - \mathbf{2} = \tfrac{3}{2} + 3(\tfrac{5}{4}) + 0 - \mathbf{2} = \tfrac{13}{4}$$

$$x_4\text{:}\quad y_1 - 0 = \tfrac{3}{2}$$

$$x_5\text{:}\quad y_2 - 0 = \tfrac{5}{4}$$

Nótese que el lado derecho de la restricción dual asociada con x_1 es 2, el coeficiente nuevo en la función objetivo modificada.

Los cálculos indican que en la solución actual, $x_1 = 0$ trenes, $x_2 = 100$ camiones y $x_3 = 230$ coches, permanece óptima. La nueva utilidad correspondiente se calcula como $2 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = \$1220$.

Ahora suponga que cambia la función objetivo de TOYCO a

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Los cambios correspondientes en el renglón de z se indican en la siguiente tabla (¡compruébelos!):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1220
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Los elementos que están en las celdas sombreadas son las nuevas $z_j - c_j$ para las variables no básicas x_1, x_4 y x_5. Todos los elementos restantes de la tabla son iguales a los de la iteración original óptima. Entonces, la nueva solución óptima se determina haciendo entrar a x_1 y salir a x_6, con lo que se obtiene $x_1 = 10$, $x_2 = 102.5$, $x_3 = 215$ y $z = \$1227.50$ (¡compruébelo!).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5D

1. Investigue la optimalidad de la solución de TOYCO para cada una de las funciones objetivo siguientes. Si la solución cambia, aplique el análisis de sensibilidad para determinar el óptimo nuevo. (La tabla óptima de TOYCO aparece al iniciar la sección 4.5.)

a) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

b) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$

c) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$

2. Investigue la optimalidad de la solución de Reddy Mikks (ejemplo 4.3-1) para cada una de las siguientes funciones objetivo. Si cambia la solución aplique el análisis de sensibilidad para determinar el óptimo nuevo. (La tabla óptima del modelo aparece en el ejemplo 3.3-1.)
   a) $z = 3x_1 + 2x_2$
   b) $z = 8x_1 + 10x_2$
   c) $z = 2x_1 + 5x_2$
3. En el modelo de Gutchi, problema 4, conjunto de problemas 4.5b, use TORA para determinar la iteración símplex óptima. A continuación aplique el análisis de sensibilidad para determinar la solución óptima asociada para cada una de las funciones objetivo siguientes:
   a) $z = 40x_1 + 22x_2 + 45x_3$
   b) $z = 70x_1 + 22x_2 + 45x_3$
   c) $z = 24x_1 + 10x_2 + 45x_3$
   d) $z = 24x_1 + 20x_2 + 45x_3$
   e) $z = 24x_1 + 22x_2 + 50x_3$
   f) $z = 24x_1 + 22x_2 + 40x_3$

Intervalo de optimalidad de los coeficientes objetivo. Otra forma de investigar el efecto de los cambios en los coeficientes de la función objetivo es calcular el intervalo para el que cada coeficiente individual mantenga la solución óptima actual. Esto se hace reemplazando el c_j actual con $c_j + d_j$, donde d_j representa la cantidad (positiva o negativa) de cambio.

Ejemplo 4.5-5

Suponga que la función objetivo del modelo de TOYCO cambia a

$$\text{Maximizar } z = (3 + d_1)x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Determinar el intervalo de optimalidad para el cambio d_1.

Seguiremos el procedimiento que se describió arriba. Sin embargo, observe que, como x_1 no es básica en la tabla óptima, los valores duales no se verán afectados por este cambio y en consecuencia permanecerán igual que en el modelo original (es decir, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$). En realidad, como x_1 es no básica, sólo se afectará su coeficiente en el renglón z, y todos los demás coeficientes de ese renglón permanecen sin cambio (¿por qué?). Eso quiere decir que se necesita aplicar la fórmula 2, sección 4.2.4 a la restricción dual asociada sólo con x_1, esto es,

$$x_1\text{: } y_1 + 3y_2 + y_3 - (3 + d_1) = 1 + 3 \times 2 + 0 - (3 + d_1) = 4 - d_1$$

Como el modelo de TOYCO es un problema de maximización, la solución original permanecerá óptima siempre que

$$4 - d_1 \geq 0$$

o sea

$$d_1 \leq 4$$

Esto equivale a decir que la solución actual permanece óptima siempre que el coeficiente objetivo c_1 $(= 3 + d_1)$ de x_1 no sea mayor que $3 + 4 = \$7$.

Ahora se considerará el cambio d_2 en el coeficiente objetivo de x_2:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + (2 + d_2)x_2 + 5x_3$$

La diferencia en este caso es que x_2 es básica y su cambio afectará los valores duales para después afectar todos los coeficientes de *todas* las variables *no básicas* del renglón z (recuerde que los coeficientes de las variables básicas en el renglón z siempre son iguales a cero, independientemente de cualquier cambio en la función objetivo). Al aplicar el método 1, sección 4.2.3, para calcular los valores duales se obtiene:

$$\text{nuevo}\,(y_1, y_2, y_3) = (2 + d_2, 5, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(1 + \tfrac{d_2}{2}, 2 - \tfrac{d_2}{4}, 0\right)$$

Se pueden calcular los coeficientes de las variables no básicas en el renglón z como sigue:

$$\begin{aligned} &x_1{:}\, y_1 + 3y_1 + y_3 - 3 = \left(1 + \tfrac{d_2}{2}\right) + 3 \times \left(2 - \tfrac{d_2}{4}\right) + 0 - 3 = 4 - \tfrac{d_2}{4} \geq 0 \quad (1)\\ &x_4{:}\, y_1 - 0 = \left(1 + \tfrac{d_2}{2}\right) - 0 = 1 + \tfrac{d_2}{2} \geq 0 \quad (2)\\ &x_5{:}\, y_2 - 0 = \left(2 - \tfrac{d_2}{4}\right) - 0 = 2 - \tfrac{d_2}{4} \geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Las desigualdades (1), (2) y (3), respectivamente, dan como resultado

$$d_2 \leq 16,\ d_2 \geq -2 \ \text{ y } d_2 \leq 8$$

o sea

$$-2 \leq d_2 \leq 8$$

De igual manera, dada $c_2 = 2 + d_2$, se obtiene

$$0 \leq c_2 \leq 10$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5E

1. En el modelo de TOYCO suponga que la utilidad de un coche de juguete, por unidad, cambia a $3 + d_3$. Determine los intervalos admisibles que mantengan óptima la solución actual.

2. En el modelo de TOYCO use las soluciones del ejemplo 4.5-5 y del problema 1 para indicar si la solución actual seguirá siendo óptima en cada uno de los casos (independientes) siguientes. Si cambia la solución, determine la solución nueva.

a) La utilidad por unidad de un tren aumenta de \$3 a \$5. Y a \$8.

b) La utilidad por unidad de un tren baja de \$3 a \$2.

c) La utilidad por unidad de un camión aumenta de \$2 a \$6.

d) La utilidad por unidad de un coche baja de \$5 a \$2.

3. En el modelo de Reddy Mikks suponga que se implementan los siguientes cambios individuales en los coeficientes objetivos, uno por uno.

a) La utilidad por tonelada de pintura para exteriores es $5 + d_1$ miles de dólares.

b) La utilidad por tonelada de pintura para interiores es $4 + d_2$ miles de dólares.

Suponiendo que d_1 y d_2 puedan ser positivos o negativos, use la condición adecuada de $z_j - c_j$ para determinar los intervalos admisibles que mantengan óptima a la solución actual.

4. En el modelo de Reddy Mikks use la solución del problema 3 para indicar si la solución actual seguirá siendo óptima en cada uno de los siguientes casos (independientes). Si la solución cambia, determine la solución nueva.

a) La utilidad por tonelada de pintura para exteriores aumenta de \$5000 a \$7000. Disminuye de \$5000 a \$4000.

b) La utilidad por tonelada de pintura para interiores aumenta de \$4000 a \$6000. Disminuye de \$4000 a \$3000.

5. Para el modelo HiDec del problema 5, conjunto 4.5b.

a) Use TORA para determinar la iteración óptima.

b) Determine el intervalo de utilidad por unidad, para el modelo 1, que mantenga la optimalidad de la solución actual.

c) Determine el intervalo de utilidad por unidad, para el modelo 2, que mantenga óptima la solución actual.

d) Si la utilidad por unidad en el modelo 1 aumenta a \$6, determine la nueva solución.

e) Si la utilidad por unidad en el modelo 2 cambia a \$1, determine la nueva solución óptima.

6. Para el modelo de Gapco del problema 6, conjunto de problemas 4.5b.

a) Use TORA para determinar la iteración óptima.

b) ¿Cuál es la mínima utilidad por unidad que puede obtener Gapco en el producto 1, sin cambiar el programa de producción actual?

c) Si la utilidad por unidad del producto 2 aumenta a \$25, determine la solución óptima asociada.

7. En el modelo de TOYCO suponga que se implementan *simultáneamente* los cambios propuestos d_1, d_2 y d_3.

a) Determine las condiciones que mantengan óptima a la solución actual.

b) Use las condiciones del punto a) para determinar la nueva solución (en caso de haber cambio) en cada uno de los siguientes casos:

(i) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

(ii) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$

(iii) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$

8. En el problema 3 suponga que los cambios propuestos, d_1 y d_2, se hacen *simultáneamente* en el modelo de Reddy Mikks. (La tabla óptima del modelo se ve en el ejemplo 3.3-1.)

a) Determine las condiciones que mantengan óptima a la solución actual.

b) Use las condiciones obtenidas en a) para determinar si la solución actual permanece óptima en cada uno de los siguientes casos:

(i) $z = 3x_1 + 2x_2$

(ii) $z = 3x_1 + 9x_2$

(iii) $z = 5x_1 + 5x_2$

9. En el modelo de HiDec del problema 5, conjunto de problemas 4.5b.

a) Determine la condición que mantenga óptima la solución actual, si las utilidades unitarias de los modelos 1 y 2 cambian en forma simultánea.

b) Suponga que la función objetivo cambia a

$$z = 5x_1 + 2x_2$$

Determine la solución óptima asociada.

10. También se puede establecer *la regla de 100% de optimalidad.* Una regla parecida a la *regla de 100% de factibilidad* que se describió en el problema 7, conjunto 4.5b, para probar el efecto de cambiar en forma simultánea todos los c_j a $c_j + d_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sobre la optimalidad de la solución actual. Suponga que $u_j \leq d_j \leq v_j$ es el intervalo de optimalidad obtenido al cambiar cada c_j a $c_j + d_j$ uno por uno, con el procedimiento del ejemplo 4.5-5. En este caso, $u_j \leq 0$ $(v_j \geq 0)$ porque

representa la disminución (el aumento) máxima admisible en c_j que mantiene óptima la solución actual. Para los casos en los que $u_j \leq d_j \leq v_j$, defina $r_j = \frac{d_j}{v_j}$ o $\frac{d_j}{u_j}$, dependiendo de si d_j es positivo o negativo, respectivamente. Por definición, $0 \leq r_j \leq 1$. La regla del 100% establece que una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca siendo óptima, es que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq 1$. Si no se establece la condición, puede ser que la solución actual permanezca óptima o no. La regla no se aplica si d_j sale de los intervalos especificados.

Aplique la regla de 100% de optimalidad a los casos del problema 7b) y demuestre que esa regla es demasiado débil para ser fiable en forma consistente como medio de toma de decisiones.

11. Demuestre que la regla de 100% de optimalidad (problema 10) se deduce de las condiciones $z_j - c_j \geq 0$ para problemas de maximización, y $z_j - c_j \leq 0$ para problemas de minimización.

Adición de una nueva actividad. La adición de una nueva actividad en un modelo de programación lineal equivale a agregar una nueva variable. En forma intuitiva, la adición de una nueva actividad sólo es deseable si es rentable, esto es, si mejora el valor óptimo de la función objetivo. Esta condición se puede verificar aplicando la fórmula 2, sección 4.2.4, a la nueva actividad. Como esa nueva actividad no es todavía parte de la solución, se puede considerar como una variable no básica. Eso quiere decir que los valores duales asociados con la solución actual permanecen invariables.

Si la fórmula 2 indica que la nueva actividad satisface la condición de optimalidad, la actividad no es rentable. En caso contrario, es mejor tener en cuenta la nueva actividad.

Ejemplo 4.5-6

TOYCO reconoce que los trenes de juguete no se producen en la actualidad porque no son rentables. La empresa quiere reemplazar los trenes con un nuevo producto, un carro de bomberos de juguete, que se arme en las instalaciones existentes. TOYCO estima que la utilidad por carro de bomberos es \$4 y que los tiempos de ensamble por unidad son 1 minuto en cada una de las operaciones 1 y 2, y 2 minutos en la operación 3.

Sea x_7 el nuevo producto, el carro de bomberos. Como $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$ son los valores duales óptimos, el costo reducido de x_7 se puede calcular como sigue:

$$1y_1 + 1y_2 + 2y_3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1$$

Según este resultado, conviene económicamente incluir a x_7 en la solución básica óptima. Para obtener el nuevo óptimo se calcula primero su columna de restricciones con la fórmula 1, sección 4.2.4, como sigue:

$$\text{Columna de restricción de } x_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, se debe modificar la tabla símplex actual como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_7	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	-1	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	1	-2	1	1	20

Se determina el nuevo óptimo haciendo entrar x_7 a la solución básica, y en ese caso debe salir x_6. La nueva solución es $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 125,\ x_7 = 210$ y $z = \$\,1465$ (¡compruébelo!).

El caso de agregar una actividad nueva también abarca al caso en el que se hicieron cambios en los usos de los recursos, en una actividad *existente*. En forma específica se puede considerar a x_7 como si al principio tuviera un coeficiente de objetivo cero y uso cero de los tres recursos, y que esos valores cero se cambiaron a los nuevos valores que se dan para x_7. Por esta razón no se describirá por separado el caso de cambiar los coeficientes de restricción de una variable existente.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5F

1. En el modelo original de TOYCO, los trenes de juguete no son parte de la línea óptima de productos. La empresa reconoce que la competencia del mercado no permitirá elevar el precio de ese juguete. En lugar de ello, la empresa quiere concentrarse en mejorar la operación misma del ensamble. Para ello se necesita reducir el tiempo de ensamble por unidad en cada una de las tres operaciones, en un porcentaje especificado, p%. Determine el valor de p que comience a hacer rentables a los trenes. La tabla óptima del modelo de TOYCO se muestra al principio de la sección 4.5.

2. En el modelo de TOYCO, suponga que la empresa puede reducir los tiempos unitarios en las operaciones 1, 2 y 3, para los trenes, desde los valores actuales de 1, 3 y 1 minutos a 0.5, 1 y 0.5 minutos, respectivamente. La utilidad por unidad permanece invariable en $3. Determine la nueva solución óptima.

3. En el modelo de TOYCO suponga que un juguete nuevo (carro de bomberos) requiere 3, 2 y 4 minutos, respectivamente, para las operaciones 1, 2 y 3. Determine la solución óptima cuando la utilidad por unidad es

a) $5

b) $10

4. En el modelo de Reddy Mikks, la empresa está considerando producir una marca menos costosa de pintura para exteriores, cuyas materias primas por tonelada comprenden 0.75 tonelada de *M*1 y 0.75 tonelada de *M*2. Las condiciones del mercado siguen indicando que se limite el exceso de pintura para interiores, respecto a la producción de *ambas* clases de pintura para exteriores se limite a 1 tonelada diaria. La utilidad es $3500 por tonelada de la nueva pintura para exteriores. Determine la nueva solución óptima. El modelo se explica en el ejemplo 4.3-1, y la tabla óptima está en el ejemplo 3.3-1.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1990.

Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti, *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.

Nering, E. y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.

PROBLEMAS INTEGRALES

4.1[2] MANCO fabrica tres productos: $P1$, $P2$ y $P3$. En el proceso de producción se usan las materias primas $R1$ y $R2$ que se procesan en las líneas $F1$ y $F2$. En la tabla siguiente se ven los datos del problema.

		Uso por unidad			
Recurso	*Unidades*	*P*1	*P*2	*P*3	*Capacidad diaria máxima*
*F*1	Minutos	1	2	1	430
*F*2	Minutos	3	0	2	460
*R*1	lb	1	4	0	420
*R*2	lb	1	1	1	300

La demanda mínima diaria de $P2$ es de 70 unidades, y la demanda máxima de $P3$ es 240 unidades. Las contribuciones de $P1$, $P2$ y $P3$ a las utilidades son \$300, \$200 y \$500 por unidad, respectivamente.

La dirección de MANCO evalúa medios para mejorar la situación financiera de la compañía. Describa la factibilidad de las siguientes propuestas.

1. La utilidad por unidad de $P3$ se puede aumentar 20%, pero con ello se reduce la demanda potencial del mercado a 210 unidades de las 240 unidades actuales.
2. La materia prima $R2$ parece ser un factor crítico para limitar la producción actual. Se pueden asegurar unidades adicionales con un proveedor distinto, cuyo precio es \$3 mayor, por unidad, que el del abastecedor actual.
3. Las capacidades de $F1$ y $F2$ pueden aumentar hasta 40 minutos por día, cada una con un costo adicional de \$35 diarios.
4. El principal comprador del producto $P2$ pide que se aumente su entrega diaria de las 70 unidades actuales, a 100 unidades.
5. El tiempo de procesamiento de $P1$ en $F2$ se puede reducir de 3 a 2 minutos por unidad, con un costo adicional de \$4 diarios.

4.2 Reddy Mikks Company prepara un plan de expansión. Un estudio de mercado indica que la empresa puede aumentar 25% sus ventas. Para desarrollar un plan de acción se estudian las siguientes proposiciones (véase los detalles del modelo y su solución, en el ejemplo 3.3-1):

Proposición 1. Como un aumento de 25% equivale aproximadamente a \$5250 en utilidades, y el valor por tonelada adicional de $M1$ y $M2$ es \$750 y \$500, respectivamente, el aumento que se desea en la producción se puede alcanzar con un aumento combinado de $\$5250 \div \frac{(\$750+\$500)}{2} = 8.4$ toneladas de $M1$ y otras 8.4 de $M2$.

Proposición 2. Aumentar en 6 toneladas y 1 tonelada las cantidades de las materias primas $M1$ y $M2$, respectivamente. Estos aumentos equivalen al 25% de los niveles actuales de $M1$ y $M2$ (= 24 y 6 toneladas, respectivamente). Como esos dos recursos son *escasos* en la solución óptima actual, un aumento de 25% en su disponibilidad produce un aumento equivalente en las cantidades producidas de pinturas para interiores y para exteriores, que es lo que se desea.

¿Cuál es su opinión acerca de estas propuestas? ¿Sugeriría usted un método distinto para resolver el problema?

---

[2]Basado en D. Sheran, "Post-Optimal Analysis in Linear Programming—The Right Example", *IIE Transactions*, vol. 16, núm. 1, marzo de 1984, págs. 99-102.

4.3 *Análisis de sensibilidad para casos que afectan la optimalidad y la factibilidad a la vez*. Suponga que se tienen los siguientes cambios simultáneos en el modelo de Reddy Mikks: las utilidades por tonelada son $1000 y $4000, en pinturas para exteriores e interiores, respectivamente, y las disponibilidades diarias máximas de las materias primas $M1$ y $M2$ son 28 y 8 toneladas, respectivamente.

a) Demuestre que los cambios propuestos harán que la solución básica actual sea no óptima y no factible, al mismo tiempo.

b) Use el *algoritmo símplex generalizado* de la sección 4.4.2 para determinar la nueva solución óptima factible.

CAPÍTULO 5

Modelo de transporte y sus variantes

El modelo de transporte es una clase especial de programación lineal que tiene que ver con transportar un artículo desde sus **fuentes** (es decir, fábricas) hasta sus **destinos** (es decir, bodegas). El objetivo es determinar el programa de transporte que minimice el costo total del transporte y que al mismo tiempo satisfaga los límites de la oferta y la demanda. En el modelo se supone que el costo de transporte es proporcional a la cantidad de unidades transportadas en determinada ruta. En general, se puede ampliar el modelo de transporte a otras áreas de operación, entre otras el control de inventarios, programación de empleos y asignación de personal.

Aunque el modelo de transporte se puede resolver como una programación lineal normal, su estructura especial permite desarrollar un algoritmo de cómputo, basado en el símplex, que usa las relaciones primal-dual para simplificar los cálculos. En este capítulo se presenta el algoritmo "nuevo" y se demuestra su estrecha relación con el método símplex.

5.1 DEFINICIÓN DEL MODELO DE TRANSPORTE

El problema general se representa en la red de la figura 5.1. Hay m fuentes y n destinos, cada fuente y cada destino representados por un **nodo**. Los **arcos** representan las rutas que enlazan las fuentes y los destinos. El arco (i, j) que une a la fuente i con el destino j conduce dos clases de información: el costo de transporte c_{ij} por unidad, y la cantidad transportada x_{ij}. La cantidad de oferta en la fuente i es a_i y la cantidad de demanda en el destino j es b_j. El objetivo del modelo es determinar las incógnitas x_{ij} que minimicen el costo total de transporte, y que al mismo tiempo satisfagan las restricciones de oferta y demanda.

Ejemplo 5.1-1

MG Auto tiene tres plantas: en Los Ángeles, Detroit y New Orleans; y dos centros principales de distribución en Denver y en Miami. Las capacidades de las tres plantas durante el próximo

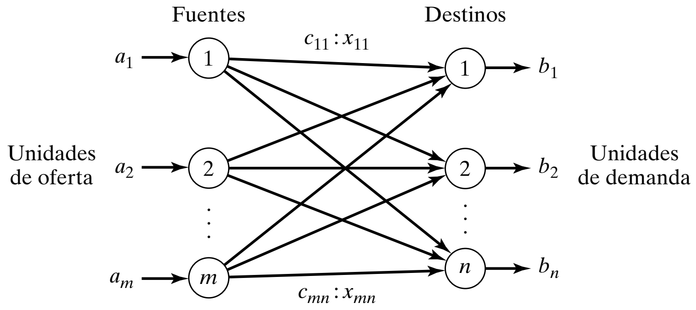


FIGURA 5.1
Representación del modelo de transporte con nodos y arcos

trimestre serán 1000, 1500 y 2000 autos. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son 2300 y 1400 autos. El kilometraje entre las fábricas y los centros de distribución se ve en la tabla 5.1.

TABLA 5.1

	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
New Orleans	1275	850

La empresa transportista cobra 8 centavos por milla y por auto. El costo de transporte por auto, en las distintas rutas y redondeado hasta el $ más próximo, se calcula como se ve en la tabla 5.2.

TABLA 5.2

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	\$80	\$215
Detroit (2)	\$100	\$108
New Orleans (3)	\$102	\$68

El modelo de programación lineal para el problema es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100\,x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1000 \quad \text{(Los Ángeles)}\\
x_{21} + x_{22} \qquad\qquad &= 1500 \quad \text{(Detroit)}\\
x_{31} + x_{32} &= 1200 \quad \text{(New Orleans)}\\
x_{11} \qquad + x_{21} \qquad + x_{31} \qquad &= 2300 \quad \text{(Denver)}\\
x_{12} \qquad + x_{22} \qquad + x_{32} &= 1400 \quad \text{(Miami)}\\
x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2 &
\end{aligned}$$

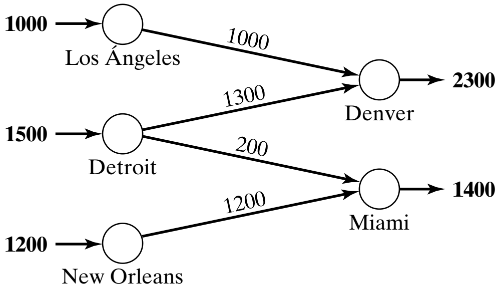


FIGURA 5.2
Solución óptima del modelo de MG Auto

Todas estas restricciones son ecuaciones, porque el abasto total desde las tres fuentes (= 1000 + 1500 + 1200 = 3700 autos) es igual a la demanda total en los dos destinos (= 2300 + 1400 = 3700 autos).

El modelo de programación lineal se puede resolver con el método símplex. Sin embargo, la estructura especial de las restricciones permite resolverlo con más comodidad usando la **tabla de transporte** siguiente.

TABLA 5.3

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 x_{11}	215 x_{12}	**1000**
Detroit	100 x_{21}	108 x_{22}	**1500**
New Orleans	102 x_{31}	68 x_{32}	**1200**
Demanda	**2300**	**1400**	

La solución óptima (obtenida con TORA[1]) se resume en la figura 5.2. Indica que se manden 100 autos de Los Ángeles a Denver, 1300 de Detroit a Denver, 200 de Detroit a Miami y 1200 de New Orleans a Miami. El costo mínimo de transporte asociado es $1000 \times \$80 + 1300 \times \$100 + 200 \times \$108 + 1200 \times \$68 = \$313{,}200$.

El algoritmo de transporte se basa en la hipótesis que el modelo está **balanceado**, y eso quiere decir que la demanda total es igual a la oferta total. Si el modelo está desbalanceado siempre se podrá aumentar con una fuente ficticia o un destino ficticio para restaurar el equilibrio o balance.

Ejemplo 5.1-2

En el modelo de MG, suponer que la capacidad de la planta de Detroit es 1300 automóviles (en lugar de 1500). La oferta total (= 3500 autos) es menor que la demanda total (= 3700 autos), lo que quiere decir que no será satisfecha parte de la demanda en Denver y Miami.

[1]Para usar TORA, selccione `Transportation Model` (modelo de transporte) del `Main Menu` (menú principal). En el menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar) seleccione `Solve` ⇒ `Final solution` (resolver/solución final) para obtener un resumen de la solución óptima. En la sección 5.3.3 se presenta una descripción más detallada de la solución iterativa del modelo de transporte.

Como la demanda es mayor que la oferta se agrega una fuente (planta) ficticia con una capacidad de 200 automóviles (= 3700 − 3500) para balancear el modelo de transporte. En este caso, el costo de transporte por unidad, desde la planta ficticia a los dos destinos es cero, porque no existe esa fábrica.

El costo de transporte por unidad desde la fuente ficticia a los destinos puede asumir también valores positivos. Por ejemplo, para asegurar que Miami recibe toda su demanda, se asignará un costo (penalización) alto de transporte por unidad al elemento cero, desde la fuente ficticia hasta Miami.

La tabla 5.4 muestra el modelo balanceado junto con su solución óptima. Se ve que la planta ficticia manda 200 automóviles a Miami, y eso quiere decir que a Miami le faltan 200 vehículos para satisfacer su demanda de 1400 unidades.

TABLA 5.4

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 **1000**	215	**1000**
Detroit	100 **1300**	108	**1300**
New Orleans	102	68 **1200**	**1200**
Planta ficticia	0	0 **200**	**200**
Demanda	**2300**	**1400**	

También podemos demostrar el caso en el que la oferta es mayor que la demanda, suponiendo que en Denver la demanda sólo es de 1900 autos. En este caso se debe agregar un centro de distribución ficticio que “reciba” el exceso de oferta. También, los costos unitarios de transporte al centro ficticio de distribución son cero, a menos que se deseen imponer otras condiciones. Por ejemplo, se puede pedir que una fábrica “mande todo” asignando un costo unitario de transporte (muy) alto, desde la fábrica indicada hasta el destino ficticio.

En la tabla 5.5 se ve el nuevo modelo y su solución óptima (obtenida con TORA). Esta solución indica que la planta de Detroit tendrá un sobrante de 400 autos.

TABLA 5.5

	Denver	Miami	Ficticia	
Los Ángeles	80 **1000**	215	0	**1000**
Detroit	100 **900**	108 **200**	0 **400**	**1500**
New Orleans	102	68 **1200**	0	**1200**
Demanda	**1900**	**1400**	**400**	

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.1A

1. ¿Cierto o falso?
   a) Para balancear un modelo de transporte se puede necesitar agregar tanto una fuente ficticia como un destino ficticio.
   b) Las cantidades transportadas hasta un destino ficticio representan sobrantes en la fuente de transporte.
   c) Las cantidades transportadas desde una fuente ficticia representan carencias en los destinos receptores.
2. En cada uno de los casos siguientes determine si debe agregarse una fuente o un destino ficticio, para balancear el modelo.
   a) Oferta: $a_1 = 10, a_2 = 5, a_3 = 4, a_4 = 6$
   Demanda: $b_1 = 10, b_2 = 5, b_3 = 7, b_4 = 9$
   b) Oferta: $a_1 = 30, a_2 = 44$
   Demanda: $b_1 = 25, b_2 = 30, b_3 = 10$
3. En la tabla 5.4 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega una fábrica ficticia, ¿qué significa la solución cuando esa fábrica "embarca" 150 autos a Denver y 150 a Miami?
4. En la tabla 5.5 del ejemplo 5.1-2, donde se agregó un destino ficticio, suponga que la planta de Detroit deba embarcar *toda* su producción. ¿Cómo se puede implementar esta restricción en el modelo?
5. En el ejemplo 5.1-2 suponga que, para el caso en el que la demanda es mayor que la oferta (tabla 5.4), se imponen penalizaciones a la tasa de \$200 y \$300 por cada automóvil no entregado en Denver y en Miami, respectivamente. Además, no se hace transporte desde la planta de Los Ángeles al centro de distribución de Miami. Formule el modelo y determine el programa óptimo de transporte para el problema, usando TORA.
6. Tres ciudades se abastecen de electricidad de tres centrales eléctricas con capacidades de 25, 40 y 30 megawatts (MW). Las demandas máximas en las tres ciudades se estiman en 30, 35 y 25 MW. El precio por MW en las tres ciudades se muestra en la tabla 5.6.

TABLA 5.6

		Ciudad	
	1	2	3
Planta 1	\$600	\$700	\$400
Planta 2	\$320	\$300	\$350
Planta 3	\$500	\$480	\$450

   Durante el mes de agosto hay un aumento de 20% en la demanda de cada ciudad, que se puede satisfacer comprando electricidad a otra red, a una tasa elevada de \$1000 por MW. Sin embargo, la red no está conectada con la ciudad 3. La empresa eléctrica desea determinar el plan más económico para distribuir y comprar la energía adicional.
   a) Formule el problema como un modelo de transporte.
   b) Resuelva el problema con TORA y determine un plan óptimo de distribución para la empresa eléctrica.
   c) Determine el costo de la electricidad adicional comprada por cada una de las tres ciudades.

7. Resuelva el problema 6, suponiendo que hay una pérdida de energía de 10% en la transmisión por la red.

8. Hay tres refinerías, con capacidades diarias de 6, 5 y 8 millones degalones, respectivamente, que abastecen a tres áreas de distribución cuyas demandas diarias son 4, 8 y 7 millones de galones, respectivamente. La gasolina se transporta por una red de oleoductos a las tres áreas de distribución. El costo de transporte es 10 centavos por 1000 galones por milla de oleoducto. En la tabla 5.7 se ven las distancias entre las refinerías y las áreas de distribución. La refinería 1 no está conectada con el área de distribución 3.

TABLA 5.7

		Área de distribución	
	1	2	3
Refinería 1	120	180	—
Refinería 2	300	100	80
Refinería 3	200	250	120

a) Formule el modelo de transporte asociado.

b) Use TORA para determinar el programa óptimo de transporte en la red.

9. En el problema 8, suponga que la capacidad de la refinería 3 sólo es de 6 millones de galones, y que el área de distribución 1 debe recibir toda su demanda. Además, cualquier faltante en las áreas 2 y 3 causan una penalización de 5 centavos por galón.

a) Formule el problema como modelo de transporte.

b) Resuelva con TORA el modelo resultante y determine el programa óptimo de transporte.

10. En el problema 8, suponga que la demanda diaria en el área 3 baja a 4 millones de galones. El sobrante de producción en las refinerías 1 y 2 se dirige hacia otras áreas de distribución, con pipas. El costo de transporte por 100 galones es $1.50 desde la refinería 1 y $2.20 desde la refinería 2. La refinería 3 puede usar su producción sobrante en otros procesos químicos dentro de ella.

a) Formule el problema como modelo de transporte.

b) Determine el programa óptimo de transporte usando TORA.

11. Tres huertas abastecen a cuatro detallistas con cajas de naranjas. La demanda diaria de los cuatro es 150, 150, 400 y 100 cajas, respectivamente. La oferta de las tres huertas está determinada por la mano de obra regular disponible, que se estima en 150, 200 y 250 cajas diarias. Sin embargo, las huertas 1 y 2 han indicado que pueden abastecer más cajas, si es necesario, recurriendo a tiempo extra de la mano de obra. La huerta 3 no ofrece esta opción. Los costos de transporte por caja, desde las huertas hasta los detallistas, se ven en la tabla 5.8.

TABLA 5.8

		Detallista		
	1	2	3	4
Huerta 1	$1	$2	$3	$2
Huerta 2	$2	$4	$1	$2
Huerta 3	$1	$3	$5	$3

a) Formule el problema como modelo de transporte.

b) Resuelva el problema con TORA.

c) ¿Cuántas cajas deben suministrar las huertas 1 y 2, con tiempo extra de la mano de obra?

12. En tres centros de distribución se embarcan automóviles a cinco agencias. El costo de transporte se basa en la distancia entre las fuentes y los destinos, y es independiente de si los camiones van con carga parcial o total. En la tabla 5.9 se ven las distancias entre los centros de distribución y las agencias, junto con las ofertas y demandas, expresadas en *número* de autos. Un camión puede transportar 18 autos. El costo de transporte por milla de camión es $25.

TABLA 5.9

	Agencia 1	2	3	4	5	Oferta
Centro 1	100	150	200	140	35	**400**
Centro 2	50	70	60	65	80	**200**
Centro 3	40	90	100	150	130	**150**
Demanda	**100**	**200**	**150**	**160**	**140**	

a) Formule el modelo de transporte correspondiente.

b) Determine el programa óptimo de transporte, usando TORA.

13. MG Auto, del ejemplo 5.1-1, produce cuatro modelos: *M*1, *M*2, *M*3 y *M*4. La planta de Detroit produce los modelos *M*1, *M*2 y *M*4. En New Orleans también se producen los modelos *M*1 y *M*2. La planta de Los Ángeles fabrica los modelos *M*3 y *M*4. Las capacidades de las plantas y las demandas en los centros de distribución se muestran en la tabla 5.10.

TABLA 5.10

	Modelo *M*1	*M*2	*M*3	*M*4	*Totales*
Planta					
Los Ángeles	—	—	700	300	1000
Detroit	500	600	—	400	1500
New Orleans	800	400	—	—	1200
Centro de distribución					
Denver	700	500	500	600	2300
Miami	600	500	200	100	1400

La tabla de distancias es igual que la del ejemplo 5.1-1, y la tarifa de transporte sigue siendo 8 centavos por milla por vehículo, para todos los modelos. Además es posible sustituir un porcentaje de la demanda de algunos modelos, con la oferta de otros, de acuerdo con las especificaciones de la tabla 5.11.

TABLA 5.11

Centro de distribución	Porcentaje de la demanda	Modelos intercambiables
Denver	10	$M1, M2$
	20	$M3, M4$
Miami	10	$M1, M3$
	5	$M2, M4$

a) Formule el modelo de transporte correspondiente.

b) Determine el programa óptimo de transporte con TORA. (*Sugerencia:* agregue cuatro nuevos destinos, que correspondan a las nuevas combinaciones [$M1$, $M2$], [$M3$, $M4$], [$M1$, $M3$] y [$M2$, $M4$]. Las demandas en los nuevos destinos se determinan a partir de los porcentajes mencionados.

5.2 MODELOS NO TRADICIONALES DE TRANSPORTE

La aplicación del modelo de transporte no se limita a *transportar* artículos entre fuentes y destinos geográficos. En esta sección se explican dos aplicaciones en las áreas de control de producción e inventarios, y mantenimiento de equipo.

Ejemplo 5.2-1 (Control de producción e inventarios)

Boralis fabrica mochilas para excursionistas exigentes. La demanda de su producto se presenta desde marzo hasta junio de cada año. Boralis estima que la demanda durante los cuatro meses es 100, 200, 180 y 300 unidades, respectivamente. La empresa emplea mano de obra de tiempo parcial para fabricar las mochilas y, en consecuencia, su capacidad de producción varía cada mes. Se estima que Boralis puede producir 50, 180, 280 y 270 unidades de marzo a junio, respectivamente. Como no coinciden la capacidad de producción y la demanda en los distintos meses, la demanda de determinado mes se puede satisfacer de uno de tres modos:

1. La producción del mes en curso.
2. La producción sobrante en meses anteriores.
3. La producción sobrante en meses posteriores.

En el primer caso, el costo de producción es $40.00 por mochila. En el segundo se incurre en un costo adicional de retención de $0.50 por mochila por día. En el tercer caso se incurre en una penalización adicional de $2.00 por mochila y por mes. Boralis desea determinar el programa óptimo de producción en los cuatro meses.

El caso se puede representar como modelo de transporte reconociendo los siguientes paralelismos entre los elementos del problema de producción e inventarios, y los del modelo de transporte.

Transporte	Producción e inventario
1. Fuente i	1. Periodo de producción i
2. Destino j	2. Periodo de demanda j
3. Cantidad suministrada en la fuente i	3. Capacidad de producción del periodo i
4. Demanda en el destino j	4. Demanda en el periodo j
5. Costo unitario de transporte desde la fuente i hasta el destino j	5. Costo unitario (producción + retención + penalización) en el periodo i para el periodo j

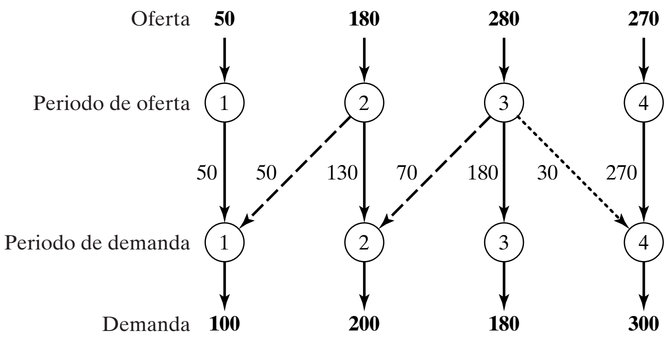


FIGURA 5.3
Solución óptima del modelo de producción e inventario, del ejemplo 5.2-1

El modelo de transporte que resulta se ve en la tabla 5.12.

TABLA 5.12

	1	2	3	4	Capacidad
1	\$40.00	\$40.50	\$41.00	\$41.50	**50**
2	\$42.00	\$40.00	\$40.50	\$41.00	**180**
3	\$44.00	\$42.00	\$40.00	\$40.50	**280**
4	\$46.00	\$44.00	\$42.00	\$40.00	**270**
Demanda	**100**	**200**	**180**	**300**	

El costo de "transporte" por unidad, desde el periodo i hasta el periodo j se calcula como sigue:

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{Costo de producción en } i,\ i = j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de retención de } i \text{ a } j,\ i < j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de penalización de } i \text{ a } j,\ i > j \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$c_{11} = \$40.00$$
$$c_{24} = \$40.00 + (\$0.50 + \$0.50 = \$41.00$$
$$c_{41} = \$40.00 + (\$2.00 + \$2.00 + \$2.00) = \$46.00$$

En la figura 5.3 se resume la solución óptima. Las líneas interrumpidas indican abastecimiento retrasado, las líneas de puntos indican producción para periodo futuro y las líneas llenas muestran la producción en un periodo, para la demanda de ese periodo.

Ejemplo 5.2-2 (Mantenimiento de equipo)

Arkansas Pacific opera un aserradero de tamaño mediano. Ahí se producen varias clases de madera que van desde el pino suave hasta el encino duro, siguiendo un programa semanal. Dependiendo de la clase de madera que se trabaje, la demanda de hojas varía de un día para otro, según los datos siguientes, para una semana de siete días:

Día	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.	Sáb.	Dom.
Demanda (hojas)	24	12	14	20	18	14	22

El aserradero puede satisfacer la demanda diaria como sigue:

1. Comprar hojas nuevas a $12 cada una.
2. Usar un servicio nocturno de afilado, a un costo de $6 por hoja, o un servicio lento, a los 2 días, al costo de $3 por hoja.

El caso se puede representar como un modelo de transporte con ocho fuentes y siete destinos. Los destinos representan los siete días de la semana. Las fuentes del modelo se definen como sigue: la fuente 1 es comprar hojas nuevas, que en el caso extremo, podrían cubrir la demanda durante todos los 7 días. Las fuentes 2 a 8 corresponden a los 7 días de la semana. La cantidad de oferta para cada una de esas fuentes es igual a la cantidad de hojas usadas al final del día correspondiente. Por ejemplo, la fuente 2, es decir el lunes, tendrá un abasto de hojas usadas igual a la demanda del lunes. El costo unitario de transporte es $12, $6 o $3, dependiendo de si la hoja se suministra nueva, o es de las de afilado nocturno o de afilado a 2 días. Nótese que servicio nocturno equivale a que las hojas usadas que salieron al *final* del día i se usarán al *iniciar* el día $i + 1$, o del día $i + 2$. El afilado a 2 días equivale a que las hojas usadas que se manden al *final* del día i se usarán al *iniciar* el día $i + 3$, o cualquier día posterior a éste. La columna "desecho" es un destino ficticio que recibe las hojas que quedaron sin afilar al final del día. El modelo completo se ve en la tabla 5.13.

TABLA 5.13

	1 Lun.	2 Mar.	3 Mié.	4 Jue.	5 Vie.	6 Sáb.	7 Dom.	8 Desecho	
1-Nuevo	$12 **24**	$12 **2**	$12	$12	$12	$12	$12	$0 **98**	**124**
2-Lun.	*M*	$6 **10**	$6 **8**	$3 **6**	$3	$3	$3	$0	**24**
3-Mar.	*M*	*M*	$6 **6**	$6	$3 **6**	$3	$3	$0	**12**
4-Mié.	*M*	*M*	*M*	$6 **14**	$6	$3	$3	$0	**14**
5-Jue.	*M*	*M*	*M*	*M*	$6 **12**	$6	$3 **8**	$0	**20**
6-Vie.	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	$6 **14**	$6	$0 **4**	**18**
7-Sáb.	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	$6 **14**	$0	**14**
8-Dom.	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	$0 **22**	**22**
	24	**12**	**14**	**20**	**18**	**14**	**22**	**124**	

La solución óptima (obtenida con TORA, archivo ch5ToraEquipMaintEx5-2-2.txt) se resume como sigue:

		Servicio de afilado		
Periodo	*Hojas nuevas*	*Nocturno*	*2 días*	*Desecho*
Lun.	24 (Lun.)	10 (Mar.) + 8 (Mié.)	6 (Jue.)	0
Mar.	2 (Mar.)	6 (Mié.)	6 (Vie.)	0
Mié.	0	14 (Jue.)	0	0
Jue.	0	12 (Vie.)	8 (Dom.)	0
Vie.	0	14 (Sáb.)	0	4
Sáb.	0	14 (Dom.)	0	0
Dom.	0	0	0	22
		Costo total = $840		

Observe la interpretación de la solución. Al iniciar el lunes, Arkansas Pacific compra 24 cuchillas nuevas. Al final del mismo día, la empresa tendrá 24 hojas usadas, 18 de las cuales se mandan al afilado nocturno y 6 al afilado en 2 días. De las 18 hojas afiladas durante la noche, se usarán 10 el martes y 8 el miércoles. Las seis hojas del servicio de 2 días se usarán el jueves. El resto de la tabla se interpreta en forma parecida. La columna de desecho muestra la cantidad de hojas usadas que quedan sin afilar al final del día correspondiente.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.2A

1. En el ejemplo 5.2-1 suponga que el costo de retención por unidad depende del periodo, y es de 40, 30 y 70 centavos para los periodos 1, 2 y 3, respectivamente. Los costos de penalización y de producción quedan como en el ejemplo. Determine la solución óptima usando TORA, e interprete los resultados.
2. En el ejemplo 5.2-2 suponga que el servicio de afilado es de 3 días a $1 por hoja el lunes y el martes (días 1 y 2); reformule el problema e interprete la solución obtenida con TORA.
3. En el ejemplo 5.2-2, si no se usa una hoja el día que se afila, se incurre en un costo de 50 centavos por hoja por día. Reformule el modelo e interprete la solución con TORA.
4. JoShop quiere asignar cuatro categorías distintas de máquinas a cinco clases distintas de tareas. La cantidad de máquinas disponibles en las cuatro categorías es 25, 30, 20 y 30. La cantidad de puestos en las cinco tareas es 20, 20, 30, 10 y 25. Las máquinas de la categoría 4 no se pueden asignar a tareas de la clase 4. En la tabla 5.14 se ven los costos unitarios (en $) de asignar una categoría de máquina a una clase de tarea. El objetivo del problema es determinar la cantidad óptima de máquinas de cada categoría que se deben asignar a cada clase de tarea. Resuelva el problema con TORA e interprete la solución.

TABLA 5.14

		Tipo de tarea				
		1	2	3	4	5
Categoría de máquina	1	10	2	3	15	9
	2	5	10	15	2	4
	3	15	5	14	7	15
	4	20	15	13	—	8

5. La demanda de un artículo perecedero durante los cuatro meses próximos es 400, 300, 420 y 380 toneladas, respectivamente. Las posibilidades de la oferta durante los mismos meses son 500, 600, 200 y 300 toneladas. El precio de compra por tonelada varía de un mes al otro, y se estima en \$100, \$140, \$120 y \$150, respectivamente. Como el artículo es perecedero, se debe consumir la oferta del mes en curso en menos de tres meses (que cuentan a partir del mes en curso). El costo de almacenamiento por tonelada y por mes es de \$3. La naturaleza del artículo no permite surtir pedidos atrasados. Resuelva el problema como modelo de transporte con TORA, y determine el programa óptimo de entrega durante los cuatro meses siguientes.
6. La demanda de cierto motor pequeño, durante los cinco trimestres pequeños, es 200, 150, 300, 250 y 400 unidades. El fabricante del motor tiene distintas capacidades de producción, que estima en 180, 230, 430, 300 y 300 para los cinco trimestres. No se permite surtir pedidos atrasados, pero el fabricante puede usar tiempo extra para surtir la demanda inmediata, en caso necesario. La capacidad de producción en tiempo extra, para cada periodo, es la mitad de la capacidad normal. Los costos de producción, por unidad y durante los cinco periodos son \$100, \$96, \$116, \$102 y \$106, respectivamente. El costo de producción por motor, durante tiempo extra, es 50% mayor que el costo normal de producción. Si se produce ahora un motor para usarlo en periodos posteriores, se incurre en un costo adicional por almacenaje de \$4 por motor por trimestre. Formule el problema como modelo de transporte y use TORA para determinar la cantidad óptima de motores a producir durante tiempo normal y durante tiempo extra, en cada periodo.
7. Se hace un mantenimiento preventivo periódico a motores de aviones, donde se debe cambiar un componente importante. La cantidad de motores programados para ese mantenimiento, durante los seis meses siguientes, se estima en 200, 180, 300, 198, 230 y 290, respectivamente. Todo el trabajo de mantenimiento se hace durante los dos primeros días del mes, cuando se puede cambiar un componente usado por uno nuevo, o por un componente reconstruido. La reconstrucción de los componentes usados se puede hacer en un taller local, y cuando salen están listos para usarse al principio del mes siguiente, o bien se pueden mandar a un taller central, y en ese caso hay una espera de tres meses (que incluyen al mes en el que se hace el mantenimiento). El costo de reparación en el taller local es de \$120 por componente. En el taller central el costo sólo es de \$35 por componente. Un componente reconstruido que se use en algún mes posterior causará un costo adicional de almacenamiento de \$1.50 por unidad y por mes. Los componentes nuevos se pueden comprar a \$200 cada uno, en el mes 1, y con 5% de aumento en el precio cada dos meses. Formule el problema como modelo de transporte y resuélvalo con TORA para determinar el programa óptimo para satisfacer la demanda del componente durante los seis meses siguientes.
8. El Servicio de Parques Nacionales recibe cuatro ofertas para talar tres bosques de pino en Arkansas. La superficie de los sitios es 10,000, 20,000 y 30,000 acres. Un solo concursante puede participar cuando mucho con el 50% de la superficie total. Las ofertas por acre, en los tres lugares, se ven en la tabla 5.15. El concursante 2 no desea participar en el lugar 1, y el concursante 3 no puede participar en el lugar 2.

TABLA 5.15

		Lugar 1	Lugar 2	Lugar 3
Concursante	1	\$520	\$210	\$570
	2	—	\$510	\$495
	3	\$650	—	\$240
	4	\$180	\$430	\$710

a) En el caso presente, se necesita *maximizar* la utilidad total en las ofertas, para el Servicio de Parques. Indique cómo se puede formular el problema como modelo de transporte.

b) Use TORA para determinar la superficie que se debe asignar a cada uno de los cuatro concursantes.

5.3 EL ALGORITMO DE TRANSPORTE

El algoritmo de transporte sigue exactamente los mismos pasos que el método símplex (capítulo 3). Sin embargo, en lugar de usar la tabla símplex normal, se aprovecha la ventaja de la estructura especial del modelo de transporte para organizar los cálculos en una forma más cómoda.

Se debe agregar que el algoritmo especial de transporte fue desarrollado por primera vez cuando la norma eran los cálculos a mano, y se necesitaba soluciones "con método abreviado". Hoy contamos con poderosos programas de cómputo que pueden resolver un modelo de transporte de cualquier tamaño en forma de programación lineal. De hecho, TORA usa el formato de modelo de transporte sólo como fachada en pantalla, pero maneja todos los cálculos necesarios con el método símplex normal. Sin embargo, el algoritmo, además de su importancia histórica, permite tener una perspectiva del uso de las relaciones teóricas primal-dual que se describieron en la sección 4.2, para llegar a un resultado práctico, de mejorar los cálculos a mano. El ejercicio es intrigante desde el punto de vista teórico.

Para facilitar la presentación de los detalles del algoritmo usaremos el ejemplo numérico que sigue:

Ejemplo 5.3-1 (SunRay Transport)

La compañía SunRay Transport transporta grano desde tres silos hasta tres molinos. La oferta (en camionadas) y la demanda (también en camionadas) se resume en el modelo de transporte de la tabla 5.16, junto con los costos unitarios de transporte por camionada en las distintas rutas. Los costos unitarios de transporte, c_{ij} (que se ven en la esquina superior derecha o "esquina noreste" de cada tabla), están en cientos de $.

TABLA 5.16

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
Silo 2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	**25**
Silo 3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

En el modelo se busca el programa de transportes entre silos y molinos que tenga costo mínimo. Eso equivale a determinar la cantidad x_{ij} transportada del silo i al molino j ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$).

Los pasos del algoritmo de transporte son exactamente iguales a los del algoritmo símplex:

Paso 1. Determinar una solución básica factible *de inicio* y seguir con el paso 2.

Paso 2. Usar la condición de optimalidad del método símplex para determinar la *variable de entrada* entre todas las variables no básicas. Si se satisface la condición de optimalidad, detenerse. En caso contrario seguir en el paso 3.

Paso 3. Usar la condición de factibilidad del método símplex para determinar la *variable de salida* entre todas las variables básicas en ese momento, y determinar la nueva solución básica. Regresar al paso 2.

5.3.1 Determinación de la solución de inicio

Un modelo general de transporte con m fuentes y n destinos tiene $m + n$ ecuaciones de restricción, una para cada fuente y cada destino (véase el ejemplo 5.1-1). Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda), una de esas ecuaciones es redundante. Entonces, el modelo tiene $m + n - 1$ ecuaciones independientes de restricción, lo que quiere decir que la solución básica de inicio consiste en $m + n - 1$ variables básicas. En el ejemplo 5.3-1 la solución de inicio tiene $3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

La estructura especial del modelo de transporte permite asegurar que haya una solución básica no artificial de inicio, obtenida con uno de los tres métodos siguientes:[2]

1. Método de la esquina noroeste (superior, izquierda).
2. Método del costo mínimo.
3. Método de aproximación de Vogel.

Los tres métodos difieren en la "calidad" de la solución básica de inicio que obtienen, en el sentido de que una mejor solución de inicio produce un valor objetivo menor. En general, el método de Vogel produce la mejor solución básica de inicio, y el de la esquina noroeste produce la peor. La compensación es que el método de la esquina noroeste implica el mínimo de cálculos.

Método de la esquina noroeste. El método comienza en la celda (ruta) de la esquina noroeste, o superior izquierda, de la tabla (variable x_{11}).

Paso 1. Asignar todo lo más que se pueda a la celda seleccionada y ajustar las cantidades asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.

---

[2]Los tres métodos aparecen en el módulo tutorial de TORA, guía del usuario. Véase la sección 5.3.3.

Paso 2. Salir del renglón o la columna cuando se alcance oferta o demanda cero, y tacharlo, para indicar que no se pueden hacer más asignaciones a ese renglón o columna. Si un renglón y una columna dan cero al mismo tiempo, *tachar sólo uno* (el renglón o la columna) y dejar una oferta (demanda) cero en el renglón (columna) que no se tachó.

Paso 3. Si queda *exactamente un* renglón o columna sin tachar, detenerse. En caso contrario, avanzar a la celda de la derecha si se acaba de tachar una columna, o a la de abajo si se tachó un renglón. Seguir con el paso 1.

Ejemplo 5.3-2

Al aplicar el procedimiento al modelo del ejemplo 5.3-1 se obtiene la solución básica de inicio, en la tabla 5.17. Las flechas indican el orden en el que se generan las cantidades asignadas.

TABLA 5.17

	1	2	3	4	Oferta
1	10 **5**	2 **10**	20	11	**15**
2	12	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
3	4	14	16	18 **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

La solución básica de inicio es la siguiente:

$$x_{11} = 5,\ x_{12} = 10$$

$$x_{22} = 5,\ x_{23} = 15,\ x_{24} = 5$$

$$x_{34} = 10$$

El costo del programa correspondiente es

$$z = 5 \times 10 + 10 \times 2 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 10 \times 18 = \$520$$

Método del costo mínimo. Este método determina una mejor solución de inicio, porque se concentra en las rutas menos costosas. Se inicia asignando todo lo posible a la celda que tenga el mínimo costo unitario (los empates se rompen en forma arbitraria). A continuación, el renglón o la columna ya satisfechos se tacha, y las cantidades de oferta y demanda se ajustan en consecuencia. Si se satisfacen en forma simultánea un renglón y una columna al mismo tiempo, *sólo se tacha uno* de los dos, igual que en el método de la esquina noroeste. A continuación se busca la celda no tachada con el costo unitario mínimo y se repite el proceso hasta que queda sin tachar exactamente un renglón o una columna.

Ejemplo 5.3-3

Se aplicará el método del costo mínimo al ejemplo 5.3-1 de la siguiente manera:

1. La celda (1, 2) tiene el costo unitario mínimo de toda la tabla (= \$2). Lo más que se puede transportar por (1, 2) es $x_{12} = 15$ camionadas, y en este caso se satisfacen al mismo tiempo el renglón 1 y la columna 2. Se tacha en forma arbitraria la columna 2 y se ajusta la oferta del renglón 1 a cero.
2. La celda (3, 1) tiene el mínimo costo unitario sin tachar (= \$4). Se asigna $x_{31} = 5$, se tacha la columna 1 porque quedó satisfecha y se ajusta la demanda del renglón 3 a $10 - 5 = 5$ camionadas.
3. Al continuar de este modo, se asignan en forma sucesiva 15 camionadas a la celda (2, 3), 0 camionadas a la celda (1, 5), 5 a la celda (3, 4) y 10 a la (2, 4) (¡verifíquelo!).

La solución de inicio que resulta se muestra en la tabla 5.18. Las flechas indican el orden en que se hacen las asignaciones. La solución de inicio, formada con 6 variables básicas, es

$$x_{12} = 15,\ x_{14} = 0$$
$$x_{23} = 15,\ x_{24} = 10$$
$$x_{31} = 5,\ x_{34} = 5$$

TABLA 5.18

	1	2	3	4	Oferta
1	10	2 / **15**	20	11 / **0**	**15**
2	12	7	9 / **15**	20 / **10**	**25**
3	4 / **5**	14	16	18 / **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

El valor objetivo asociado es

$$z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$$

La calidad de la solución de inicio obtenida con costo mínimo es mejor que la del método de la esquina noroeste (ejemplo 5.3-2), porque obtiene un valor menor de z (\$475 en comparación de \$520 con el método de la esquina noroeste).

Método de aproximación de Vogel. Es una versión mejorada del método del costo mínimo, que en general produce mejores soluciones de inicio.

Paso 1. Determinar para cada renglón (columna) una medida de penalización restando el elemento de costo unitario *mínimo* en el renglón (columna) del elemento con costo unitario *siguiente al mínimo* del mismo renglón (columna).

Paso 2. Identificar el renglón o columna con la mayor penalización. Romper los empates en forma arbitraria. Asignar todo lo posible a la variable que tenga el mínimo costo unitario del renglón o columna seleccionado. Ajustar la oferta y la demanda y tachar el renglón *o* la columna ya satisfechos. Si se satisfacen un renglón y una columna en forma simultánea, sólo se tacha uno de los dos y al que queda se le asigna oferta o demanda cero.

Paso 3. **a)** Si queda sin tachar exactamente un reglón o columna con cero oferta o demanda, detenerse.

b) Si queda sin tachar un renglón (columna) con oferta (demanda) *positiva*, determinar las variables básicas en el renglón (columna) con el método de costo mínimo. Detenerse.

c) Si todos los renglones y columnas que no se tacharon tienen cero oferta y demanda (restante), determinar las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Detenerse.

d) En cualquier otro caso, seguir en el paso 1.

Ejemplo 5.3-4

Se aplica el método de Vogel al ejemplo 5.3-1. En la tabla 5.19 se calcula el primer conjunto de penalizaciones.

TABLA 5.19

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	2	20	11	**15**	10 − 2 = 8
2	12	7	9	20	**25**	9 − 7 = 2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	14 − 4 = 10
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización de columna	10 − 4 = 6	7 − 2 = 5	16 − 9 = 7	18 − 11 = 7		

Como el renglón 3 tiene la máxima penalización (= 10) y la celda (3, 1) tiene el costo unitario mínimo de ese renglón, se asigna la cantidad 5 a x_{31}. Queda satisfecha ahora la columna 1 y se debe tachar. A continuación se vuelven a calcular nuevas penalizaciones, como se ve en la tabla 5.20.

En la tabla 5.20 se ve que el renglón 1 tiene la penalización máxima (= 9). En consecuencia, se asigna la máxima cantidad posible a la celda (1, 2), con lo que se obtiene $x_{12} = 15$, y al mismo tiempo se satisfacen tanto el renglón 1 como la columna 2. En forma arbitraria se tacha la columna 2 y se ajusta a cero la oferta en el renglón 1.

Al continuar en la misma forma, el renglón 2 produce la penalización máxima (=11) y se asigna $x_{23} = 15$, con lo que se tacha la columna 3 y quedan 10 unidades en el renglón 2. Sólo

TABLA 5.20

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	2	20	11	**15**	9
2	12	7	9	20	**25**	2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	2
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización de columna	—	5	7	7		

queda la columna 4, y tiene 15 unidades de oferta positiva. Al aplicar el método del costo mínimo a esa columna, se asignan en forma sucesiva $x_{14} = 0$, $x_{34} = 5$ y $x_{24} = 10$ (¡verifíquelo!). Hay otras soluciones posibles, que dependen de cómo se rompen los empates. El valor objetivo asociado a esta solución es

$$z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$$

Sucede que esta solución tiene el mismo valor objetivo que la obtenida con el método del costo mínimo. En general, el método de Vogel obtiene mejor solución de inicio.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3A

1. Compare las soluciones de inicio, obtenidas con los métodos de esquina noroeste, de costo mínimo y de Vogel, en cada uno de los modelos siguientes:

(a)

0	2	1	**6**
2	1	5	**7**
2	4	3	**7**
5	**5**	**10**	

(b)

1	2	6	**7**
0	4	2	**12**
3	1	5	**11**
10	**10**	**10**	

(c)

5	1	8	**12**
2	4	0	**14**
3	6	7	**4**
9	**10**	**11**	

5.3.2 Cálculos iterativos del algoritmo de transporte

Después de determinar la solución de inicio (con cualquiera de los métodos de la sección 5.3.1) se usa el siguiente algoritmo para determinar la solución óptima:

Paso 1. Usar la *condición de optimalidad* símplex para determinar la *variable de entrada* como variable no básica actual que puede mejorar la solución. Si se satisface la condición de optimalidad, detenerse. En caso contrario seguir en el paso 2.

Paso 2. Determinar la *variable de salida* con la *condición de factibilidad* símplex. Cambiar la base y regresar al paso 1.

Los cálculos de cambio de base no implican las operaciones familiares de renglón que se usan en el método símplex. En lugar de ello, la estructura especial del modelo de transporte permite hacer cálculos más sencillos.

Ejemplo 5.3-5

Resolver el modelo de transporte del ejemplo 5.3-1, comenzando con la solución de esquina noroeste.

La tabla 5.21 muestra la solución de inicio con el método de la esquina noroeste, que se obtuvo en la tabla 5.17 del ejemplo 5.3-2.

TABLA 5.21

	1	2	3	4	Oferta
1	10 / **5**	2 / **10**	20	11	**15**
2	12	7 / **5**	9 / **15**	20 / **5**	**25**
3	4	14	16	18 / **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

La determinación de la variable de entrada, entre las variables no básicas actuales (las que no forman parte de la solución básica de inicio) se hace calculando los coeficientes no básicos en el renglón z con el **método de los multiplicadores**, que como veremos en la sección 5.3.4, tiene su raíz en la teoría de la dualidad en programación lineal.

En este método se asocian los multiplicadores u_i y v_i al renglón i y la columna j de la tabla de transporte. En la sección 5.3.4 se demuestra para cada variable x_{ij}, que estos multiplicadores satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{, para cada } x_{ij} \textit{ básica}$$

En el ejemplo 5.3-1, hay 7 variables y 6 ecuaciones que corresponden a las seis variables básicas. Para resolver esas ecuaciones con el método de los multiplicadores se necesita igualar, en forma arbitraria, $u_i = 0$ y a continuación despejar y resolver las variables restantes como se ve a continuación.

Variable básica	Ecuación (u, v)	Solución
x_{11}	$u_1 + v_1 = 10$	$u_1 = 0 \rightarrow v_1 = 10$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 2$	$u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 2$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 7$	$v_2 = 2 \rightarrow u_2 = 5$
x_{23}	$u_2 + v_3 = 9$	$u_2 = 5 \rightarrow v_3 = 4$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 20$	$u_2 = 5 \rightarrow v_4 = 15$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 18$	$v_4 = 15 \rightarrow u_3 = 3$

Resumiendo, se tienen

$$u_1 = 0,\ u_2 = 5,\ u_3 = 3$$
$$v_1 = 10,\ v_2 = 2,\ v_3 = 4,\ v_4 = 15$$

A continuación se usan u_i y v_j para evaluar las variables no básicas, calculando

$$u_i + v_j - c_{ij} \text{, para cada } x_{ij} \textit{ no básica}$$

Los resultados de estas evaluaciones se ven en la siguiente tabla:

Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16$
x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4$
x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 10 - 12 = 3$
x_{31}	$u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 10 - 4 = \mathbf{9}$
x_{32}	$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9$
x_{33}	$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9$

La información anterior, con el hecho que $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ para toda x_{ij} no básica, en realidad equivale a calcular el renglón z de la tabla símplex, como se ve en el siguiente resumen:

Básica	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	↓ x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
z	0	0	−16	4	3	0	0	0	9	−9	−9	0

Como en el modelo de transporte se busca *minimizar* el costo, la variable de entrada es la que tiene el coeficiente *más positivo* en el renglón de z. De esta forma, x_{31} es la variable de entrada.

Los cálculos anteriores se suelen hacer en forma directa sobre el tabla de transporte, como se ve en la tabla 5.22, lo que significa que no es necesario escribir las ecuaciones de (u, v) en forma explícita. En lugar de ello, se inicia igualando $u_1 = 0$.[3] A continuación se pueden calcular los valores de v para todas las columnas que tengan variables *básicas* en el renglón 1, es decir, v_1 y v_2. Después se calcula u_2 con base en la ecuación (u, v) de x_{22} básica. Ahora, dada u_2, se pueden calcular v_3 y v_4. Por último se determina u_3 usando la ecuación básica de x_3. Una vez determinadas todas las u y las v, se pueden evaluar las variables no básicas, calculando $u_i + v_j - c_{ij}$ para cada x_{ij} no básica. Esas evaluaciones se ven en la tabla 5.22, en la esquina inferior izquierda ("sureste") de cada celda.

TABLA 5.22

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10 **5**	2 **10**	20 −16	11 4	**15**
$u_2 = 5$	12 3	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
$u_3 = 3$	4 9	14 −9	16 −9	18 **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

[3]El módulo tutorial de TORA tiene por objeto demostrar que asignar un valor inicial cero a cualquier u o v no afecta los resultados de la optimización. Véase la sección 5.3.3.

Habiendo determinado a x_{31} como la variable de entrada, se necesita determinar la variable de salida. Recuérdese que si x_{31} entra a la solución para volverse básica, una de las variables básicas actuales debe salir como no básica (a nivel cero).

La selección de x_{31} como variable de entrada indica que se quiere transportar por esta ruta, porque reduce el costo total de transporte. ¿Cuál es lo máximo que se puede transportar por la nueva ruta? Obsérvese en la tabla 5.22 que si la ruta (3, 1) transporta θ (es decir, $x_{31} = \theta$), el valor máximo de θ se determina con base en dos condiciones.

1. Los límites de oferta y los requerimientos de demanda permanecen satisfechos.
2. Los transportes en todas las rutas deben ser no negativos.

Esas dos condiciones determinan el valor máximo de θ y la variable de salida como sigue: primero se forma un *ciclo cerrado* que comienza y termina en la celda de la variable de entrada (3, 1). El ciclo consiste sólo en segmentos *horizontales* y *verticales conectados* (no se permiten diagonales).[4] Excepto para la celda de la variable de entrada, cada esquina del ciclo cerrado debe coincidir con una variable básica. La tabla 5.23 muestra el ciclo para x_{31}. Existe exactamente un ciclo para determinada variable de entrada.

TABLA 5.23

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10; **5 − Θ** (−)	2; **10 + Θ** (+)	20; −16	11; 4	**15**
$u_2 = 5$	12; 3	7; **5 − Θ** (−)	9; **15**	20; **5 + Θ** (+)	**25**
$u_3 = 3$	4; **Θ** (+); 9	14; −9	16; −9	18; **10 − Θ** (−)	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

A continuación se asigna la cantidad θ a la celda de la variable de entrada (3, 1). Para que se sigan satisfaciendo los límites de oferta y demanda, se debe alternar entre restar y sumar la cantidad θ en las *esquinas* sucesivas del ciclo, como se ve en la tabla 5.23 (no importa si el circuito se recorre en dirección de las manecillas del reloj, o la contraria). Los nuevos valores de las variables siguen siendo no negativos si

$$x_{11} = 5 - \theta \geq 0$$

$$x_{22} = 5 - \theta \geq 0$$

$$x_{34} = 10 - \theta \geq 0$$

[4] El módulo tutorial de TORA permite al lector determinar las celdas del *ciclo cerrado* en forma interactiva, con retroalimentación inmediata respecto a la validez de las selecciones. Véase la sección 5.3.3.

El valor máximo de θ es 5, que se presenta cuando tanto x_{11} como x_{22} llegan al nivel cero. Como sólo una variable básica actual debe salir de la solución básica, se puede escoger entre x_{11} o x_{22} como variable de salida. En forma arbitraria escogeremos a x_{11} para que salga de la solución.

La selección de x_{31} (= 5) como variable de entrada y x_{11} como variable de salida requiere el ajuste de los valores de las variables básicas en las esquinas del ciclo cerrado, como se ve en la tabla 5.24. Como cada unidad que se transporta por la ruta (3, 1) reduce el costo de transporte en \$9 ($= u_3 + v_1 - c_{31}$), el costo total asociado con el nuevo programa es \$9 × 5 = \$45 menos que en el programa anterior. En consecuencia, el costo nuevo es \$520 − \$45 = \$475.

TABLA 5.24

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	(10) −9	(2) **15 − θ** (−)	(20) −16	(11) **θ** (+) 4	**15**
$u_2 = 5$	(12) −6	(7) **0 + θ** (+)	(9) **15**	(20) **10 − θ** (−)	**25**
$u_3 = 3$	(4) **5**	(14) −9	(16) −9	(18) **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Con la nueva solución básica se repite el cálculo de los multiplicadores u y v, como se ve en la tabla 5.24. La variable de entrada es x_{14}. El ciclo cerrado indica que $x_{14} = 10$ y que la variable de salida es x_{24}.

La nueva solución se ve en la tabla 5.25: cuesta \$4 × 10 = \$40 menos que la anterior, y el costo nuevo será así \$475 − \$40 = \$435. Los nuevos $u_i + v_j - c_{ij}$ son ahora negativos para todas las x_{ij} no básicas. Por consiguiente, la solución de la tabla 5.25 es óptima.

TABLA 5.25

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	(10) −13	(2) **5**	(20) −16	(11) **10**	**15**
$u_2 = 5$	(12) −10	(7) **10**	(9) **15**	(20) −4	**25**
$u_3 = 7$	(4) **5**	(14) −5	(16) −5	(18) **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

En la tabla siguiente se resume la solución óptima.

Del silo	Al molino	Camionadas
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5
	Costo óptimo = \$435	

5.3.3 Solución del modelo de transporte con TORA

Ya hemos usado TORA en modo automático para resolver el modelo de transporte. En esta sección se presenta el módulo tutorial e iterativo de TORA. También se indica cómo se resuelve el mismo modelo con el Solver de Excel, y con LINGO.

Módulo tutorial e iterativo de TORA. Parta del `menú resolver/modificar`, seleccione `resolver` ⇒ `iteraciones`, y escoja uno de los tres métodos: esquina noroeste, costo mínimo o de Vogel) para iniciar las iteraciones del modelo de transporte. El módulo de iteraciones ofrece dos funciones interactivas útiles:

1. Puede usted igualar cualquier u o v a cero antes de generar la iteración 2 (lo predeterminado es $u_1 = 0$). Observe entonces que aunque cambian los valores de u_i y de v_j, permanece sin cambio la evaluación de las celdas no básicas ($= u_i + v_j - c_{ij}$). Esto quiere decir que al principio se puede igualar a cero cualquier u o v (de hecho, cualquier valor) sin afectar los cálculos de optimalidad.
2. Puede usted probar su comprensión de la selección del *ciclo cerrado* haciendo clic (en cualquier orden) en las celdas que forman el ciclo. Si su selección es correcta, la celda cambiará de color (verde para la variable de entrada, rojo para la variable de salida y gris en cualquier otro caso).

La figura 5.4 muestra las iteraciones del ejemplo 5.3-1, con TORA, comenzando con el método de la esquina noroeste.

Solución con Solver de Excel. La captura del modelo de transporte en una hoja de cálculo de Excel es directa. En la figura 5.5 se resuelve el ejemplo 5.3-1 (archivo ch5SolverTransportation.xls). Se puede usar la plantilla para resolver modelos hasta con 10 fuentes y 10 destinos. Divide la hoja de cálculo en las secciones de datos y de resultados (entrada y salida). En la sección de datos, entre los datos *obligatorios* están la cantidad de fuentes (celda B3), cantidad de destinos (celda B4), matriz de costo unitario (celdas B6:K15), nombres de fuentes (celdas A6:A15), nombres de destinos (celdas B5:K5), cantidades de oferta (celdas L6:L15) y de demanda (celdas B16:K16). La sección de resultados (celdas B20:K29) presenta automáticamente la solución óptima en forma de matriz. El costo total asociado aparece en la celda

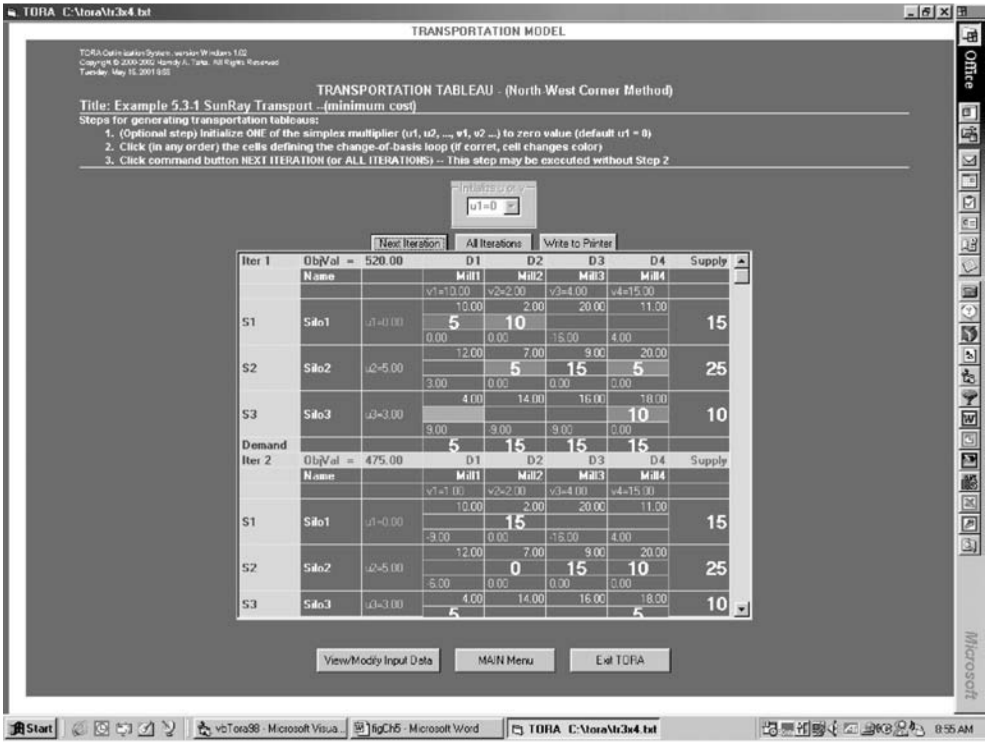


FIGURA 5.4
Iteraciones de transporte para el ejemplo 5.3-1, con TORA

A19. Hemos limitado el tamaño del modelo, en forma arbitraria, a que sea 10 × 10, para que quepa la presentación en una pantalla. Un ejercicio directo es diseñar un modelo de hoja de cálculo que tenga el tamaño que se desee, como se ve en la explicación siguiente.

Una vez capturados los datos sólo pida Solver y haga clic en OK (aceptar). La solución aparecerá en las celdas B20:K29.

El desarrollo del modelo en la hoja de cálculos incluye las fórmulas siguientes:

Función objetivo: Escriba `=SUMPRODUCT(B6:K15,B20:K29)` en A19.

Transportes desde una fuente: Escriba `=SUM(B20:K20)` en L20 y cópielos en L21:L29.

Transporte para un destino: Escriba `=SUM(B20:B29)` en B30 y cópielos en C30:K30.

Las restricciones del modelo relacionan las cantidades transportadas con la oferta total en cada fuente y con la demanda total en cada destino; es decir,

```
$L$20:$L$29=$L$6:$L$15
$B$30:$K$30=$B$16:$K$16
```

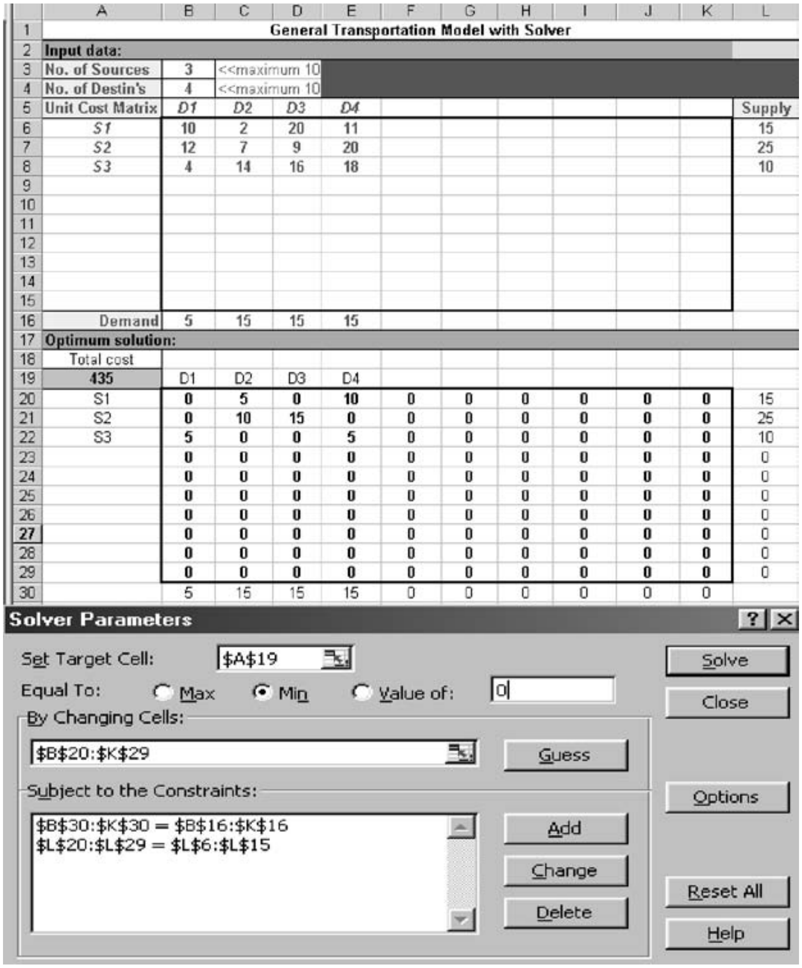


FIGURA 5.5
Solución del modelo de transporte, ejemplo 5.3-1, con Solver de Excel

Se puede desarrollar otra interesante formulación del modelo de transporte en hoja de cálculo con los mismos datos que en el modelo anterior. La diferencia está en la sección de resultados y en la especificación de los parámetros de Solver. El modelo agrega una sección intermedia de cálculos, parte fundamental del desarrollo de la hoja de cálculo. *Nuestro modelo automatiza totalmente las secciones de resultados y de cálculos intermedios*. La única información que debe escribir el usuario son los parámetros de Solver y, naturalmente, los datos.

En la figura 5.6 se resuelve el ejemplo 5.2-5 con la nueva formulación (archivo ch5SolverNetworkBasedTransportation.xls). La solución del modelo aparece en la columna B; comienza en la celda B22 bajo el encabezado “Flow” (flujo). Los nombres de las rutas aparecen en la columna A (de la celda A22 hacia abajo) y se generan en forma automática con los nombres de las fuentes y los destinos en la sección de datos.

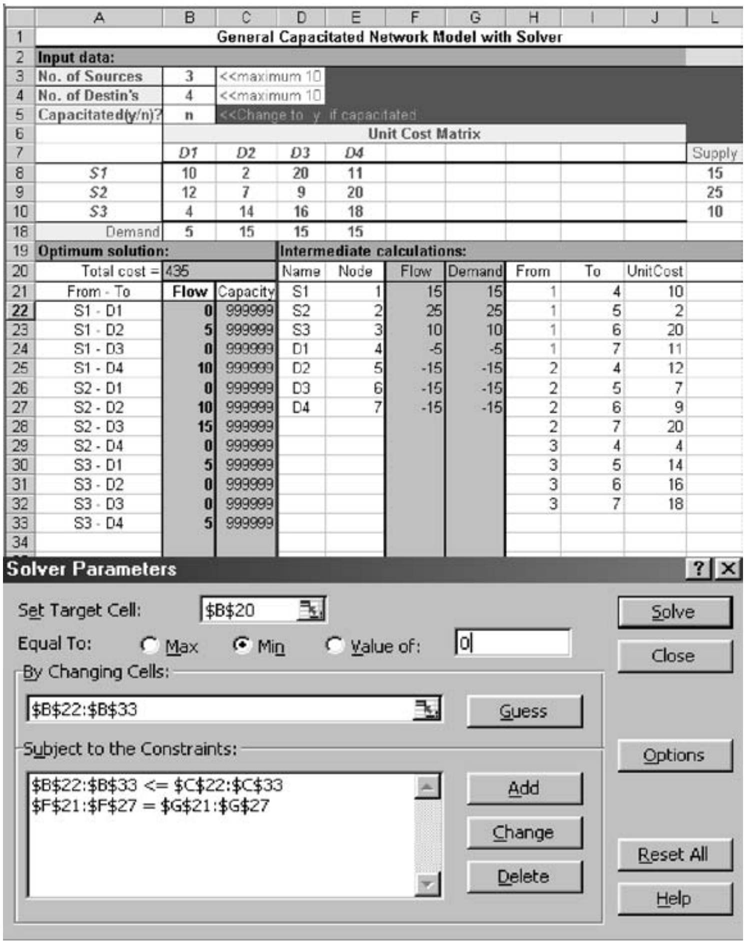


FIGURA 5.6

Solución del modelo de transporte, ejemplo 5.3-1, basada en red y con Solver de Excel

Las fórmulas principales que activan la hoja de cálculo están en la sección de cálculos intermedios. Primero, en la columna E (celda E21 hacia abajo) tiene los números de serie de las fuentes y los destinos, comenzando con las fuentes. Esta información, junto con la cantidad de fuentes y la de destinos, se usa para representar en forma numérica a las rutas del modelo. Por ejemplo, la fuente 1 (celda H21) al destino 4 (celda I21) define la ruta de la fuente *S*1 al destino *D*1.

Con la información en las columnas H e I, las fórmulas de flujo por nodo en la columna F (celda F21 hacia abajo) se escriben en la celda F21 como sigue:[5]

```
=SUMAR.SI($H$21:$H$121,$E$21,$B$22:$B$122)-SUMAR.SI($I$21:$I$121,
 $E$21,$B$22:$B$122)
```

[5]La idea de usar SUMIF para representar las ecuaciones de balance de flujo en la red se tomó de C.T. Ragsdale "Solving Network Flow Problems in a Spreadsheet", *COMPASS News*, Issue No. 2, primavera 1996, págs. 4-5. El resto de la hoja "de cálculo, en especial la automatización de las secciones de resultados y de cálculos intermedios, es del autor.

A continuación la fórmula se copia en las celdas F22:F121.

La fórmula SUMIF (SUMAR.SI) calcula en esencia el flujo neto (entrada − salida) a través de cada uno de los nodos de la columna E (celda E21 hacia abajo). Es importante notar que en el modelo normal de transporte que se tiene en este momento, la fórmula calcula de hecho la suma de los flujos de salida de cada fuente *o bien* la suma del flujo de entrada a cada nodo de destino. Si bien pudimos haber usados dos fórmulas aparte para representar la salida de la fuente y la entrada al destino, al combinar las dos en una fórmula se puede usar la hoja de cálculo en forma directa, con los modelos generales de redes del capítulo 6.

La ecuación de flujo correspondiente a cada nodo asume la forma:

$$\text{flujo de entrada} - \text{flujo de salida} = \text{flujo neto}$$

Se necesita especificar las cantidades de flujo neto en cada nodo. La columna G (celda G21 hacia abajo) contiene esos datos, que se copian de la sección de datos en forma automática usando la función INDEX (ÍNDICE). Observe que el flujo neto asociado con un nodo fuente es positivo, y con un nodo destino es negativo. La razón de usar flujo neto negativo en los destinos se debe a la forma en que se define el flujo del nodo en la columna F.

También se puede usar la hoja de cálculo para definir restricciones de capacidad para el flujo en las distintas rutas del modelo de transporte. Primero se escribe el símbolo “y” (sin las comillas) en la celda B5. Esto creará e identificará en forma adecuada las celdas N8:W17 para escribir las restricciones de capacidad. Una celda asociada con una ruta de capacidad infinita se debe dejar vacía. Una vez hecho lo anterior, la hoja de cálculo usa la función ÍNDICE para copiar en forma automática las restricciones de capacidad en la columna C (celda C22 hacia abajo). Para representar infinito se usa el número 999999.

La única información necesaria para resolver el modelo es los parámetros de Solver. La celda objetivo $B$20 ya está automatizada con la siguiente fórmula general, y no necesita cambiarse para todos los modelos de tamaño hasta de 10×10:

```
=SUMAPRODUCTO(B22:B122,J21:J121)
```

Sólo debe el lector ocuparse con los elementos de Changing Cells y de Constraints. De acuerdo con la figura 5.6, el elemento Changing Cells es

```
$B$22:$B$33
```

Los renglones 22:33 abarcan todas las rutas del modelo, y cambian cuando cambia el tamaño del modelo de transporte.

Las restricciones se enuncian verbalmente como sigue:

$$\text{flujo en la ruta } (i, j) \leq \text{capacidad de la ruta } (i, j)$$

$$(\text{flujo de entrada} - \text{flujo de salida}) \text{ por el nodo } j = \text{demanda en el nodo } j$$

Para el primer conjunto de restricciones, el lado izquierdo está en la columna B (celda B22 hacia abajo) y el lado derecho está en la columna C (celda C22 hacia abajo). Para el ejemplo de la figura 5.6, las restricciones correspondientes son

```
$B$22:$B$33 <= $C$22:$C$33
```

```
MODEL:
TITLE: Transportation model, Example 5.3-1;
SETS:
  from/S1 S2 S3/;supply;
  to/D1 D2 D3 D4/:demand;
  route(from,to):cost, ship;
ENDSETS
  MIN=@SUM(route(I,J):cost(I,J)*ship(I,J));
!subject to;
  @FOR(
       to(J):@SUM(from(I):ship(I,J))=demand(J)
      );
  @FOR(
       from(I):@SUM(to(J):ship(I,J))=supply(I)
      );
DATA:
  supply=15 25 10;
  demand=5 15 15 15;
  cost=10 2 20 1 1
    12  7  9 20
     4 14 16 18;
ENDDATA
END
```

FIGURA 5.7

Modelo de transporte para el ejemplo 5.3-1, en LINGO

El segundo conjunto de restricciones se genera en las columnas F y G como sigue:

```
$F$21:$F$27 = $G$21:$G$27
```

De nuevo, obsérvese que los renglones 21:27 cubren la cantidad total de nodos del modelo y cambian con el tamaño de éste.

Las restricciones de no negatividad se toman en cuenta en la ventana Options (Opciones) de Solver.[6]

Solución del modelo de transporte con LINGO. La figura 5.7 muestra el modelo en LINGO para el ejemplo de transporte 5.3-1 (archivo ch5LingoTrans.lg4). Los nombres que se usan en el modelo pretenden ser explicativos. Nótese que los nombres de las fuentes (S1, S2, S3) y de los destinos (D1, D2, D3, D4) se pueden capturar tal como se ven, en lugar de incluirlos en la sección DATA (datos) del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3B

1. Para los modelos de transporte de la tabla 5.26:
   a) Use el método de la esquina noroeste para calcular la solución de inicio.
   b) Desarrolle las iteraciones que conducen a la solución óptima.

---

[6]El lector debe tener en cuenta algunas de las “mañas” en la versión normal de Solver que trae Excel. Si se establece la Precision (Precisión) demasiado alta, en la tabla de diálogos Options (Opciones) (por ejemplo, 0.000000001), podrá aparecer un mensaje críptico diciendo que el modelo no satisface las hipótesis de linealidad. También se pueden hacer más legibles los resultados con un redondeo adecuado (por ejemplo, 1E-14 debe imprimirse como 0, y 9.999999999 debería ser 10).

TABLA 5.26

(i)

$0	$2	$1	**6**
$2	$1	$5	**9**
$2	$4	$3	**5**
5	**5**	**10**	

(ii)

$0	$4	$2	**8**
$2	$3	$4	**5**
$1	$2	$0	**6**
7	**6**	**6**	

(iii)

—	$3	$5	**4**
$7	$4	$9	**7**
$1	$8	$6	**19**
5	**6**	**19**	

c) Use el módulo Iterations (Iteraciones) de TORA para comparar el modelo de transporte con base en la regla de la esquina noroeste, el método del costo mínimo y el método de Vogel.

d) Resuelva el problema con Solver de Excel.

e) Resuelva el problema con LINGO.

2. En el modelo de transporte de la tabla 5.27, la demanda total es mayor que la oferta total. Suponga que los costos de penalización por unidad de demanda no satisfecha son $5, $3 y $2 en los destinos 1, 2 y 3, respectivamente.

a) Use la solución de inicio con costo mínimo y determine las iteraciones que conduzcan a la solución óptima.

b) Resuelva el problema con Solver de Excel.

c) Resuelva el problema con LINGO.

TABLA 5.27

$5	$1	$7	**10**
$6	$4	$6	**80**
$3	$2	$5	**15**
75	**20**	**50**	

3. En el problema 2 suponga que no hay costos de penalización, pero que se debe satisfacer por completo la demanda en el destino 3. Determine la solución óptima con: a) TORA, b) Solver de Excel y c) LINGO.

4. En el problema de transporte no balanceado de la tabla 5.28, si no se embarca una unidad en una fuente (a cualquiera de los destinos) se incurre en un costo de almacenamiento de $5, $4 y $3 por unidad, en las fuentes 1, 2 y 3, respectivamente. Además, toda la oferta en la fuente 2 se debe embarcar por completo para hacer lugar a un producto nuevo. Use la solución de inicio de Vogel y determine todas las iteraciones que lleven al programa óptimo de transporte. Compruebe la respuesta con el módulo Vogel de TORA.

TABLA 5.28

$1	$2	$1	**20**
$3	$4	$5	**40**
$2	$3	$3	**30**
30	**20**	**20**	

5. En un problema de transporte de 3×3, sea x_{ij} la cantidad transportada desde la fuente i al destino j, y sea c_{ij} el costo correspondiente de transporte, por unidad. Las cantidades de oferta en las

fuentes 1, 2 y 3 son 15, 30 y 85 unidades, respectivamente, y las demandas en los destinos 1, 2 y 3 son 20, 30 y 80 unidades, respectivamente. Suponiendo que la solución de inicio con el método de la esquina noroeste es óptima, y que los valores correspondientes de los multiplicadores son $u_1 = -2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ y $v_3 = 10$:

a) Determine el costo asociado óptimo.

b) Determine el valor mínimo de c_{ij} correspondiente a cada variable no básica que mantenga la optimalidad de la solución obtenida con el método de la esquina noroeste.

6. El problema de transporte de la tabla 5.29 produce una solución básica *degenerada* (es decir, al menos una de las variables básicas es cero). Suponga que los multiplicadores asociados a esta solución son $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$ y $v_3 = 5$, y que el costo unitario de todas las variables (básicas y no básicas) *cero* x_{ij} es:

$$c_{ij} = i + j\theta, \; -\infty < \theta < \infty$$

TABLA 5.29

10			**10**
	20	**20**	**40**
10	**20**	**20**	

a) Si esa solución degenerada es óptima, determine el valor óptimo asociado de la función objetivo.

b) Determine el valor de θ que garantice la optimalidad de la solución dada. (*Sugerencia:* localice la variable básica cero.)

7. Se tiene el problema

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i, \; i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \; j = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Parecería lógico suponer que la solución óptima requerirá reemplazar al primer (o al segundo) conjunto de desigualdades con ecuaciones, si $\sum a_i \geq \sum b_j$ ($\sum a_i \leq \sum b_j$). El contraejemplo de la tabla 5.30 demuestra que esta hipótesis no es correcta.

TABLA 5.30

\$1	\$1	\$2	**5**
\$6	\$5	\$1	**6**
2	**7**	**1**	

Demuestre que la aplicación del procedimiento sugerido $x_{11} = 2$, $x_{12} = 3$ $X_{22} = 4$ y $x_{23} = 2$ con $z = \$27$, que es peor que la solución factible $x_{11} = 2$, $x_{12} = 7$ y $x_{23} = 6$ con $z = \$15$.

5.3.4 Explicación del método de los multiplicadores con el método símplex

La relación entre el método de los multiplicadores y el método símplex se puede explicar con base en las relaciones primal-dual (Sección 4.2). De acuerdo con la estructura especial de la programación lineal que representa el modelo de transporte (véase el ejemplo 5.1-1), el problema dual asociado se puede escribir en la forma

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

$$u_i \text{ y } v_j \text{ no restringidas}$$

en donde

$a_i =$ Cantidad de oferta en la fuente i

$b_j =$ Cantidad de demanda en el destino j

$c_{ij} =$ Costo unitario de transporte entre la fuente i y el destino j

$u_i =$ Variable dual de la restricción asociada con la fuente i

$v_j =$ Variable dual de la restricción asociada con el destino j

Según la fórmula 2, sección 4.2.4, los coeficientes de la variable x_{ij} en la función objetivo deben ser igual a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la restricción dual correspondiente; esto es, $u_i + v_j - c_{ij}$. Sin embargo, sabemos que esta cantidad debe ser igual a cero para cada *variable básica*, con lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ para toda variable } \textit{básica } x_{ij}$$

Hay $m + n - 1$ ecuaciones de esas, cuya solución (después de suponer un valor arbitrario $u_1 = 0$) produce los multiplicadores u_i y v_j. Una vez calculados esos multiplicadores, se determina la variable de entrada a partir de todas las variables *no básicas*, como la que tiene el mayor valor positivo de $u_i + v_j - c_{ij}$.

La asignación de un valor arbitrario a una de las variables duales (es decir, $u_1 = 0$) podrá parecer inconsistente con la forma en que se calcularon las variables duales en la sección 4.2.3. Es decir, para determinada solución básica (y en consecuencia, la inversa), los valores duales deben ser únicos. En el problema 2, conjunto de problemas 5.3c, se explica este punto.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3C

1. Escriba el problema dual de la programación lineal del problema de transporte, en el ejemplo 5.3-5 (tabla 5.21). Calcule el valor óptimo objetivo *dual* asociado con los valores duales óptimos de la tabla 5.25, y demuestre que es igual al costo óptimo del ejemplo.

2. En el modelo de transporte, una de las variables duales asume un valor arbitrario. Eso quiere decir que para la misma solución básica, los valores de las variables duales correspondientes no son únicos. El resultado parece contradecir la teoría de la programación lineal, donde los valores duales se determinan como el producto del vector de los coeficientes objetivo de las variables básicas, y la matriz básica inversa asociada (véase el método 1, sección 4.2.3). Demuestre que para el modelo de transporte, aunque la base inversa es única, el vector de los coeficientes objetivo *básicos* no necesita serlo. En forma específica, demuestre que si se cambia c_{ij} a $c_{ij} + k$ para todas i y j, siendo k una constante, los valores óptimos de x_{ij} permanecerán igual. Por consiguiente, el uso de un valor arbitrario para una variable dual equivale, en forma implícita, a suponer que se agrega una constante específica k a toda c_{ij}.

5.4 EL MODELO DE ASIGNACIÓN

"La mejor persona para el puesto" es una buena descripción del modelo de asignación. El caso se puede ilustrar con la asignación de trabajadores de diversos niveles de capacitación a los puestos. Un puesto que coincide con los conocimientos de un trabajador cuesta menos que uno en que el trabajador no es tan hábil. El objetivo del modelo es determinar la asignación óptima (de costo mínimo) de trabajadores a puestos.

El modelo general de asignación con n trabajadores y n puestos se representa en la tabla 5.31.

TABLA 5.31

		Puestos				
		1	2	…	n	
Trabajador	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	**1**
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	**1**
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}	**1**
		1	**1**	…	**1**	

El elemento c_{ij} representa el costo de asignar al trabajador i al puesto j ($i, j = 1, 2, ..., n$). No se pierde generalidad al suponer que la cantidad de trabajadores siempre es igual a la cantidad de puestos, porque siempre se pueden agregar trabajadores o puestos ficticios para obtener esa condición.

El modelo de asignación es en realidad un caso especial del modelo de transporte, en el cual los trabajadores representan las fuentes y los puestos representan los destinos. La cantidad de oferta en cada fuente, y la cantidad de demanda en cada destino son exactamente iguales a 1. El costo de "transportar" el trabajador i al puesto j es c_{ij}. De hecho, se puede resolver el modelo de asignación en forma directa como modelo normal de transporte. Sin embargo, el hecho de que todas las ofertas y las demandas son iguales a 1, condujo al desarrollo de un algoritmo sencillo de solución llamado **método húngaro**. Aunque parezca que el nuevo método es totalmente ajeno al modelo de transporte, en realidad el algoritmo tiene su raíz en el método símplex, igual que el modelo de transporte.

5.4.1 El método húngaro[7]

Usaremos dos ejemplos para explicar la mecánica del nuevo algoritmo. La siguiente sección contiene una explicación del procedimiento basada en el método símplex.

Ejemplo 5.4-1

Los tres hijos de Joe Klyne, John, Karen y Terri, quieren ganar algo para sus gastos personales, durante un viaje de la escuela al zoológico. El señor Klyne ha destinado tres tareas para sus hijos: podar el pasto, pintar la cochera y lavar los autos de la familia. Para evitar discusiones, les pide que presenten ofertas (secretas) de lo que crean que es un pago justo para cada una de las tres tareas. Se sobreentiende que después los tres obedecerán la decisión de su papá sobre quién hace cuál tarea. La tabla 5.32 resume las ofertas recibidas.

TABLA 5.32

	Podar	Pintar	Lavar
John	$15	$10	$9
Karen	$9	$15	$10
Terri	$10	$12	$8

Con base en esta información ¿cómo debe asignar las tareas el señor Klyne?
El problema de asignación se puede resolver con el método húngaro.

Paso 1. En la matriz original de costo, identificar el mínimo de cada renglón y restarlo de todos los elementos del renglón.

Paso 2. En la matriz que resulte del paso 1, identificar el mínimo de cada columna, y restarlo de todos los elementos de la columna.

Paso 3. Identificar la solución óptima como la asignación factible asociada con los elementos cero de la matriz obtenida en el paso 2.

Sean p_i y q_j los costos mínimos del renglón i y la columna j, como se definieron en los pasos 1 y 2, respectivamente. Los mínimos de renglón del paso 1 se calculan con la matriz original de costo, como se ve en la tabla 5.33.

TABLA 5.33

	Podar	Pintar	Lavar	Mínimo del renglón
John	15	10	9	$p_1 = 9$
Karen	9	15	10	$p_2 = 9$
Terri	10	12	8	$p_3 = 8$

[7]Como en el modelo de transporte, el método húngaro clásico, diseñado principalmente para cálculos a *mano* es algo del pasado, y se presenta aquí sólo por razones históricas. Hoy, la necesidad de esos métodos rápidos de cómputo no es tan apremiante, porque el problema se puede resolver como una programación lineal normal, usando programas de cómputo muy eficientes.

A continuación se resta el mínimo del renglón de cada renglón respectivo, para obtener la matriz reducida de la tabla 5.34.

TABLA 5.34

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	1	0
Karen	0	6	1
Terri	2	4	0
Mínimo de la columna	$q_1 = 0$	$q_2 = 1$	$q_3 = 0$

La aplicación del paso 2 produce los mínimos de columna de la tabla 5.34. Al restar esos valores de las columnas respectivas se obtiene la matriz reducida de la tabla 5.35.

TABLA 5.35

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	**<u>0</u>**	0
Karen	**<u>0</u>**	5	1
Terri	2	3	**<u>0</u>**

Las celdas con elementos cero subrayados son la solución óptima. Eso quiere decir que John va a pintar la cochera, Karen podará el pasto y Terri lavará los autos. El costo total para el señor Klyne será 9 + 10 + 8 = \$27. Esta cantidad también será siempre igual $(p_1 + p_2 + p_3) + (q_1 + q_2 + q_3) = (9 + 9 + 8) + (0 + 1 + 0) = \$27$. En la sección siguiente se justifica este resultado.

Los pasos presentados para el método húngaro funcionaron bien en el ejemplo anterior, porque sucede que los elementos cero en la matriz final producen una asignación *factible* (en el sentido que las tareas se asignan en forma única a los niños). En algunos casos los ceros que se producen en los pasos 1 y 2 no producen una solución factible en forma directa. En este caso se necesitan más pasos para llegar a la asignación óptima (factible). En el ejemplo que sigue se ilustra este caso.

Ejemplo 5.4-2

Suponga que el caso del ejemplo 5.4-1 se amplía a cuatro hijos y cuatro tareas. La tabla 5.36 resume los elementos de costo en el problema.

TABLA 5.36

		Tarea			
		1	2	3	4
Niño	1	\$1	\$4	\$6	\$3
	2	\$9	\$7	\$10	\$9
	3	\$4	\$5	\$11	\$7
	4	\$8	\$7	\$8	\$5

Al aplicar los pasos 1 y 2 a la matriz de la tabla 5.36 (con $p_1 = 1$, $p_2 = 7$, $p_3 = 4$, $p_4 = 5$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 3$ y $q_4 = 0$) se obtiene la siguiente matriz reducida, de la tabla 5.37 (¡compruébela!):

TABLA 5.37

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	**0**	3	2	2
	2	2	**0**	**0**	2
	3	**0**	1	4	3
	4	3	2	**0**	**0**

Los lugares de los elementos cero no permiten asignar una tarea por niño. Por ejemplo, si se asigna el niño 1 a la tarea 1, se eliminará la columna 1, y el niño 3 no tendrá elemento cero en las tres columnas restantes. Se puede tener en cuenta este obstáculo agregando el siguiente paso al procedimiento descrito en el ejemplo 5.4-1:

Paso 2a. Si no se puede asegurar una asignación factible (con todos los elementos cero) con los pasos 1 y 2,

i) Trazar la cantidad *mínima* de líneas horizontales y verticales en la última matriz reducida que cubran *todos* los elementos cero.

ii) Seleccionar el elemento *mínimo no cubierto*, restarlo de todo elemento no cubierto y a continuación sumarlo a todo elemento en la intersección de dos líneas.

iii) Si no se puede encontrar una asignación factible entre los elementos cero que resulten, repetir el paso 2a. En caso contrario, seguir en el paso 3 para determinar la asignación óptima.

Al aplicar el paso 2a a la última matriz se obtienen las celdas sombreadas que se ven en la tabla 5.38.

TABLA 5.38

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	0	3	2	2
	2	**2**	0	0	2
	3	0	<u>1</u>	4	3
	4	**3**	2	0	0

La celda de valor mínimo no sombreada (que se muestra subrayado) es igual a 1. Este elemento se resta de todas las celdas no sombreadas y se suma a las celdas de las intersecciones, para producir la matriz de la tabla 5.39.

La solución óptima, que se indica con los ceros subrayados, dice que se debe asignar el niño 1 a la tarea 1, el niño 2 a la tarea 3, el niño 3 a la tarea 2 y el niño 4 a la tarea 4. El costo

TABLA 5.39

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	**0**	2	1	1
	2	3	0	**0**	2
	3	0	**0**	3	2
	4	4	2	0	**0**

óptimo asociado es 1 + 10 + 5 + 5 = \$21. El mismo costo también se determina sumando las p_i y las q_j y la celda que se restó después de la determinación de las celdas sombreadas; esto es (1 + 7 + 4 + 5) + (0 + 0 + 3 + 0) + (1) = \$21.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.4A

1. Resuelva los modelos de asignación de la tabla 5.40.

TABLA 5.40

(i)

\$3	\$8	\$2	\$10	\$3
\$8	\$7	\$2	\$9	\$7
\$6	\$4	\$2	\$7	\$5
\$8	\$4	\$2	\$3	\$5
\$9	\$10	\$6	\$9	\$10

(ii)

\$3	\$9	\$2	\$3	\$7
\$6	\$1	\$5	\$6	\$6
\$9	\$4	\$7	\$10	\$3
\$2	\$5	\$4	\$2	\$1
\$9	\$6	\$2	\$4	\$5

a) Use el método húngaro.

b) Use Tora para resolverlos como un problema de transporte.

c) Exprese el problema como una programación lineal y resuélvalo con TORA.

d) Use la plantilla ch5SolverTransportation.xls de Excel para resolver el problema.

e) Forme un modelo para resolver el problema con LINGO.

2. JoShop debe asignar 4 tareas a 4 trabajadores. El costo de realizar un trabajo es función de los conocimientos de los trabajadores. La tabla 5.41 resume el costo de las asignaciones. El trabajador 1 no puede hacer el trabajo 3, y el trabajador 3 no puede hacer el trabajo 4. Determine la asignación óptima con el método húngaro.

TABLA 5.41

		Trabajo (puesto) 1	2	3	4
Trabajador	1	\$50	\$50	—	\$20
	2	\$70	\$40	\$20	\$30
	3	\$90	\$30	\$50	—
	4	\$70	\$20	\$60	\$70

3. En el modelo de JoShop del problema 2, suponga que queda disponible un quinto trabajador, para desempeñar los cuatro puestos (trabajos), con los costos respectivos de $60, $45, $30 y $80. ¿Será económico reemplazar a uno de los cuatro trabajadores actuales con el nuevo?
4. En el modelo del problema 2, suponga que JoShop acaba de abrir un quinto puesto (trabajo) y que los costos respectivos por llenarlo con los cuatro trabajadores actuales son $20, $10 y $20 y $80. ¿Debe tener prioridad el puesto (trabajo) nuevo sobre cualesquiera de los cuatro que ya tiene JoShop?
5. Un ejecutivo mercantil debe hacer los cuatro viajes redondos que se ven en la tabla 5.42, entre la oficina matriz en Dallas y una sucursal en Atlanta.

TABLA 5.42

Fecha de salida de Dallas	Fecha de regreso a Dallas
Lunes 3 de junio	Viernes 7 de junio
Lunes 10 de junio	Miércoles 12 de junio
Lunes 17 de junio	Viernes 21 de junio
Martes 25 de junio	Viernes 28 de junio

El precio de un boleto de viaje redondo desde Dallas es $400. Se otorga un descuento de 25% si las fechas del boleto abarcan un fin de semana (sábado y domingo). Si la estancia en Atlanta dura más de 21 días, el descuento aumenta a 30%. Un boleto de viaje sencillo entre Dallas y Atlanta (en cualquier dirección) cuesta $250. ¿Cómo debe comprar los boletos el ejecutivo?

6. En la figura 5.8 se ve el esquema de la distribución de un taller, con sus centros de trabajo actuales indicados por los tablas 1, 2, 3 y 4. Se deben agregar otros cuatro centros de trabajo nuevos,

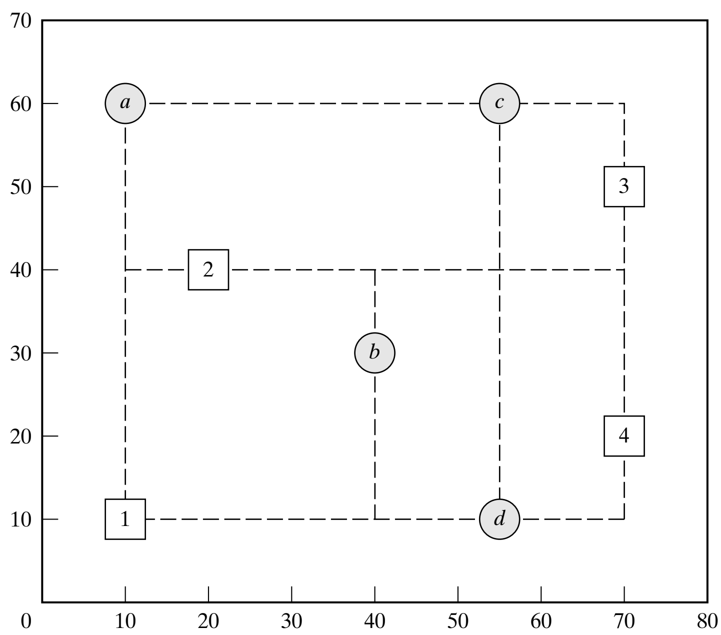


FIGURA 5.8
Distribución del taller para el problema 6, conjunto de problemas 5.4a

I, II, III y IV al taller, en los lugares indicados por los círculos *a, b, c* y *d*. Se trata de asignar los nuevos centros a los lugares propuestos de tal modo que se minimice el tráfico total de materiales y maniobras entre los centros existentes y los propuestos. En la tabla 5.43 se resumen las frecuencias de viajes entre los centros nuevos y anteriores. El equipo de manejo de materiales se mueve por los pasillos rectangulares que se cruzan donde están los centros. Por ejemplo, la distancia (en metros) de viaje sencillo entre el centro 1 y el lugar *b* es 30 + 20 = 50 m.

TABLA 5.43

		Centro nuevo			
		I	II	III	IV
Centro actual	1	10	2	4	3
	2	7	1	9	5
	3	0	8	6	2
	4	11	4	0	7

5.4.2 Explicación del método húngaro con el método símplex

El problema de asignación en el que n trabajadores se asignan a n puestos se puede presentar como modelo de programación lineal en la forma siguiente: sea c_{ij} el costo de asignar el trabajador i al puesto j, y sea

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el trabajador } i \text{ se asigna al puesto } j \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces el modelo de programación lineal es

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1$$

La solución óptima de este modelo de programación lineal no cambia si se suma o resta una constante en cualquier renglón o columna de la matriz de costo (c_{ij}). Para demostrar esto, sean p_i y q_{kj} constantes restadas del renglón i y la columna j. Así, el elemento de costo c_{ij} cambia a

$$c_{ij}^{'} = c_{ij} - p_i - q_j$$

Ahora bien,

$$\sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i \left(\sum_j x_{ij} \right) - \sum_j q_j \left(\sum_i x_{ij} \right)$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i (1) - \sum_j q_j (1)$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \text{ constante}$$

Como la nueva función objetivo difiere de la original por una constante, los valores óptimos de x_{ij} deben ser iguales, en ambos casos. El desarrollo demuestra que los pasos 1 y 2 del método húngaro, que requiere restar p_i en el renglón i y después restar q_j en la columna j, producen un modelo equivalente de asignación. Si se puede encontrar una solución factible entre los elementos cero que se crearon en la matriz de costo, en los pasos 1 y 2, debe ser óptimo, porque el costo en la matriz modificada no puede ser menor que cero.

Si los elementos cero que se crearon no pueden producir una solución factible (como demuestra el ejemplo 5.4-2), se debe aplicar el paso 2a, que consiste en cubrir los elementos cero. La validez de este procedimiento se basa de nuevo en el método símplex de programación lineal, y se puede explicar con la teoría de la dualidad (Capítulo 4), y el teorema de la holgura complementaria (Capítulo 7). Aquí no presentaremos los detalles de la demostración, porque son algo complicados.

La razón por la que $(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$ produce el valor objetivo óptimo es que representa la función objetivo dual del modelo de asignación. Se puede ver este resultado comparando la función objetivo dual del modelo de transporte presentada en la sección 5.3.4 (véanse los detalles en Bazaraa *et al.* [1990], págs. 499-508).

5.5 EL MODELO DE TRANSBORDO

En el modelo de transbordo se reconoce que puede ser más económico el transporte pasando por nodos intermedios o *transitorios* antes de llegar al destino final. Este concepto es más general que el del modelo normal de transporte, en el que sólo se permiten envíos directos entre una fuente y un destino.

En esta sección se explica cómo se puede convertir y resolver un modelo de transbordo en un modelo de transporte normal, usando la idea de un **amortiguador**.

Ejemplo 5.5-1

Dos fábricas de automóviles, *P*1 y *P*2, se enlazan con tres agencias, *D*1, *D*2 y *D*3, a través de dos centros de distribución, *T*1 y *T*2, de acuerdo con la red de la figura 5.9. Las cantidades de oferta en las plantas *P*1 y *P*2 son 1000 y 1200 autos, y las cantidades de demanda en las agencias *D*1, *D*2 y *D*3 son 800, 900 y 500 autos. El costo de transporte por vehículo, en cientos de $ entre pares de nudos se ve en los enlaces (o arcos) de la red.

En la red de la figura 5.9 hay transbordos porque toda la oferta de 2200 (= 1000 + 1200) autos de los nodos *P*1 y *P*2 podría pasar en principio por cualquier nodo de la red, antes de llegar a su destino en los nodos *D*1, *D*2 y *D*3. A este respecto, los nodos de la red que tienen

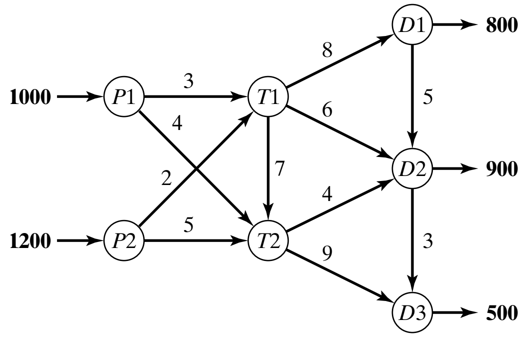


FIGURA 5.9
Red con transbordos entre plantas y agencias

arcos de entrada y salida al mismo tiempo (*T*1, *T*2, *D*1 y *D*2) funcionan como fuentes y destinos al mismo tiempo, y se llaman **nodos de transbordo**. Los nodos restantes pueden ser **nodos de oferta pura** (*P*1 y *P*2) o **nodos de demanda pura** (*D*3). El modelo de transbordo se puede transformar en un modelo normal de transporte con 6 fuentes (*P*1, *P*2, *T*1, *T*2, *D*1 y *D*2) y cinco destinos (*T*1, *T*2, *D*1, *D*2 y *D*3). Las cantidades de oferta y demanda en los distintos nodos se calculan como sigue:

Oferta en un *nodo de oferta pura* = Suministro original

Demanda en un *nodo de demanda pura* = Demanda original

Oferta en un *nodo de transbordo* = Oferta original + Amortiguador

Demanda en un *nodo de demanda pura* = Demanda original + Amortiguador

La cantidad amortiguadora debe ser lo suficientemente grande como para permitir que toda la oferta (o demanda) *original* pase por cualquiera de los nodos de *transbordo*. Sea *B* la cantidad deseada de amortiguador. Entonces

$$\begin{aligned} B &= \text{Oferta (o demanda) total} \\ &= 1000 + 1200 \text{ (u } 800 + 900 + 500) \\ &= 2200 \text{ autos} \end{aligned}$$

Al usar el amortiguador *B* y los costos unitarios de transporte que se ven en la red, se forma el modelo equivalente de transporte normal de la tabla 5.44.

En la figura 5.10 se ve la solución de este problema de transporte con TORA (archivo ch5ToraTransshipEx5-5-1.txt). Observe el efecto del transbordo: la agencia *D*2 recibe 1400 vehículos, conserva 900 para satisfacer su demanda, y manda los 500 autos restantes a la agencia *D*3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.5A[8]

1. La red de la figura 5.11 muestra las rutas de transporte de los nodos 1 y 2 a los nodos 5 y 6, pasando por los nodos 3 y 4. Se ven, en los arcos respectivos, los costos unitarios de transporte.

[8] Se recomienda al usuario usar TORA, Solver de Excel o LINGO para resolver los problemas de este conjunto.

TABLA 5.44

	T1	*T2*	*D1*	*D2*	*D3*	
*P*1	3	4	*M*	*M*	*M*	**1000**
*P*2	2	5	*M*	*M*	*M*	**1200**
*T*1	0	7	8	6	*M*	***B***
*T*2	*M*	0	*M*	4	9	***B***
*D*1	*M*	*M*	0	5	*M*	***B***
*D*2	*M*	*M*	*M*	0	3	***B***
	B	***B***	**800 + *B***	**900 + *B***	**500**	

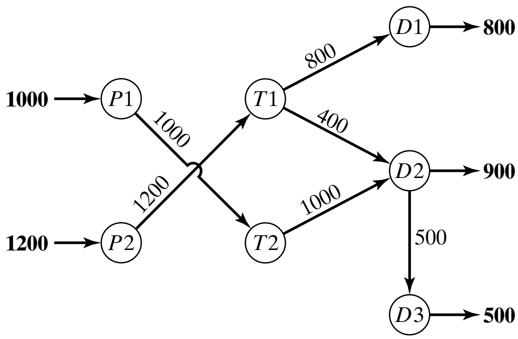


FIGURA 5.10
Solución del modelo de transbordo

a) Formule el modelo correspondiente de transbordo.

b) Resuelva el problema e indique cómo se dirigen las mercancías desde las fuentes hasta los destinos.

2. En el problema 1, suponga que el nodo fuente 1 se puede enlazar con el nodo fuente 2, con un costo unitario de transporte de $1. El costo unitario de transporte del nodo 1 al nodo 3 aumenta a $5. Formule el problema como modelo de transbordo y determine el programa óptimo de transporte.

3. La red de la figura 5.12 muestra las rutas para transportar vehículos de tres plantas (nodos 1, 2 y 3) a tres agencias (nodos 6 a 8) a través de dos centros de distribución (nodos 4 y 5). Los costos de transporte por auto (en cientos de $) se ven en los arcos.

a) Resuelva el problema como modelo de transbordo.

b) Suponga que el centro de distribución 4 puede vender 240 autos en forma directa a los clientes. Determine la nueva solución óptima.

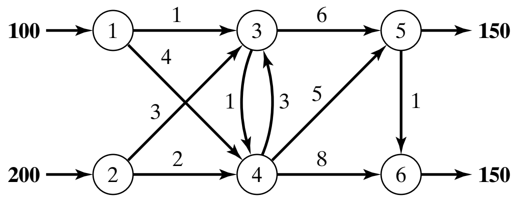


FIGURA 5.11

Red para el problema 1, conjunto 5.5a

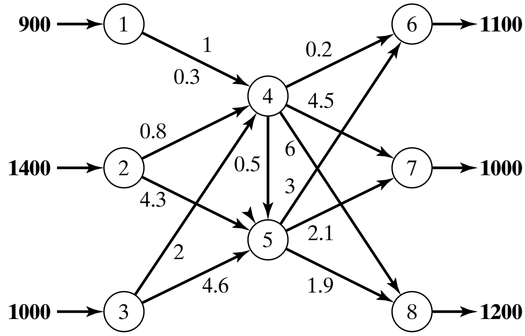


FIGURA 5.12

Red para el problema 3, conjunto 5.5a

4. Un problema de transporte consiste en que dos fábrica abastecen cierto artículo a tres tiendas. La cantidad de unidades ofrecidas en las fuentes 1 y 2 es 200 y 300; la que piden las tiendas 1, 2 y 3 es 100, 200 y 50, respectivamente. Las unidades se pueden transbordar entre las fábricas y las tiendas, antes de llegar a su destino final. Determine el programa óptimo de transporte con base en los costos unitarios de la tabla 5.45.

TABLA 5.45

		Fábrica		Tienda		
		1	2	1	2	3
Fábrica	1	\$0	\$6	\$7	\$8	\$9
	2	\$6	\$0	\$5	\$4	\$3
Tienda	1	\$7	\$2	\$0	\$5	\$1
	2	\$1	\$5	\$1	\$0	\$4
	3	\$8	\$9	\$7	\$6	\$0

5. Acerca de la red de gasoductos de la figura 5.13, los distintos nodos representan estaciones de bombeo y de recepción. En la red se ven las distancias entre las estaciones. El costo de transporte por galón, entre dos nodos, es directamente proporcional a la longitud del gasoducto. Formule el modelo de transbordo correspondiente y determine la solución óptima con TORA.

6. *Problema de la ruta más corta*. Determine la ruta más corta entre los nodos 1 y 7 de la red de la figura 5.14, formulando el problema como modelo de transbordo. La distancia entre los diversos nodos se ve en la red. (*Sugerencia:* suponga que el nodo 1 tiene una oferta neta de 1 unidad y que el nodo 7 también tiene una demanda de 1 unidad.)

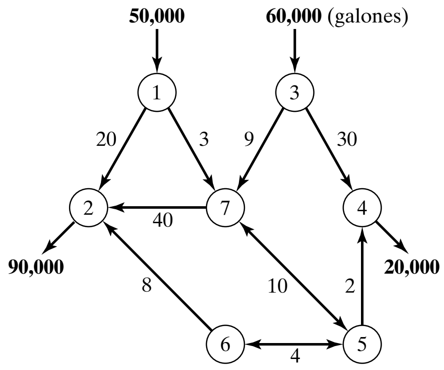


FIGURA 5.13
Red para el problema 5, conjunto 5.5a

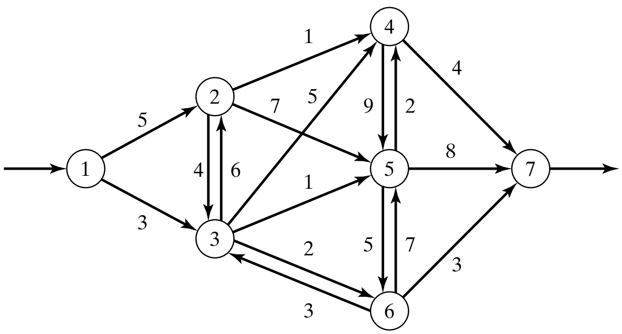


FIGURA 5.14
Red para el problema 6, conjunto 5.5a

7. En el modelo de transbordo del ejemplo 5.5-1, se define x_{ij} como la cantidad transportada del nodo i al nodo j. El problema se puede formular como programación lineal en el que cada nodo produce una ecuación de restricción. Desarrolle la programación lineal y demuestre que la formulación resultante tiene como característica que los coeficientes de restricción a_{ij} de la variable x_{ij} son

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Para la restricción } i \\ -1, & \text{Para la restricción } j \\ 0, & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

8. Una agencia de colocaciones debe proporcionar los siguientes trabajadores durante los 5 meses siguientes:

Mes	1	2	3	4	5
Núm. de trabajadores	100	120	80	170	50

Como el costo de mano de obra depende de la duración del empleo, podría ser más económico tener más trabajadores que los necesarios durante ciertos meses de este horizonte de planeación de 5 meses. En la tabla siguiente se estima el costo de mano de obra en función de la duración del empleo:

Mes de empleado	1	2	3	4	5
Costo por trabajador ($)	100	130	180	220	250

Formule el problema como programación lineal. Después, con las maniobras algebraicas adecuadas en las ecuaciones de restricción, demuestre que el modelo se puede convertir en uno de transbordo y determine la solución óptima de este problema de programación. (*Sugerencia:* use la característica de transbordo del problema 7, para convertir las restricciones del problema de programación en las del modelo de transbordo.)

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2a ed., Wiley, Nueva York, 1990.

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Murty, K., *Network Programming*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

PROBLEMAS INTEGRALES

5.1[9] ABC Cola opera una planta al noreste del país-isla Tawanda. En la planta se producen bebidas gaseosas en tres tipos de empaque: botellas de vidrio retornables, latas de aluminio y botellas de plástico no retornables. Las botellas retornables se mandan a las bodegas de distribución y se deben regresar vacías para reusarlas en la planta.

Debido al crecimiento continuo de la demanda, ABC quiere construir otra planta, ya sea en el centro o en el sur de la isla. La demanda de gaseosas (expresada en cajas) durante los 5 años siguientes se ve en la tabla 5.46.

TABLA 5.46

	Año				
Paquete	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Retornables	2400	2450	2600	2800	3100
Latas	1750	2000	2300	2650	3050
No retornables	490	550	600	650	720

Las capacidades planeadas de producción, para la planta existente y extrapoladas al mismo horizonte de 5 años se ven en la tabla 5.47.

TABLA 5.47

	Año				
Paquete	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Retornables	1800	1400	1900	2050	2150
Latas	1250	1350	1400	1500	1800
No retornables	350	380	400	400	450

[9]Basado en T. Cheng y C. Chiu, "A Case Study of Production Expansion Planning in a Soft-Drink Manufacturing Company", *Omega*, vol. 16, núm. 6, págs. 521-532, 1988.

La empresa tiene seis bodegas de distribución: *N*1 y *N*2 están en el norte; *C*1 y C*2* están en el centro, y *S*1 y *S*2 están en el sur. Las ventas parciales en cada bodega, para su zona, se ven en la tabla 5.48. Más o menos el 60% de las ventas están en el norte, 15% en el centro y 25% en el sur.

TABLA 5.48

Bodega	Ventas parciales
*N*1	85
*N*2	15
*C*1	60
*C*2	40
*S*1	80
*S*2	20

La empresa desea construir la nueva planta en la región central o bien en el sur. El costo de transporte por caja de botellas retornables se ve en la tabla 5.49. Se estima que los costos de transporte por caja de latas y por caja de no retornables son 60 y 70% de los de las botellas retornables, respectivamente.

TABLA 5.49

	Costo de transporte por caja ($)		
Bodega	*Planta actual*	*Planta central*	*Planta sur*
*N*1	0.80	1.30	1.90
*N*2	1.20	1.90	2.90
*C*1	1.50	1.05	1.20
*C*2	1.60	0.80	1.60
*S*1	1.90	1.50	0.90
*S*2	2.10	1.70	0.80

La nueva planta, ¿debe estar en la parte central o en la parte sur del país?

5.2[10] En la construcción del Aeropuerto Internacional de Brisbane se requiere mover 1,355,000 m^3 de arena dragada de cinco bancos en una bahía cercana, por tubería a nueve sitios en el aeropuerto. La arena se usa para estabilizar los terrenos pantanosos del área propuesta de construcción. Algunos de los sitios hacia donde se mueve la arena se usan para construir caminos dentro y en el perímetro del aeropuerto. El exceso de arena de un sitio se moverá con camiones a otras áreas exteriores al aeropuerto, donde se construirá una carretera perimetral. Las distancias (en cientos de metros) entre los bancos y los sitios se resumen en la tabla 5.50. También ahí se ven las cantidades de oferta y demanda, en cientos de m^3, en los distintos lugares.

[10]Basado en C. Perry y M. Ilief, "Earth Moving on Construction Projects", *Interfaces*, vol. 13, núm. 1, 1983, págs. 79-84.

a) La gerencia del proyecto ha estimado un movimiento de arena [m^3 de volumen $\times$ distancia (cientos de metros)] de 2,495,000 unidades, al costo de $0.65 por unidad. ¿Está dentro de los límites el movimiento de arena estimado por la gerencia de proyecto?

TABLA 5.50

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Oferta
1	22	26	12	10	18	18	11	8.5	20	**960**
2	20	28	14	12	20	20	13	10	22	**201**
3	16	20	26	20	1.5	28	6	22	18	**71**
4	20	22	26	22	6	∞	2	21	18	**24**
5	22	26	10	4	16	∞	24	14	21	**99**
Demanda	**62**	**217**	**444**	**315**	**50**	**7**	**20**	**90**	**150**	

b) La gerencia del proyecto se da cuenta que el movimiento de arena a ciertos sitios no se puede hacer sin antes construir algunos caminos. En particular, se debe construir la carretera perimetral (destino 9) antes de poder mover la arena a ciertos sitios. En la tabla 5.51 se ven marcadas con una x las rutas bloqueadas que requieren terminar la carretera perimetral. ¿Cómo debe hacerse el movimiento de arena para tener en cuenta estas restricciones?

TABLA 5.51

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	x			x				
2	x	x			x				
3			x			x			
4			x					x	
5	x	x			x		x		

5.3 Hace 10 años un mayorista inició un negocio de distribuir medicinas de una bodega central (*CW*). Se surtían pedidos a los clientes en camionetas. Desde entonces se ha ampliado la bodega para satisfacer la creciente demanda. Además se han construido dos bodegas nuevas, *W*1 y *W*2. La bodega central está bien abastecida, por tradición, y a veces suministra a las nuevas bodegas con algunos artículos que escasean. Ese abastecimiento ocasional ha crecido y es una operación en gran escala, en la que las dos bodegas nuevas reciben más o menos la tercera parte de sus artículos directamente de la bodega central. La tabla 5.52 muestra la cantidad de pedidos despachados por cada una de las tres bodegas hasta los clientes, de *C*1 a *C*6. El lugar de cada cliente es un pueblo con varias farmacias.

Evalúe la presente política de distribución del mayorista. El programa de entregas del mayorista ha crecido durante los años hasta su estado actual. En esencia, ese programa se propuso en una forma bastante descentralizada, en la que cada bodega determina su zona de entregas con base en criterios "autosuficientes". En realidad, en algunos casos los gerentes de bodega compiten para tener nuevos clientes, principalmente para aumentar su "esfera de influencia". Por ejemplo, los gerentes del almacén central dicen que su zona de entrega no sólo incluye a clientes normales, sino también a los de las otras dos bodegas. No es raro que varias bodegas entreguen mercancía a distintas farmacias dentro del mismo pueblo (sitio de cliente).

TABLA 5.52

Ruta		
De	*A*	*Núm. de pedidos*
CW	*W*1	2000
CW	*W*2	1500
CW	*C*1	4800
CW	*C*2	3000
CW	*C*3	1200
*W*1	*C*1	1000
*W*1	*C*3	1100
*W*1	*C*4	1500
*W*1	*C*5	1800
*W*2	*C*2	1900
*W*2	*C*5	600
*W*2	*C*6	2200

Las distancias recorridas por las camionetas, entre distintos lugares, se ven en la tabla 5.53. Una carga de camioneta equivale a 100 pedidos.

TABLA 5.53

	CW	*W*1	*W*2	*C*1	*C*2	*C*3	*C*4	*C*5	*C*6
CW	0	5	45	50	30	30	60	75	80
*W*1	5	0	80	38	70	30	8	10	60
*W*2	45	80	0	85	35	60	55	7	90
*C*1	50	38	85	0	20	40	25	30	70
*C*2	30	70	35	20	0	40	90	15	10
*C*3	30	30	60	40	40	0	10	6	90
*C*4	60	8	55	25	90	10	0	80	40
*C*5	75	10	7	30	15	6	80	0	15
*C*6	80	60	90	70	10	90	40	15	0

Evalúe la política de distribución actual del distribuidor.

5.4 Kee Wee Airlines hace ocho vuelos de viaje redondo entre Waco y Macon, con el programa de la tabla 5.54. Un miembro de tripulación puede regresar a su base (Waco o Macon) en el mismo día, siempre que haya un mínimo de 90 minutos de estancia en la otra ciudad. En caso contrario, la tripulación puede regresar al día siguiente. Se desea aparear tripulaciones con los vuelos que parten de las dos ciudades, para minimizar el tiempo total de estancia de todas las tripulaciones.

TABLA 5.54

Vuelo	De Waco	A Macon	Vuelo	De Macon	A Waco
*W*1	6:00	8:30	*M*1	7:30	9:30
*W*2	8:15	10:45	*M*2	9:15	11:15
*W*3	13:30	16:00	*M*3	16:30	18:30
*W*4	15:00	17:30	*M*4	20:00	22:00

CAPÍTULO 6

Modelos de redes

Hay una multitud de situaciones, en investigación de operaciones, que se pueden modelar y resolver como redes (nodos conectados por ramas). Algunas encuestas recientes informan que hasta el 70% de los problemas de programación matemática en el mundo real se pueden representar como modelos relacionados con redes. La lista siguiente ilustra algunas aplicaciones posibles de las redes.

1. Diseño de una red de gasoductos marinos para conectar bocas de pozos en el Golfo de México con un punto de entrega en tierra. El objetivo del modelo es minimizar el costo de construcción del gasoducto.
2. Determinación de la ruta más corta entre dos ciudades, en una red de carreteras.
3. Determinación de la capacidad máxima (en toneladas anuales) de una red de tubería para lodo de carbón que une las minas en Wyoming con las centrales eléctricas en Houston. (Las tuberías de lodo de carbón transportan el carbón suspendido en agua a través de tubos de diseño especial.)
4. Determinación del programa de flujo con costo mínimo desde los campos petroleros hasta las refinerías a través de una red de oleoductos.
5. Determinación del cronograma (fechas de inicio y terminación) de las actividades en la construcción de un proyecto.

La solución de esas situaciones y otras parecidas se logra con una variedad de algoritmos de optimización de redes. Este capítulo presentará cinco de esos algoritmos:

1. Árbol de expansión mínima (situación 1).
2. Algoritmo de la ruta más corta (situación 2).
3. Algoritmo del flujo máximo (situación 3).
4. Algoritmo de red capacitada con costo mínimo (situación 4).
5. Algoritmo de la ruta crítica (situación 5).

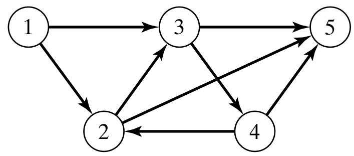
Las situaciones en las que se pueden aplicar estos algoritmos también se pueden formular y resolver en forma de programas lineales explícitos. Sin embargo, los algoritmos propuestos, basados en redes, son más eficientes que el método símplex.

6.1 DEFINICIONES PARA REDES

Una red consiste en una serie de **nodos** enlazados con **arcos** (o **ramas**). La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos. Por ejemplo, la red de la figura 6.1 se describe como sigue:

$$N = \{1,2,3,4,5\}$$
$$A = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(4,2),(4,5)\}$$

FIGURA 6.1
Ejemplo de una red (N, A)



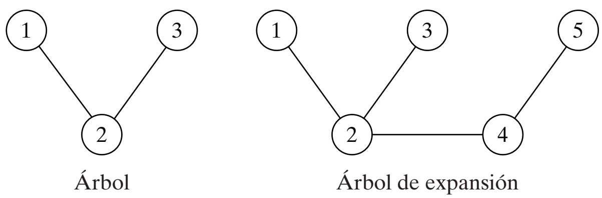
Con cada red se asocia algún tipo de flujo (por ejemplo, flujo de productos petroleros en un oleoducto y flujos de tráfico de automóviles en carreteras). En general, el flujo en una red está limitado por la capacidad de sus arcos, que pueden ser finitos o infinitos.

Se dice que un arco es **dirigido** u **orientado** si permite un flujo positivo en una dirección, y flujo cero en la dirección opuesta. Una **red dirigida** tiene todos sus arcos dirigidos.

Una **ruta** es una sucesión de arcos distintos que unen dos nodos pasando por otros nodos, independientemente de la dirección de flujo en cada arco. Una ruta forma un **ciclo** si conecta un nodo consigo mismo, pasando por otros nodos. Por ejemplo, en la figura 6.1, los arcos (2,3), (3,5) y (5,2) forman un bucle o circuito cerrado. Un ciclo es *dirigido* si consiste en una ruta dirigida, por ejemplo (2,3), (3,4) y (4,2) en la figura 6.1.

Una **red conectada** es aquella en que cada dos nodos distintos están enlazados al menos por una ruta. La red de la figura 6.1 es un ejemplo de este tipo. Un **árbol** es una red conectada que puede consistir sólo en un *subconjunto* de todos los nodos en ella, donde no se permiten ciclos, y un **árbol de expansión** es un árbol que enlaza *todos* los nodos de la red, también sin permitir ciclos. En la figura 6.2 se ven ejemplos de un árbol y de un árbol de expansión para la red de la figura 6.1.

FIGURA 6.2
Ejemplos de un árbol y de un árbol de expansión, para la red de la figura 6.1



CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.1A

1. Para cada red de la figura 6.3 determine a) una ruta, b) un ciclo, c) un ciclo dirigido, d) un árbol y e) un árbol de expansión.

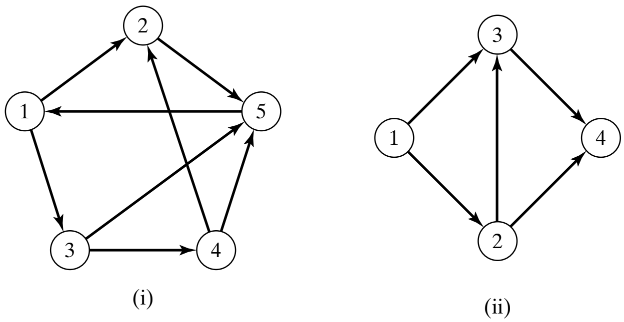


FIGURA 6.3
Redes para el problema 1, conjunto 6.1a

2. Determine los conjuntos N y A en las redes de la figura 6.3.

3. Trace la red definida por

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(3,5),(3,4),(4,3),(4,6),(5,2),(5,6)\}$$

4. Hay ocho cuadrados iguales ordenados en tres renglones, cada uno con dos cuadrados en el primer renglón, cuatro en el segundo y dos en el tercero. Los cuadrados de cada fila están arreglados en forma simétrica respecto al eje vertical. Se desea poner números distintos en los cuadrados, entre los límites de 1, 2, ..., 8, de modo que no haya dos cuadrados *adyacentes* vertical, horizontal o diagonalmente que tengan números consecutivos. Use la representación en red como vehículo hacia la solución de una forma sistemática.

5. Se deben transportar en un bote tres reclusos escoltados por tres guardias, de San Francisco a la penitenciaría de la isla de Alcatraz, para que purguen sus sentencias. El bote no puede transportar más de dos personas en cualquier dirección. Los reclusos les ganan con seguridad a los guardias si su número es mayor en cualquier momento. Formule un modelo de red para diseñar los viajes del bote de modo que se asegure la transferencia segura de los reclusos. Suponga que no se fugan si tienen oportunidad.

6.2 ALGORITMO DE ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

El algoritmo de árbol de expansión mínima enlaza los nodos de una red, en forma directa o indirecta, con la mínima longitud de las ramas enlazantes. Una aplicación característica es en la construcción de carreteras pavimentadas que unen varias poblaciones. El camino entre dos poblaciones puede pasar por uno o más poblaciones adicionales. El diseño más económico del sistema de caminos indica que se minimice la distancia total de caminos pavimentados, resultado que se obtiene implementando el algoritmo de árbol de expansión mínima.

Los pasos del procedimiento son los siguientes. Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de nodos de la red, y se definen

C_k = Conjunto de nodos que se han conectado en forma permanente en la iteración k

$\overline{C}_k$ = Conjunto de nodos que todavía se deben conectar en forma permanente

Paso 0. El conjunto $C_0 = \varnothing$ y $\overline{C}_0 = N$.

Paso 1. Comenzar con *cualquier* nodo en el conjunto $\overline{C}_0$ no conectado (o "inconexo"), e igualar $C_1 = \{i\}$, con lo que $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Igualar $k = 2$.

Paso general k. Seleccionar un nodo j^* en el conjunto no conectado $\overline{C}_{k-1}$ que produzca el arco más corto a un nodo, en el conjunto conectado C_{k-1}. Enlazar a j^* en forma permanente con C_{k-1} y sacarlo de $\overline{C}_{k-1}$, esto es

$$C_k = C_{k-1} + \{j^*\}, \overline{C}_k = \overline{C}_{k-1} - \{j^*\}$$

Si el conjunto $\overline{C}_k$, de nodos no conectados es vacío, detenerse. En cualquier otro caso, igualar $k = k + 1$ y repetir el paso.

Ejemplo 6.2-1

Midwest TV Cable Company está en el proceso de proporcionar servicio de cable a cinco nuevas áreas habitacionales. La figura 6.4 representa los enlaces posibles de TV entre las cinco áreas. Las millas de cable se muestran en cada arco. Determine la red de cable más económica.

El algoritmo comienza en el nodo 1 (cualquier otro nodo podría ser), con lo que se obtiene

$$C_1 = \{1\}, \overline{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

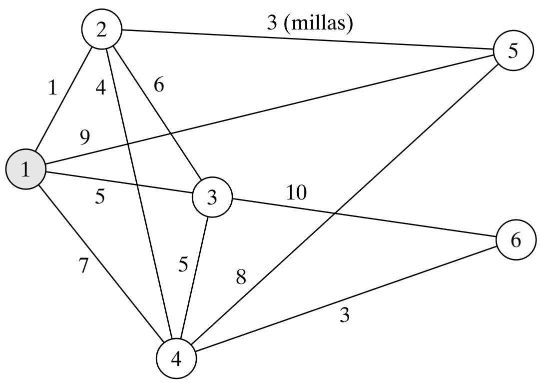
Las iteraciones del algoritmo se resumen en la figura 6.5. Los arcos con línea delgada son todos los enlaces posibles entre C y $\overline{C}$. Las ramas gruesas representan los enlaces permanentes entre los nodos del conjunto conectado (o "conexo") C, y la rama con línea interrumpida representa el nuevo enlace (permanente) que se agrega en cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1,2) es la más corta (= 1 milla) entre todas las ramas posibles del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4 y 5 del conjunto no conectado $\overline{C}_1$. Por consiguiente, el enlace (1,2) se vuelve permanente y $j^* = 2$, con lo que se obtiene

$$C_2 = \{1, 2\}, \overline{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

La solución se expresa con el árbol de expansión mínima que se ve en la iteración 6, de la figura 6.5. La cantidad mínima de millas necesarias para proporcionar el servicio de cable que se desea resulta ser $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$ millas.

FIGURA 6.4

Conexiones de cable para la Midwest TV Cable Company



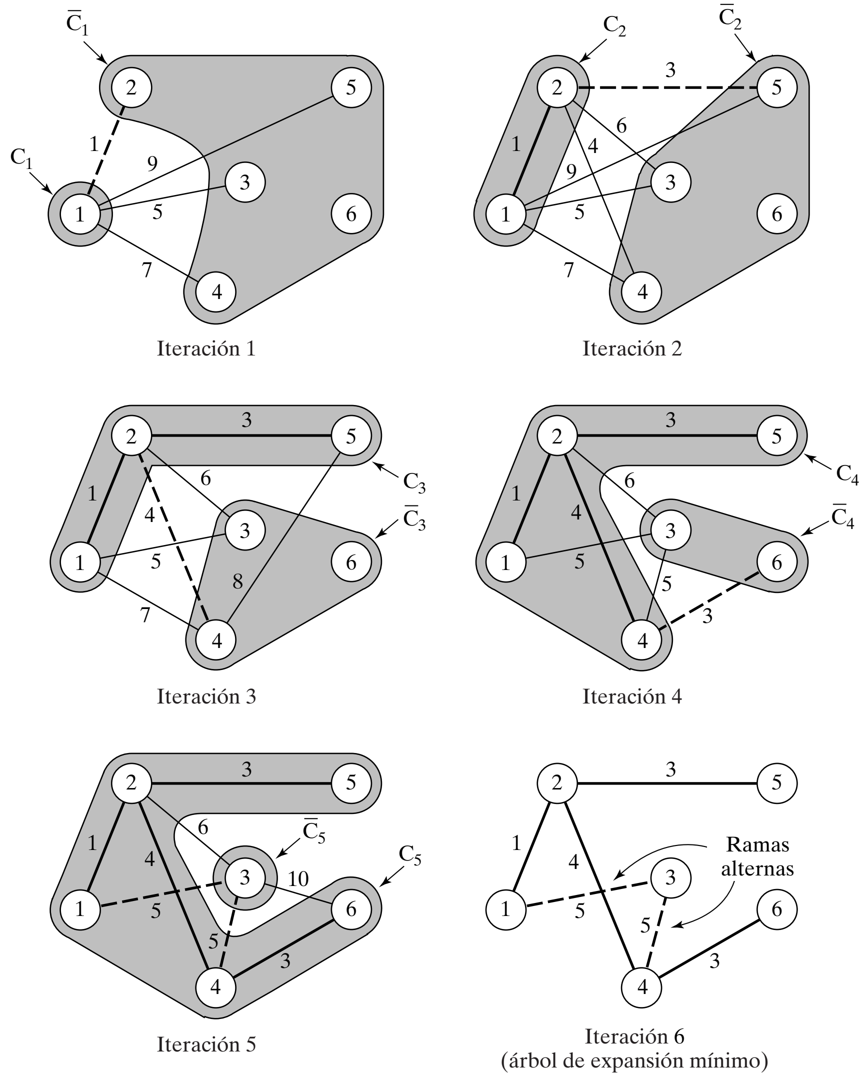


FIGURA 6.5

Iteraciones de la solución para la Midwest TV Cable Company

Se puede usar TORA para generar las iteraciones del árbol de expansión mínima. En el menú `Main menu` (menú principal) seleccione, `Network models` ⇒ (modelos de red/árbol de expansión mínima). A continuación en el menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar), seleccione `Solve problem` ⇒ `Go to output screen` (resolver el problema/ir a la pantalla de resultados). En la pantalla de resultados seleccione un `Starting node` (nodo de inicio) y a continuación use `Next iteration` (iteración siguiente) o `All iterations` (todas las iteraciones) para general las iteraciones sucesivas. Puede usted recomenzar las iteraciones seleccionando un nuevo `Starting node` (nodo de inicio). La figura 6.6 muestra los resultados de TORA para el ejemplo 6.2-1 (archivo ch6ToraMinSpanExp6-2-1.txt).

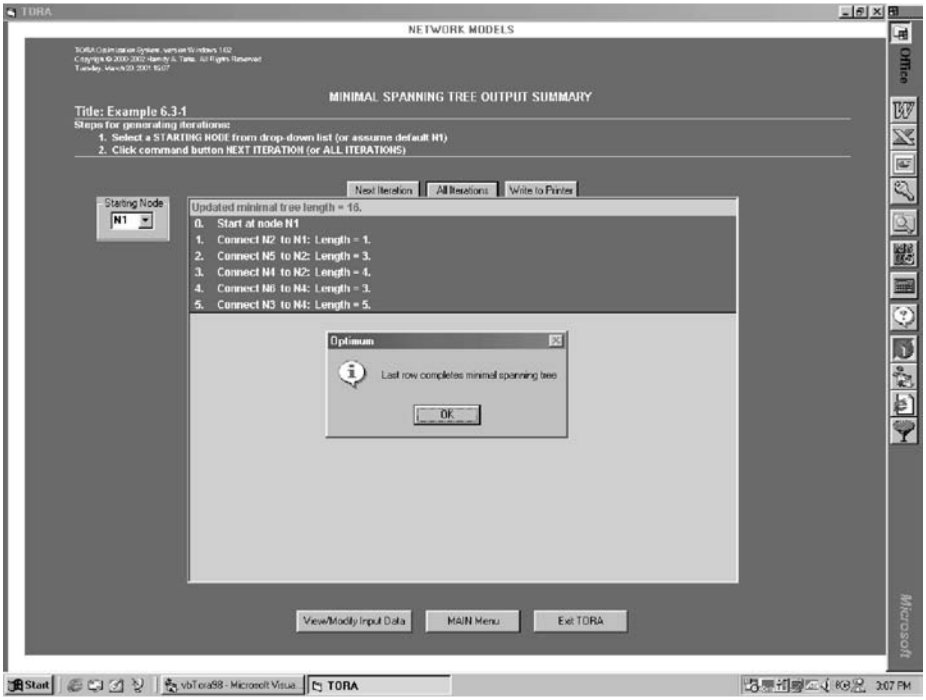


FIGURA 6.6

Resultados del árbol de expansión mínima del ejemplo 6.2-1

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.2A

1. Resuelva el ejemplo 6.2-1 comenzando en el nodo 5 (en lugar del nodo 1) y demuestre que con el algoritmo se obtiene la misma solución.
2. Determine el árbol de expansión mínima de la red del ejemplo 6.2-1 bajo cada una de las siguientes condiciones por separado:
   a) Los nodos 5 y 6 están unidos por un cable de 2 millas.
   b) Los nodos 2 y 5 no se pueden enlazar.
   c) Los nodos 2 y 6 están unidos por un cable de 4 millas.
   d) El cable entre los nodos 1 y 2 tiene 8 millas de longitud.
   e) Los nodos 3 y 5 están unidos por un cable de 2 millas.
   f) El nodo 2 no se puede enlazar en forma directa con los nodos 3 y 5.
3. En el transporte intermodal, los camiones remolque cargados se mueven entre las terminales de ferrocarril colocando la caja en carros especiales (“camas bajas”). La figura 6.7 muestra la ubicación de las principales terminales de ferrocarril en Estados Unidos, y las vías actuales de FC. El objetivo es decidir cuáles vías se deben “revitalizar” para manejar el tráfico intermodal. En especial, se debe unir la terminal de Los Ángeles (LA) en forma directa con la de Chicago (CH) para dar cabida al intenso tráfico esperado. Por otra parte, todas las terminales restantes se pueden enlazar, en forma directa o indirecta, de tal modo que se minimice la longitud total (en millas) de las vías seleccionadas. Determine los segmentos de vías de ferrocarril que se deben incluir en el programa de revitalización.

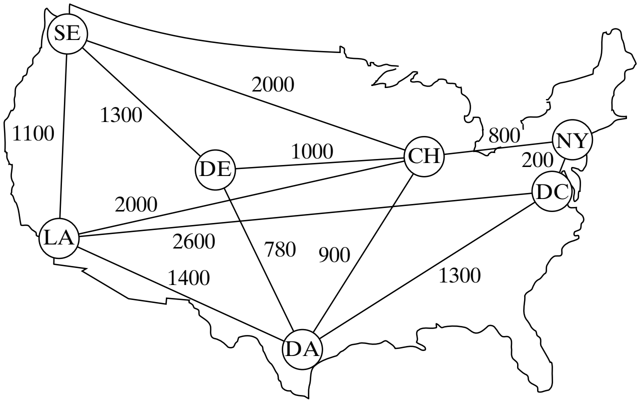


FIGURA 6.7
Red para el problema 3, conjunto 6.2a

4. En la figura 6.8 se ven las distancias, en millas, de las conexiones factibles que unen nueve pozos marinos de gas natural con un punto de entrega en tierra. Como la ubicación del pozo 1 es la más cercana a la costa, tiene capacidad de bombeo y de almacenamiento suficiente para bombear la producción de los ocho pozos restantes hasta el punto de entrega. Determine la red mínima de tubería que una las bocas de pozo con el punto de entrega.

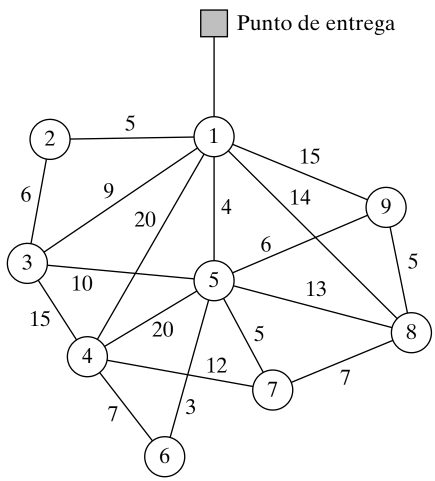


FIGURA 6.8
Red para el problema 4, conjunto 6.2a

5. En la figura 6.8 del problema 4, suponga que los pozos se pueden dividir en dos grupos, dependiendo de la presión del gas: un grupo de alta presión, que comprende los pozos 2, 3, 4 y 6, y un grupo de baja presión, que comprende los pozos 5, 7, 8 y 9. Debido a la diferencia de presiones, no se pueden enlazar pozos de grupo diferente. Al mismo tiempo, ambos grupos se deben conectar con el punto de entrega pasando por el pozo 1. Determine la red mínima de tubería para este caso.

6. Electro produce 15 partes electrónicas en 10 máquinas. La empresa desea agrupar las máquinas en celdas, diseñadas para minimizar las “desigualdades” entre las partes procesadas en cada cel-

da. Una medida de la "desigualdad" d_{ij} entre las partes procesadas en las máquinas i y j se puede expresar como sigue:

$$d_{ij} = 1 - \frac{n_{ij}}{n_{ij} + m_{ij}}$$

siendo n_{ij} la cantidad de partes compartidas entre las máquinas i y j, y m_{ij} es la cantidad de partes que sólo se usan ya sea en la máquina i o en la j.

La tabla siguiente asigna las partes a las máquinas:

Máquina	Partes asignadas
1	1, 6
2	2, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15
3	3, 5, 10, 14
4	2, 7, 8, 11, 12, 13
5	3, 5, 10, 11, 14
6	1, 4, 5, 9, 10
7	2, 5, 7, 8, 9, 10
8	3, 4, 15
9	4, 10
10	3, 8, 10, 14, 15

a) Exprese el problema como modelo de red.

b) Demuestre que la determinación de las celdas se puede basar en la solución del árbol de expansión mínima.

c) Para los datos de la tabla anterior, construya las soluciones con dos y tres celdas.

6.3 PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

En el problema de la ruta más corta se determina ésta, entre una fuente y un destino, en una red de transporte. Hay otras soluciones que se pueden representar con el mismo modelo, como se ve en los ejemplos siguientes.

6.3.1 Ejemplos de aplicaciones de ruta más corta

Ejemplo 6.3-1 (Reemplazo de equipo)

RentCar está desarrollando un plan de reposición de su flotilla de automóviles para un horizonte de planeación de 4 años, que comienza el 1 de enero de 2001 y termina el 31 de diciembre de 2004. Al iniciar cada año se toma la decisión de si un auto se debe mantener en operación o se debe sustituir. Un automóvil debe estar en servicio durante 1 año como mínimo, y 3 años como máximo. La tabla siguiente muestra el costo de reposición en función del año de adquisición del vehículo y los años que tiene en funcionamiento.

Equipo adquirido al comenzar	Costo de reposición ($) para los años en operación		
	1	*2*	*3*
2001	4000	5400	9800
2002	4300	6200	8700
2003	4800	7100	—
2004	4900	—	—

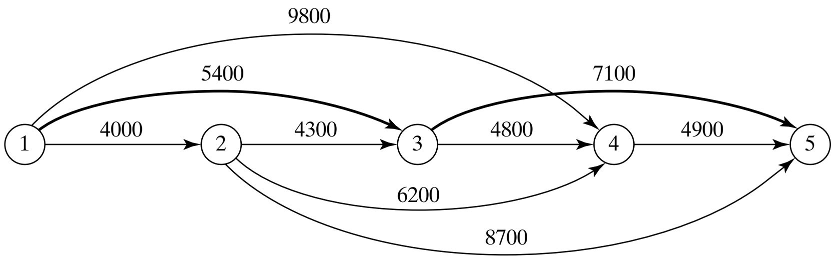


FIGURA 6.9
El problema de reemplazo de equipo como problema de ruta más corta

El problema se puede formular como una red, en el que los nodos 1 a 5 representan el inicio de los años 2001 a 2005. Los arcos del nodo 1 (año 2001) sólo pueden alcanzar los nodos 2, 3 y 4, porque un vehículo debe estar en funcionamiento entre 1 y 3 años. Los arcos desde los otros nodos se pueden interpretar en forma parecida. La longitud de cada arco es igual al costo de reposición. La solución del problema equivale a determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 5.

En la figura 6.9 se ve la red que resulta. Si se usa TORA,[1] la ruta más corta, que se indica con la ruta gruesa, es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. Eso quiere decir que un automóvil adquirido al iniciar 2001 (nodo 1) se debe reemplazar pasados 2 años, al iniciar 2003 (nodo 3). El auto de reposición debe estar en servicio hasta el final de 2004. El costo total de esta política de reposición es \$12,500 (= \$5400 + \$7100).

Ejemplo 6.3-2 (Ruta más segura)

I.Q. Smart conduce diariamente hacia su trabajo. Como acaba de terminar un curso de análisis de redes, puede determinar la ruta más corta. Desafortunadamente, la ruta seleccionada está muy patrullada por la policía, y debido a las multas por manejar a alta velocidad, podría ser que la ruta más corta no sea la mejor elección. Smart decide entonces escoger una ruta que maximice la probabilidad de *no* ser detenido por la policía.

La red de la figura 6.10 muestra las rutas posibles para ir y regresar del trabajo, y las probabilidades correspondientes de no ser detenido en cada segmento. La probabilidad de no ser detenido en el trayecto hacia el trabajo es el producto de las probabilidades relacionadas con los segmentos sucesivos de la ruta seleccionada. Por ejemplo, la probabilidad de no recibir

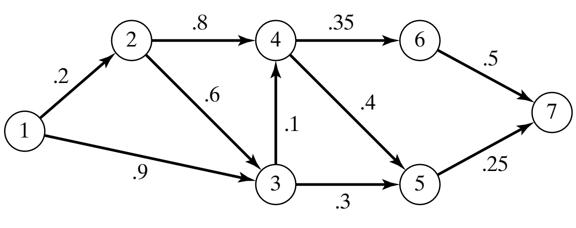


FIGURA 6.10
Modelo de red de la ruta más segura

[1]En `Main menu` (menú principal), seleccione `Network models` ⇒ `Shortest route` (modelos de red/ruta más corta). En el menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar), seleccione `Solve problem` ⇒ `Shortest routes` (resolver problema/ruta más corta).

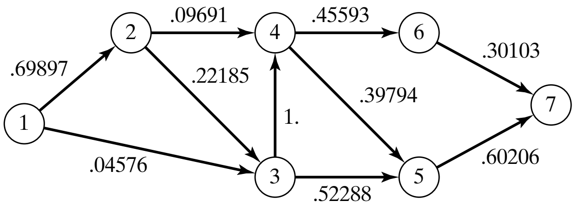


FIGURA 6.11
Representación de la ruta más segura como modelo de ruta más corta

una multa en la ruta $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ es $0.9 \times 0.3 \times 0.25 = 0.0675$. El objetivo de Smart es seleccionar la ruta que *maximice* la probabilidad de no ser multado.

Se puede formular el problema como un modelo de ruta más corta aplicando una transformación logarítmica que convierta la probabilidad producto en la suma de los logaritmos de las probabilidades; es decir, si $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ es la probabilidad de no ser detenido, entonces $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$.

Matemáticamente, la maximización de p_{1k} equivale a la maximización de $\log p_{1k}$. Como $\log p_{1k} \leq 0$, la maximización de $\log p_{1k}$ equivale a su vez a la minimización de $-\log p_{1k}$. Si se usa esta transformación, las probabilidades individuales p_j de la figura 6.10 se sustituyen con $-\log p_j$ para toda j en la red, y se obtiene así la red de ruta más corta de la figura 6.11.

Usando TORA, los nodos 1, 3, 5 y 7 definen la ruta más corta en la figura 6.11, con una "longitud" correspondiente de 1.1707 ($= -\log p_{17}$). Así, la probabilidad máxima de no ser detenido es $p_{17} = 0.0675$.

Ejemplo 6.3-3 (Rompecabezas de tres garrafones)

Un garrafón de 8 galones se llena con un líquido. Se cuenta con un botellón de 5 y uno de 3 galones, y se quieren dividir los 8 galones de líquido en dos partes iguales, usando los tres garrafones. No se permite usar algún otro medidor. ¿Cuál es la cantidad mínima de vertidos necesarios para lograr este resultado?

Es probable que usted pueda dar con la solución de este rompecabezas. Sin embargo, se puede sistematizar el proceso de solución representando el problema como uno de ruta más corta.

Se define que un nodo representa la cantidad en los garrafones de 8, 5 y 3 galones, respectivamente. Esto quiere decir que la red comienza con el nodo (8,0,0) y termina con el nodo de la solución deseada (4,4,0). Se genera un nuevo nodo a partir del actual al verter líquido de un garrafón a otro.

La figura 6.12 muestra rutas distintas que llevan desde el nodo inicial (8,0,0) hasta el nodo final (4,4,0). El arco entre dos nodos sucesivos representa un vertido, y en consecuencia se puede suponer que tiene 1 unidad de longitud. El problema se reduce a determinar la ruta más corta entre el nodo (8,0,0) y el nodo (4,4,0).

La solución óptima se indica en la ruta inferior de la figura 6.12, y requiere 7 vertidos.

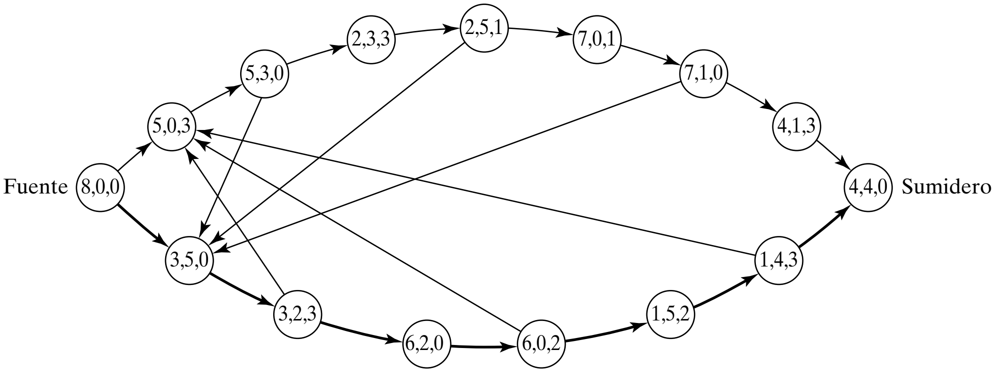


FIGURA 6.12
La representación del rompecabezas de los garrafones como modelo de ruta más corta

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3A

1. Rehaga el modelo de reemplazo de equipo del ejemplo 6.3-1 suponiendo que se debe mantener un automóvil en servicio durante 2 años como mínimo y 4 años como máximo. El horizonte de planeación es desde el inicio de 2001 hasta el fin de 2005. La tabla siguiente contiene los datos necesarios.

	Costo de reposición ($) para los años en operación		
Año de adquisición	*2*	*3*	*4*
2001	3800	4100	6800
2002	4000	4800	7000
2003	4200	5300	7200
2004	4800	5700	—
2005	5300	—	—

2. La figura 6.13 muestra la red de comunicaciones entre dos estaciones, 1 y 7. La probabilidad de que un enlace de la red funcione sin fallar se ve en cada arco. Los mensajes se mandan de la estación 1 a la estación 7, y el objetivo es determinar la ruta que maximice la probabilidad de una buena transmisión. Formule el caso como modelo de ruta más corta y resuélvalo con TORA.

3. Un tostador eléctrico antiguo tiene dos puertas con resortes en las bisagras, en la base. Las dos puertas se abren hacia fuera en direcciones opuestas, alejándose del elemento calentador. Se tuesta una rebanada de pan por un lado cada vez, oprimiendo una de las puertas con una mano, para abrirla, y colocando la rebanada con la otra mano. Después de tostar un lado, la rebanada se voltea para tostarla por el otro lado. Se desea determinar la secuencia de operaciones (coloca-

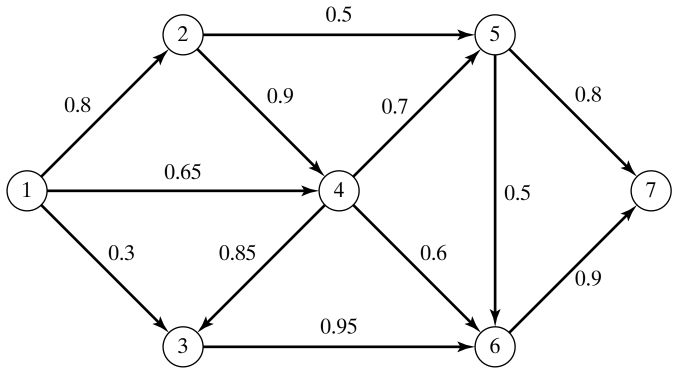


FIGURA 6.13
Red para el problema 2, conjunto 6.3a

ción, tostado, volteo y retirado) necesaria para tostar tres rebanadas de pan en el mínimo tiempo posible. Formule el problema como modelo de ruta más corta con los siguientes tiempos elementales para las diversas operaciones:

Operación	Tiempo (segundos)
Poner una rebanada en cualquier lado	3
Tostar una cara	30
Voltear la rebanada que ya está en el tostador	1
Quitar la rebanada de cualquier cara	3

4. *Planeación de producción.* DirectCo vende un artículo cuya demanda en los 4 meses venideros será 100, 140, 210 y 180 unidades, respectivamente. La empresa puede almacenar sólo la cantidad justa para abastecer la demanda de cada mes, o puede almacenar más y cumplir con la demanda de dos o más meses consecutivos. En el segundo caso se carga un costo de retención de $1.20 por unidad en exceso por mes. DirectCo estima que los precios unitarios de compra durante los 4 meses siguientes serán de $15, $12, $10 y $14, respectivamente. Se incurre en un costo de preparación de $200 cada vez que se coloca un pedido. La empresa desea desarrollar un plan de compras que minimice los costos totales de pedido, compra y retención del artículo en el almacén. Formule el problema con modelo de ruta más corta y use TORA para determinar la solución óptima.
5. *Problema de la mochila*. Un excursionista tiene una mochila de 5 pies cúbicos de capacidad, y desea saber cuáles son los artículos más valiosos que va a llevar a una excursión. Hay tres artículos de donde escoger. Sus volúmenes son de 2, 3 y 4 pies cúbicos, y el excursionista estima que sus valores correspondientes, en una escala de 0 a 100, son 30, 50 y 70, respectivamente. Exprese el problema como una red de ruta más larga y determine la solución óptima. (*Sugerencia*: se puede definir un nodo en la red como [i, v], donde i es el número del artículo para empacar y v es el volumen que queda inmediatamente antes de decidirse por i.)

6.3.2 Algoritmos de ruta más corta

En esta sección se presentan dos algoritmos para resolver redes tanto cíclicas (es decir, que contienen bucles o lazos) como acíclicas:

1. El algoritmo de Dijkstra.
2. El algoritmo de Floyd.

El algoritmo de Dijkstra tiene por objeto determinar las rutas más cortas entre el nodo fuente y todos los demás nodos de la red. El algoritmo de Floyd es general, porque permite determinar la ruta más corta entre dos nodos *cualquiera* en la red.

Algoritmo de Dijkstra. Sea u_i la distancia más corta del nodo fuente 1 hasta el nodo i, y se define d_{ij} (≥ 0) como la longitud del arco (i, j). Entonces el algoritmo define la etiqueta de un nodo inmediato posterior j como

$$[u_j, i] = [u_i + d_{ij}, i],\ d_{ij} \geq 0$$

La etiqueta del nodo de inicio es [0, —], que indica que el nodo no tiene predecesor.

Las etiquetas de nodos en el algoritmo de Dijkstra son de dos clases: *temporales* y *permanentes*. Una etiqueta temporal se modifica si se puede encontrar una ruta más corta a un nodo. Cuando se ve que no se pueden encontrar rutas mejores, cambia el estado de la etiqueta temporal a permanente.

Paso 0. Etiquetar el nodo fuente (nodo 1) con la etiqueta *permanente* [0,—]. Igualar $i = 1$.

Paso *i*. **a)** Calcular las etiquetas *temporales* $[u_i + d_{ij}, i]$ para cada nodo j al que pueda llegarse desde el nodo i, *siempre y cuando j no tenga etiqueta permanente.* Si el nodo j ya está etiquetado con $[u_j, k]$ por otro nodo k, y si $u_i + d_{ij} < u_j$, sustituir $[u_j, k]$ por $[u_j + d_{ij}, i]$.

b) Si *todos* los nodos tienen etiquetas *permanentes*, detenerse. En caso contrario, seleccionar la etiqueta $[u_r, s]$ que tenga la distancia más corta ($=u_r$) entre todas las etiquetas *temporales* (los empates se rompen en forma arbitraria). Hacer que $i = r$ y repetir el paso i.

Ejemplo 6.3-4

La red de la figura 6.14 muestra las rutas con sus longitudes, en millas, entre la ciudad 1 (nodo 1) y otras cuatro ciudades (nodos 2 a 5). Determinar las rutas más cortas entre la ciudad 1 y cada una de las cuatro ciudades restantes.

Iteración 0. Asignar la etiqueta *permanente* [0,−] al nodo 1.

Iteración 1. Se puede llegar a los nodos 2 y 3 desde el nodo 1 (último que se etiquetó en forma permanente). Así, la lista de los nodos etiquetados (temporales y permanentes) es la siguiente:

Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0,—]**	**Permanente**
2	[0 + 100, 1] = [100, 1]	Temporal
3	[0 + 30, 1] = [30, 1]	Temporal

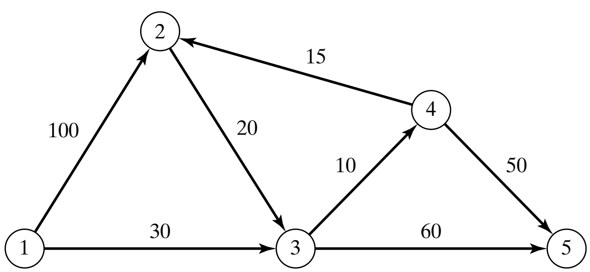


FIGURA 6.14

Ejemplo de red para el algoritmo de ruta más corta de Dijkstra

Para las dos etiquetas temporales [100, 1] y [30, 1], el nodo 3 produce la menor distancia ($u_3 = 30$). Entonces, se cambia el estado del nodo 3 a permanente.

Iteración 2. Del nodo 3 se puede ir a los nodos 4 y 5, y la lista de nodos etiquetados es

Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0,—]**	Permanente
2	[100, 1]	Temporal
3	**[30, 1]**	**Permanente**
4	[30 + 10, 3] = [40, 3]	Temporal
5	[30 + 60, 3] = [90, 3]	Temporal

El estado de la etiqueta temporal [40, 3] en el nodo 4 se cambia a permanente ($u_4 = 40$).

Iteración 3. Del nodo 4 se puede ir a los nodos 2 y 5. Entonces la lista actualizada de los nodos etiquetados es

Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0,—]**	Permanente
2	[40 + 15, 4] = [55, 4]	Temporal
3	**[30, 1]**	Permanente
4	**[40, 3]**	**Permanente**
5	[90, 3] o [40 + 50, 4] = [90, 4]	Temporal

La etiqueta temporal del nodo 2, [100, 1], en la iteración 2 se cambia a [55, 4] en la iteración 3, para indicar que se ha encontrado una ruta más corta que pasa por el nodo 4. También, en la iteración 3, el nodo 5 tiene dos etiquetas alternativas con la misma distancia $u_5 = 90$.

La lista para la iteración 3 indica que la etiqueta para el nodo 2 ya es permanente.

Iteración 4. Del nodo 2 sólo se puede ir al nodo 3. Sin embargo, el nodo 3 tiene una etiqueta permanente y ya no se puede volver a etiquetar. La nueva lista de etiquetas queda igual que en la iteración 3, salvo que la etiqueta en el nodo 2 ya es permanente. Esto deja al nodo 5 como la única etiqueta temporal. Como el nodo 5 no conduce a otros nodos, su estado se vuelve permanente y el proceso termina.

Los cálculos del algoritmo se pueden hacer con más facilidad en la red, como se ve en la figura 6.15.

La ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo de la red se determina comenzando en el nodo destino o final, y retrocediendo por los nodos con la información que dan las etiquetas permanentes. Por ejemplo, la secuencia siguiente determina la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2:

$$(2) \rightarrow [55,4] \rightarrow (4) \rightarrow [40,3] \rightarrow (3) \rightarrow [30,1] \rightarrow (1)$$

Por lo anterior, la ruta buscada es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, con una longitud total de 55 millas.

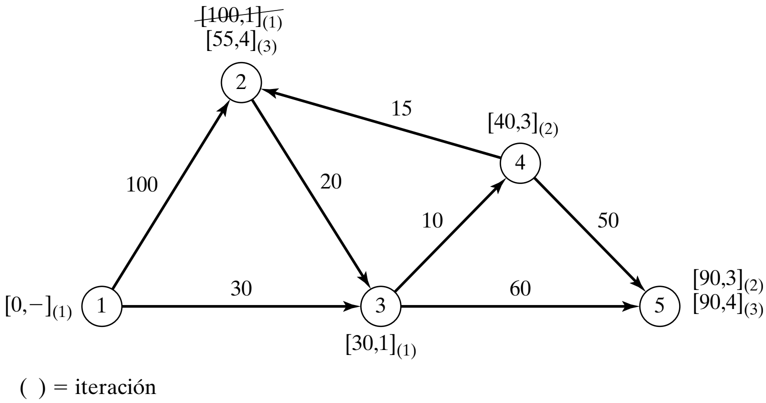


FIGURA 6.15

Procedimiento de etiquetado de Dijkstra

Se puede usar TORA para generar iteraciones de Dijkstra. Partiendo del menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar), seleccione `Solve problem` ⇒ `Iterations` ⇒ `Dijkstra's algorithm` (resolver problema/iteraciones/algoritmo de Dijkstra). En la figura 6.16 se ve el resultado de las iteraciones con TORA, para el ejemplo 6.3-4 (archivo ch6ToraDijkstraEx6-3-4.txt).

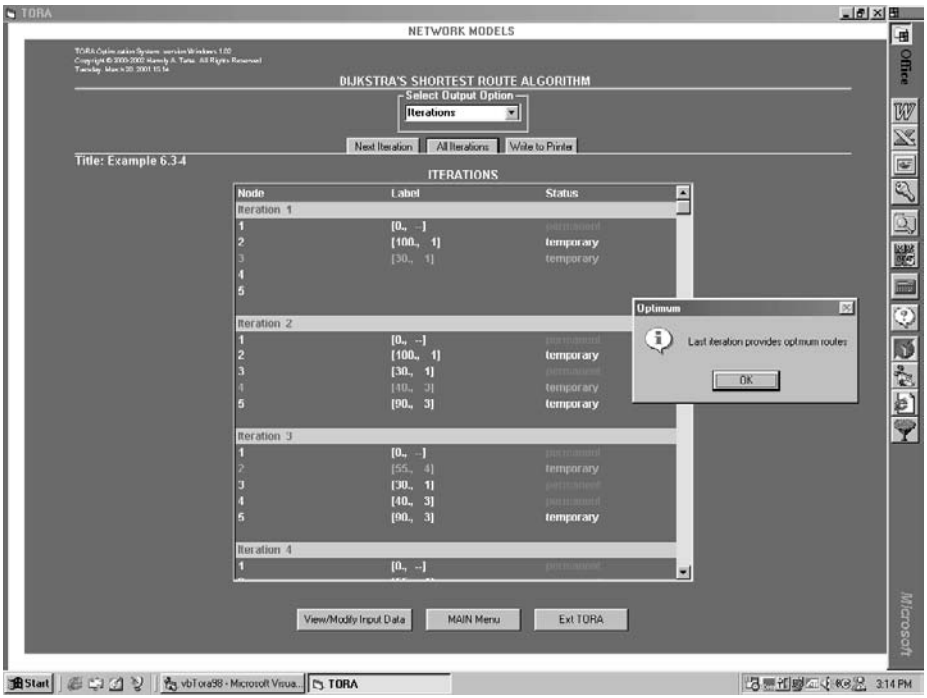


FIGURA 6.16

Iteraciones de Dijkstra, para el ejemplo 6.3-4, con TORA

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3B

1. La red de la figura 6.17 contiene las distancias, en millas, entre pares de ciudades 1, 2, ..., y 8. Use el algoritmo de Dijkstra para determinar la ruta más corta entre las siguientes ciudades:

a) 1 y 8

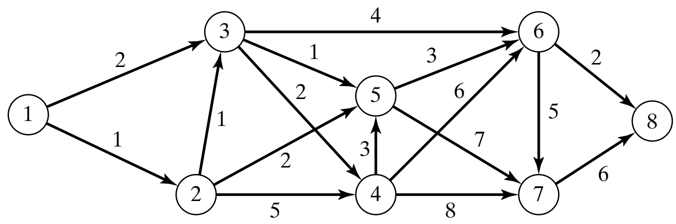
b) 1 y 6

c) 4 y 8

d) 2 y 6

FIGURA 6.17

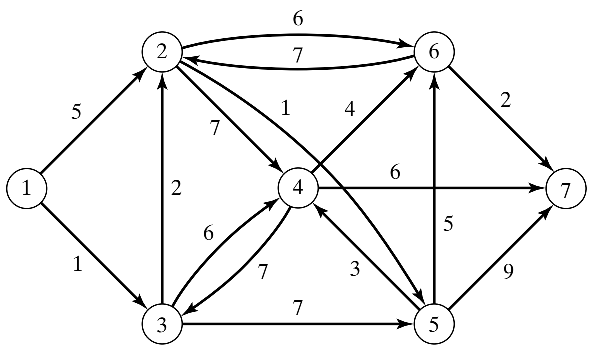
Red para el problema 1, conjunto 6.3b



2. Use el algoritmo de Dijkstra para determinar la ruta más corta entre el nodo 1 y todos los demás nodos en la red de la figura 6.18.

FIGURA 6.18

Red para el problema 2, conjunto 6.3b



3. Con el algoritmo de Dijkstra, determine la solución óptima de cada uno de los siguientes problemas:

a) Problema 1, conjunto de problemas 6.3a

b) Problema 2, conjunto de problemas 6.3a

c) Problema 4, conjunto de problemas 6.3a

Algoritmo de Floyd. El algoritmo de Floyd es más general que el de Dijkstra, porque determina la ruta más corta entre dos nodos *cualquiera* de la red. El algoritmo representa una red de n nodos como matriz cuadrada con n renglones y n columnas. El elemento (i,j) de la matriz expresa la distancia d_{ij} del nodo i al nodo j, que es finita si i está conectado directamente con j, e infinita en caso contrario.

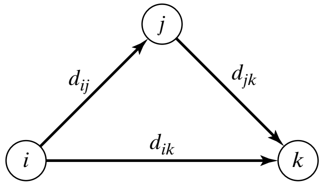


FIGURA 6.19
Operación triple de Floyd

El concepto del algoritmo de Floyd es directo. Dados tres nodos i, j y k en la figura 6.19, con las distancias entre sí indicadas en los tres arcos, es más corto ir a k desde i pasando por j si

$$d_{ij} + d_{jk} < d_{ik}$$

En este caso, lo óptimo es reemplazar la ruta directa de $i \rightarrow k$ por la ruta indirecta $i \rightarrow j \rightarrow k$. Este intercambio de **operación triple** se aplica en forma sistemática a la red, con los siguientes pasos:

Paso 0. Definir las matrices iniciales de distancias D_0 y de secuencias de nodos S_0 como se describe abajo. Los elementos diagonales se marcan con (—) para indicar que están bloqueados. Igualar $k = i$.

$D_0 =$

	1	2	…	j	…	n
1	—	d_{12}	…	d_{ij}	…	d_{1n}
2	d_{21}	—	…	d_{2j}	…	d_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	d_{i1}	d_{i2}	…	d_{ij}	…	d_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	D_{n1}	d_{n2}	…	d_{nj}	…	—

$S_0 =$

	1	2	…	j	…	n
1	—	2	…	j	…	n
2	1	—	…	j	…	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	1	2	…	j	…	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	2	…	j	…	—

Paso general *k*. Definir el renglón k y la columna k como *renglón pivote* y *columna pivote*. Aplicar la *operación triple* a cada elemento d_{ij} en D_{k-1} para toda i y j. Si se satisface la condición

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}, (i \neq k, j \neq k \text{ e } i \neq j)$$

hacer los siguientes cambios:

a) Crear D_k reemplazando d_{ij} en D_{k-1} por $d_{ik} + d_{kj}$.
b) Crear S_k reemplazando s_{ij} en S_{k-1} por k. Igualar $k = k + 1$ y repetir el paso k.

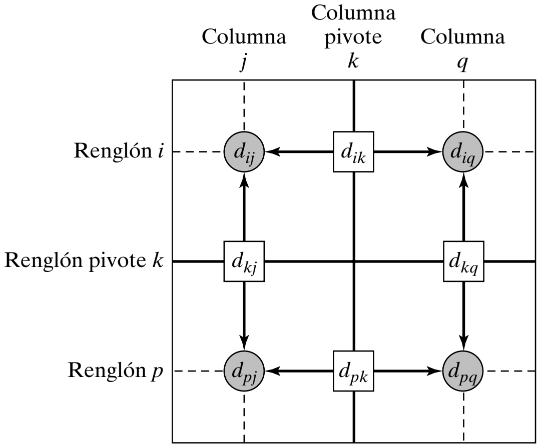


FIGURA 6.20
Implementación de la operación triple en forma matricial

Se puede explicar el paso k del algoritmo representando a D_{k-1} como se ve en la figura 6.20. Aquí, el renglón k y la columna k definen el renglón y la columna pivote actuales. El renglón i representa cualesquiera de los renglones 1, 2, ..., y $k - 1$, y el renglón p representa cualquiera de los renglones $k + 1$, $k + 2$, ..., y n. De igual modo, la columna j representa cualquiera de las columnas 1, 2, ..., y $k - 1$, y la columna q representa cualquiera de las columnas $k + 1$, $k + 2$, ..., y n. Con la *operación triple*, si la suma de los elementos del renglón pivote y la columna pivote (representados por cuadrados) es menor que el elemento de intersección asociado (representado por un círculo), entonces es óptimo reemplazar la distancia de intersección por la suma de las distancias pivote.

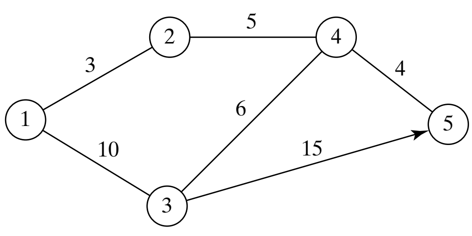
Después de n pasos se puede determinar la ruta más corta entre los nodos i y j con las matrices D_n y S_n con las siguientes reglas:

1. En D_n, d_{ij} representa la distancia más corta entre los nodos i y j.
2. En S_n, se determina el nodo intermedio $k = s_{ij}$ que forme la ruta $i \rightarrow k \rightarrow j$. Si $s_{ik} = k$ y $s_{kj} = j$, detenerse; todos los nodos intermedios de la ruta se han determinado. En caso contrario, repetir el procedimiento entre los nodos i y k y entre los nodos k y j.

Ejemplo 6.3-5

Para la red de la figura 6.21, determine las rutas más cortas entre cada par de nodos. En los arcos aparecen las distancias en millas. El arco (3,5) es direccional, por lo que no se permite tráfico alguno del nodo 5 al nodo 3. Todos los demás arcos permiten tráfico en ambas direcciones.

FIGURA 6.21
Red para el ejemplo 6.3-5



Iteración 0. Las matrices D_0 y S_0 son la representación inicial de la red. D_0 es simétrica, excepto que $d_{53} = \infty$ porque no se permite tráfico del nodo 5 al nodo 3.

D_0

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	∞	5	∞
3	10	∞	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_0

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	3	4	5
3	1	2	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 1. Se iguala $k = 1$. El renglón y la columna pivotes se ven en la matriz D_0 con sombra ligera: son el primer renglón y la primera columna. Las celdas más oscuras, d_{23} y d_{32} son las únicas que pueden mejorar con la *operación triple.* Así, D_1 y S_1 se obtienen partiendo de D_0 y S_0 como sigue:

1. Sustituir d_{23} con $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$, e igualar $s_{23} = 1$.
2. Sustituir d_{32} con $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$, e igualar $s_{32} = 1$.

Estos cambios se muestran en negritas, en las matrices D_1 y S_1.

D_1

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	**13**	5	∞
3	10	**13**	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_1

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	**1**	4	5
3	1	**1**	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 2. Se iguala $k = 2$, como indican el renglón y la columna con sombra ligera en D_1. Se aplica la *operación triple* a las celdas más oscuras de D_1 y S_1. Los cambios que resultan se indican con negritas en D_2 y en S_2.

D_2

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	**8**	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	**8**	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_2

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	**2**	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	**2**	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 3. Se iguala $k = 3$, como indican el renglón y la columna sombreadas en D_2. Las nuevas matrices son D_3 y S_3.

D_3	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	**25**
2	3	—	13	5	**28**
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_3	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	**3**
2	1	—	1	4	**3**
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 4. Se iguala $k = 4$ como se indica con el renglón y la columna con sombra ligera en D_3. Las nuevas matrices son D_4 y S_4.

D_4	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	**12**
2	3	—	**11**	5	**9**
3	10	**11**	—	6	**10**
4	8	5	6	—	4
5	**12**	**9**	**10**	4	—

S_4	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	**4**
2	1	—	**4**	4	**4**
3	1	**4**	—	4	**4**
4	2	2	3	—	5
5	**4**	**4**	**4**	4	—

Iteración 5. Se iguala $k = 5$, como se ve en el renglón y la columna sombreadas de D_4. No hay más mejoras posibles en esta iteración. Por consiguiente, D_5 y S_5 son iguales que D_4 y S_4.

Las matrices finales D_5 y S_5 contienen toda la información necesaria para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera de la red. Por ejemplo, para determinar la ruta más corta del nodo 1 al nodo 5, primero se ve la distancia asociada $d_{15} = 12$ millas. Para determinar la ruta asociada, recuérdese que un segmento (i, j) representa un enlace directo sólo si $s_{ij} = j$. En caso contrario, i y j están enlazados mediante al menos un nodo intermedio. Como $s_{15} = 4$, la ruta inicial es $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Ahora bien, como $s_{14} = 2 \neq 4$, el segmento (1,4) no es un enlace *directo* y $1 \rightarrow 4$ se debe reemplazar por $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, y la ruta $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ se transforma ahora en $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. A continuación, como $s_{12} = 2$, $s_{24} = 4$ y $s_{45} = 5$, la ruta $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ no necesita más "disecciones" y el proceso termina.

Como en el algoritmo de Dijkstra, se puede usar TORA para generar iteraciones de Floyd. A partir del menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar), seleccione `Solve problem` ⇒ `Iterations` ⇒ `Floyd's algorithm` (resolver problema/iteraciones/algoritmo de Floyd). La figura 6.22 ilustra el resultado de TORA para el ejemplo 6.3-5 (archivo ch6ToraFloydEx6-3-5.txt).

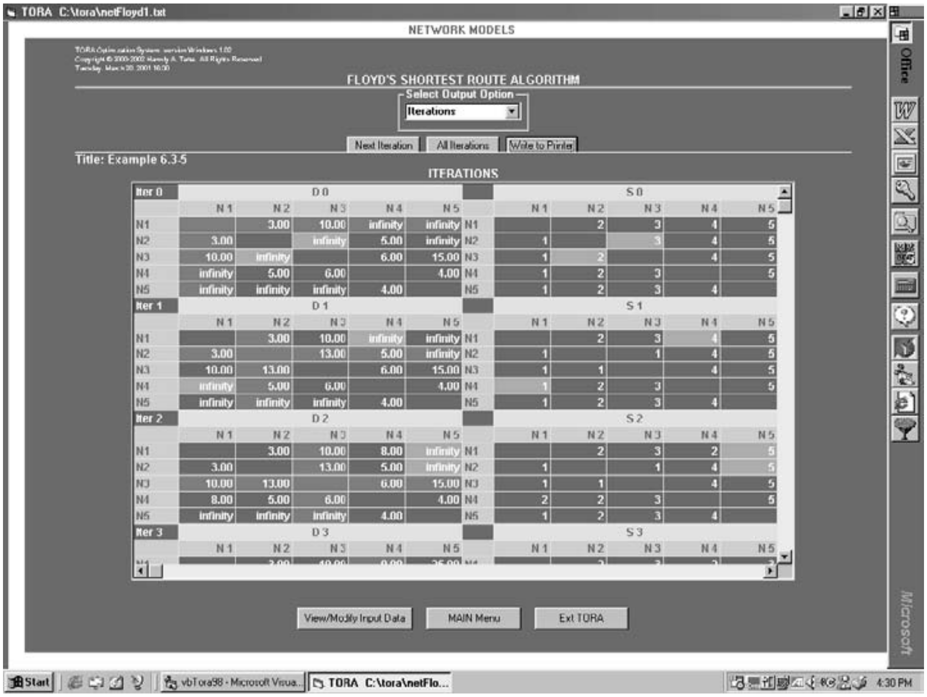


FIGURA 6.22

Iteraciones de Floyd para el ejemplo 6.3-5 con TORA

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3C

1. En el ejemplo 6.3-5, use el algoritmo de Floyd para determinar las rutas más cortas entre los siguientes pares de nodos:
   - **a)** Del 5 al 1
   - **b)** Del 3 al 5
   - **c)** Del 5 al 3
   - **d)** Del 5 al 2
2. Aplique el algoritmo de Floyd a la red de la figura 6.23. Los arcos (7,6) y (6,4) son unidireccionales y todas las distancias están en millas. Determine la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
   - **a)** Del 1 al 7
   - **b)** Del 7 al 1
   - **c)** Del 6 al 7
3. La telefónica Tell-All da servicio a seis áreas geográficas. Las distancias (en millas) de satélites entre las seis áreas se ven en la figura 6.24. Tell-All debe determinar las rutas de mensaje más eficientes que se van a establecer entre cada par de áreas en la red.
4. Seis niños, Joe, Kay, Jim, Bob, Rae y Kim, juegan una variedad del juego de escondidas. El lugar de escondite de un niño sólo lo conocen ciertos niños de los demás. Un niño se junta con

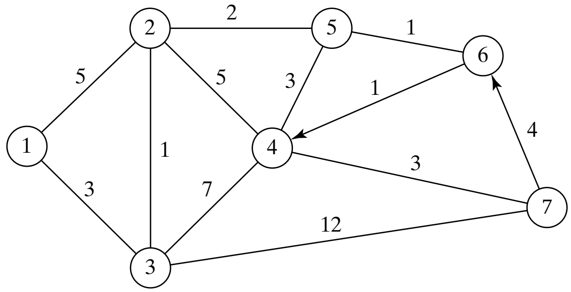


FIGURA 6.23

Red para el problema 2, conjunto 6.3c

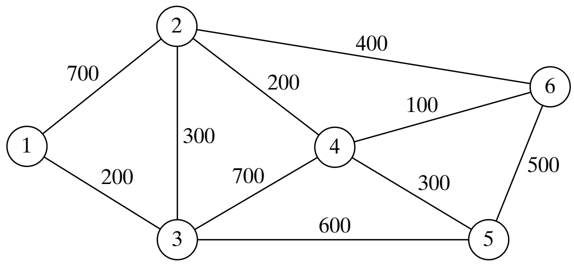


FIGURA 6.24

Red para el problema 3, conjunto 6.3c

otro para tratar de encontrar su escondite. Esto se hace a través de una cadena de otros niños, que al final llevan a descubrir dónde está escondido el niño designado. Por ejemplo, suponga que Joe debe encontrar a Kim, y que Joe sabe dónde se esconde Jim, que a su vez sabe dónde está Kim. Así, Joe puede encontrar a Kim encontrando primero a Jim, quien a su vez guía a Joe hacia Kim. La siguiente lista muestra las relaciones entre los niños:

Joe sabe los escondites de Bob y de Kim.

Kay sabe los escondites de Bob, Jim y Rae.

Jim y Bob sólo saben el escondite de Kay.

Rae sabe dónde se esconde Kim.

Kim sabe dónde se esconden Joe y Bob.

Desarrolle un plan para que cada niño encuentre a todos los demás con la cantidad mínima de contactos. ¿Cuál es la cantidad máxima de contactos?

6.3.3 Formulación del problema de la ruta más corta en programación lineal

En esta sección se describen dos formulaciones de programación lineal para el problema de la ruta más corta. Las formulaciones son generales, en el sentido que se pueden usar para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualquiera de la red. A este respecto, las formulaciones de programa lineal son equivalentes al algoritmo de Floyd.

Suponga que la red de ruta más corta tiene n nodos, y que se desea determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera s y t de la red.

Formulación 1: En esta formulación se supone que entra a la red una unidad externa de flujo en el nodo s y sale en el nodo t, siendo s y t dos nodos entre los que se busca determinar la ruta más corta.

Se definen

x_{ij} = cantidad de flujo en el arco (i, j) para toda i y j factibles

c_{ij} = longitud del arco (i, j) para toda i y j factibles

Como sólo puede haber *una* unidad de flujo en algún arco en cualquier momento, la variable x_{ij} debe asumir solamente valores binarios (0 o 1). Así, la función objetivo del programa lineal se vuelve:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{\text{todos los arcos definidos}(i,\, j)} c_{ij} x_{ij}$$

Hay una restricción que representa la conservación de flujo en cada nodo; esto es, en cualquier nodo j,

$$\text{Flujo total que entra} = \text{Flujo total que sale}$$

Formulación 2: La segunda formulación es en realidad el problema dual del programa lineal en la formulación 1. Como la cantidad de restricciones en la formulación 1 es igual a la cantidad de nodos, el problema dual tendrá tantas variables como cantidad de nodos haya en la red. También, las variables duales no deben estar restringidas, porque todas las restricciones de la formulación 1 son ecuaciones.

Sea

$$y_j = \text{la restricción dual asociada al nodo } j$$

Como s y t son los nodos inicial y terminal de la red, el problema dual se define como sigue:

$$\text{Maximizar } z = y_t - y_s$$

sujeta a

$$y_j - y_i \leq c_{ij} \text{ para toda } i \text{ y } j \text{ factibles}$$

$$\text{signo no restringido para toda } y_i \text{ y } y_j$$

Ejemplo 6.3-6

Se tiene la red de ruta más corta del ejemplo 6.3-4. Suponer que se desea determinar la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2; esto es, $s = 1$ y $t = 2$. La figura 6.25 muestra cómo entra el flujo unitario en el nodo 1 y sale en el nodo 2.

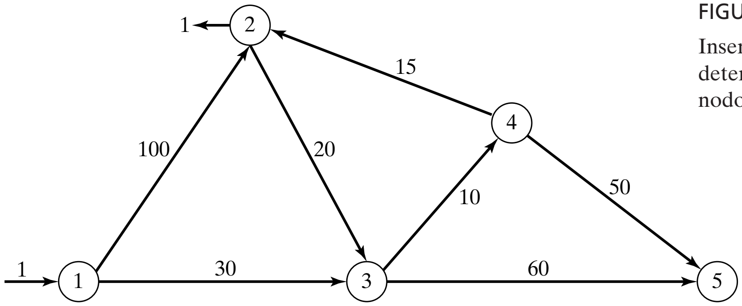


FIGURA 6.25

Inserción de un flujo unitario para determinar la ruta más corta entre el nodo $s = 1$ y el nodo $t = 2$

La lista del programa lineal asociado, usando la formulación 1, se ve a continuación:

	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{34}	x_{35}	x_{42}	x_{45}	
Minimizar z =	100	30	20	10	60	15	50	
Nodo 1	−1	−1						= −1
Nodo 2	1		−1			1		= 1
Nodo 3		1	1	−1	−1			= 0
Nodo 4				1		−1	−1	= 0
Nodo 5					1		1	= 0

Las restricciones representan la conservación de flujo en cada nodo. Por ejemplo, en el nodo 2 "flujo que entra = flujo que sale" es $x_{12} + x_{42} = 1 + x_{23}$. Nótese que una de las restricciones siempre es redundante. Por ejemplo, si se suman las últimas cuatro restricciones en forma simultánea se obtiene $x_{12} + x_{13} = 1$, que es igual que la restricción 1.

La solución óptima (obtenida con TORA)[2] es

$$z = 55,\ x_{13} = 1,\ x_{34} = 1,\ x_{42} = 1$$

Esta solución expresa la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2 como $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, y la distancia asociada es $z = 55$ (millas).

Para aplicar la formulación 2, el problema dual asociado con el programa lineal anterior es

$$\text{Maximizar } z = y_2 - y_1$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 &\leq 100 \text{ (Ruta 1-2)}\\
y_3 - y_1 &\leq 30 \text{ (Ruta 1-3)}\\
y_3 - y_2 &\leq 20 \text{ (Ruta 2-3)}\\
y_4 - y_3 &\leq 10 \text{ (Ruta 3-4)}\\
y_5 - y_3 &\leq 60 \text{ (Ruta 3-5)}\\
y_2 - y_4 &\leq 15 \text{ (Ruta 4-2)}\\
y_5 - y_4 &\leq 50 \text{ (Ruta 4-5)}\\
y_1, y_2, \ldots, y_5 &\text{ no restringida}
\end{aligned}$$

Aunque el problema dual anterior es una definición matemática pura derivada del problema primal, en realidad se puede interpretar el problema en una forma lógica. Se define

$$y_i = \text{Distancia al nodo } i$$

[2]TORA no acepta un lado derecho negativo. Se puede obviar esta incomodidad seleccionando a la restricción redundante como la que tiene el lado derecho negativo, hacerla redundante cambiando = por ≤ e igualando el lado derecho a un valor muy grande. Otro truco consiste en agregar una variable nueva cuyas cotas superior e inferior sean iguales a 1, forzándola de hecho a que sea igual a 1 en cualquier solución. Los coeficientes de restricción de la nueva variable son iguales a los del lado derecho actual, pero tienen signo contrario. El lado derecho del problema "nuevo" se debe cambiar a cero para todas las restricciones (véase el archivo ch6ToraLpShortRouteEx6-3-6.txt).

Con esta definición, la distancia más corta del nodo inicial 1 al nodo terminal 2 se determina maximizando $y_2 - y_1$. La restricción asociada con la ruta (i, j) indica que la distancia del nodo i al nodo j no puede ser mayor que la longitud directa de esa ruta. Puede ser menor si se puede llegar al nodo j desde el nodo i pasando por otros nodos que formen una ruta más corta. Por ejemplo, la distancia máxima del nodo 1 al nodo 2 es 100. Con la definición de y_i como distancia al nodo i, se puede suponer que todas las variables son no negativas (en lugar de no tener restricción). También se puede suponer que $y_1 = 0$ es la distancia al nodo 1.

Con base en la explicación anterior, y suponiendo que todas las variables son no negativas, la solución óptima es

$$z = 55,\ y_1 = 0,\ y_2 = 55,\ y_3 = 30,\ y_4 = 40,\ y_5 = 0$$

El valor de $z = 55$ expresa la distancia más corta del nodo 1 al nodo 2, que también es igual a $y_2 - y_1 = 55 - 0 = 55$.

La determinación de la ruta misma, a partir de esta solución, es algo ingenioso. Se ve que la solución satisface *en forma de ecuación* a las restricciones de las rutas 1-3, 3-4 y 4-2, porque sus holguras son igual a cero; esto es, $y_3 - y_1 = 30$, $y_4 - y_3 = 10$ y $y_2 - y_4 = 15$. Este resultado identifica que la ruta más corta es la $1 \to 3 \to 4 \to 2$.

Otra forma de identificar las restricciones que se satisfacen en forma de ecuación es consultar la solución del programa lineal de la formulación 2. Toda restricción que tenga un valor dual distinto de cero debe estar satisfecha en forma de ecuación (véase la sección 4.2.4). La tabla siguiente aparea las rutas (restricciones) con sus valores duales asociados.

Ruta (restricción)	1-2	1-3	2-3	3-4	3-5	4-2	4-5
Valor dual asociado	0	1	0	1	0	1	0

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3D

1. En el ejemplo 6.3-6 use las dos formulaciones de programa lineal para determinar las rutas más cortas entre los siguientes pares de nodos:
   a) 1 al 5
   b) 2 al 5

6.3.4 Solución del problema de la ruta más corta con hoja de cálculo Excel

La hoja de cálculo de Excel, desarrollada para el modelo general de transporte (Sección 5.3.3) se puede modificar fácilmente para determinar la ruta más corta entre dos nodos. La hoja se basa en la formulación 1, sección 6.3.3, y está diseñada para resolver problemas con un máximo de 10 nodos. La figura 6.26 muestra la aplicación de la hoja de cálculo al ejemplo 6.3-4 (archivo ch6SolverShortestRoute.xls). La matriz de distancias está en las celdas B6:K15.[3] Para los arcos no existentes se ingresa una distancia infinita (= 9999 o cualquier valor relativamente grande). Como se busca la ruta más corta entre los nodos 1 y 2, la cantidad suministrada al nodo 1 y la cantidad de demanda en el nodo 2 es 1 unidad. Se escribe cantidad cero en los elementos restantes de oferta y demanda.

[3]En la figura 6.26, los renglones 11 a 15 y la columna K se ocultan, para ahorrar espacio.

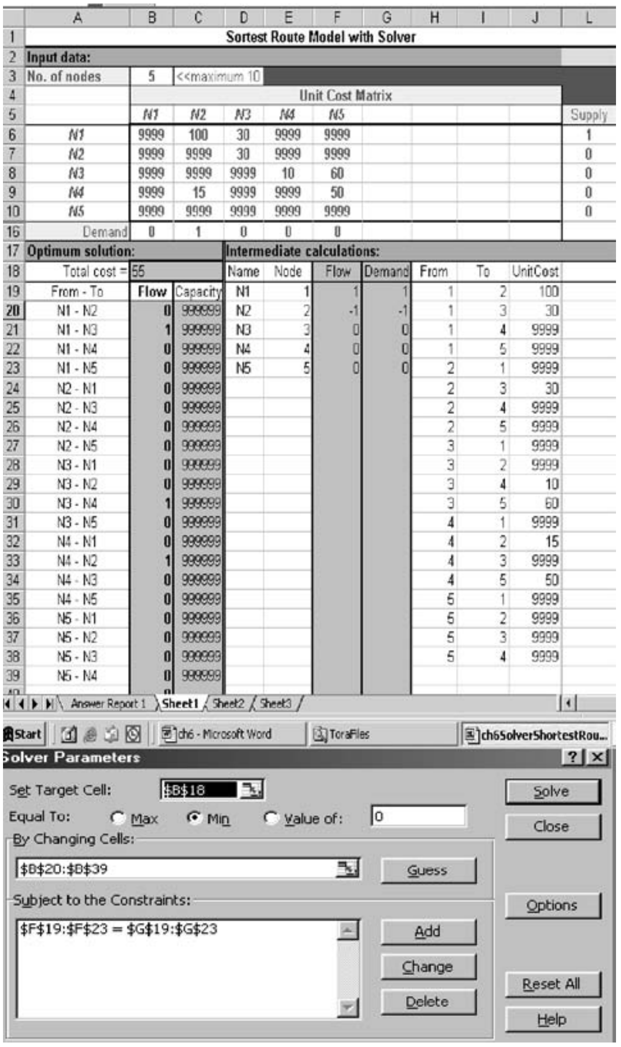


FIGURA 6.26

Solución de la ruta más corta entre los nodos 1 y 2 del ejemplo 6.3-4, con Solver de Excel

Una vez ingresados los datos de costo unitario y de oferta y demanda, el resto de la hoja (secciones de *cálculos intermedios* y de *solución óptima*) se genera en forma automática. Los parámetros de Solver deben corresponder a los datos del problema, como se ve en las columnas resaltadas B, C, F y G. La columna B especifica las celdas que cambian (flujo en arcos) del problema (celdas B20:B39). La columna C especifica las capacidades de los arcos de la red (celdas C20:C39). En el modelo de ruta más corta esas capacidades no desempeñan papel alguno en los cálculos, y en consecuencia son infinitas (=999999). Las restricciones del modelo representan la ecuación de balance para cada nodo. Las celdas F19:F23 definen el lado izquierdo, y las celdas G19:G23 representan el lado derecho de las ecuaciones de flujo. Como se explicó en la sección 5.3.3, se usa SUMIF (SUMAR SI) para generar el flujo neto adecuado en cada nodo, con la información de las columnas I y J. La hoja de cálculo automatiza esas

operaciones. Así, todo lo que se debe hacer después de escribir los datos es actualizar las especificaciones Changing Cells y Constraints de Solver, para que coincidan con los datos. La Target Cell queda igual para todos los datos. En el ejemplo 6.3-4 se tiene

```
Changing Cells: B20:B39
Constraints: F19:F23=G19:G23
```

El resultado de la figura 6.26 define la solución (N1-N3 = 1, N3-N4 = 1, N4-N2 = 1), con una distancia total de 55 millas. Eso quiere decir que la ruta óptima es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3E

1. Modifique la hoja de cálculo ch6SolverShortestRoute.xls (que se aplicó en el ejemplo 6.3-4) para determinar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
   a) 1 al 5
   b) 4 al 3

2. Adaptar la hoja de cálculo ch6SolverShortestRoute.xls para el problema 2, conjunto 6.3a, para determinar las rutas más cortas entre el nodo 4 y el nodo 7.

6.4 MODELO DE FLUJO MÁXIMO

Imagine una red de oleoductos que transportan crudo desde los pozos hasta las refinerías. En las distancias intermedias adecuadas están instaladas estaciones de bombeo, para mover el crudo por la red. Cada segmento de tubo tiene un flujo (o capacidad) máximo de crudo. Un segmento de tubo puede ser uni o bidireccional, dependiendo de su diseño. Un segmento unidireccional tiene una capacidad finita en una dirección, y capacidad cero en la dirección opuesta. La figura 6.27 muestra una red de oleoductos. ¿Cómo se puede determinar la capacidad máxima de la red entre los pozos y las refinerías?

La solución del problema propuesto requiere convertir la red en una que tenga una sola fuente y un solo "sumidero" o destino. Este requerimiento se llena usando arcos unidireccionales de capacidad infinita, como indican los arcos de línea interrumpida en la figura 6.27.

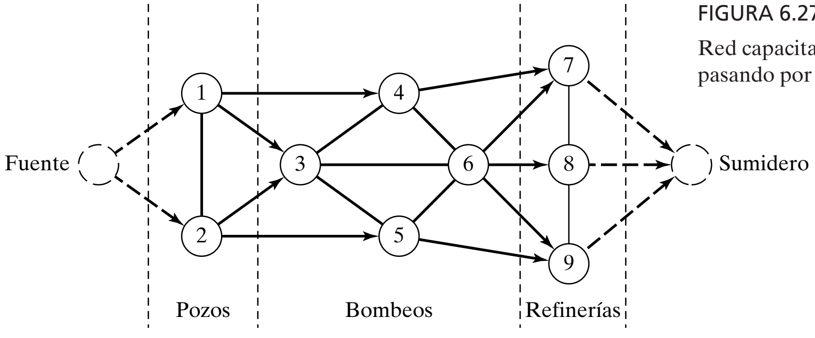
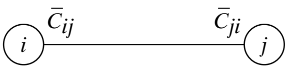


FIGURA 6.27
Red capacitada que une pozos y refinerías pasando por estaciones de bombeo

Dado el arco (i, j) con $i < j$, se usa la notación $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$ para representar las capacidades de flujo en las dos direcciones, $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$, respectivamente. Para eliminar ambigüedades se pone a $\overline{C}_{ij}$ en el arco junto al nodo i, y $\overline{C}_{ji}$ se coloca junto al nodo j, como se ve en la figura 6.28.

FIGURA 6.28

Flujos en arco: $\overline{C}_{ij}$ de $i \rightarrow j$ y $\overline{C}_{ji}$ de $j \rightarrow i$



6.4.1 Enumeración de cortes

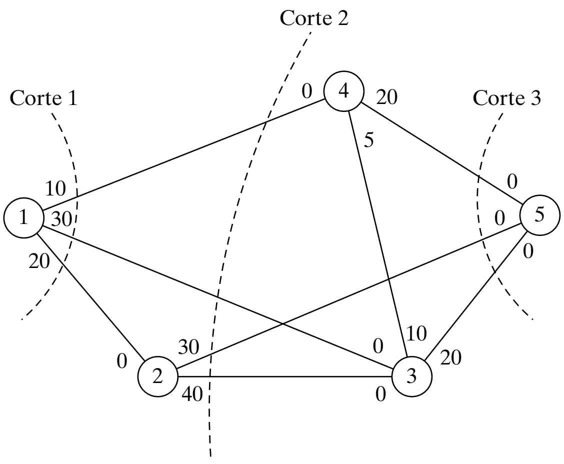
Un **corte** define a un conjunto de arcos que, cuando se eliminan de la red, causan una interrupción total del flujo entre los nodos fuente y sumidero. La **capacidad de corte** es igual a la suma de las capacidades de los arcos correspondientes. Entre *todos* los cortes posibles en la red, el que tenga la *capacidad menor* permite el flujo máximo en la red.

Ejemplo 6.4-1

Se tiene la red de la figura 6.29. En los arcos respectivos se indican las capacidades bidireccionales, con la convención de la figura 6.28. Por ejemplo, para el arco (3,4), el límite de flujo es 10 unidades de 3 a 4 y 5 unidades de 4 a 3.

FIGURA 6.29

Ejemplos de cortes en redes de flujo



En la figura 6.29 se ilustran tres cortes, cuyas capacidades se calculan en la tabla siguiente.

Corte	Arcos asociados	Capacidad
1	(1, 2), (1, 3), (1, 4)	20 + 30 + 10 = 60
2	(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5)	30 + 10 + 40 + 30 = 110
3	(2, 5), (3, 5), (4, 5)	30 + 20 + 20 = 70

No se puede decir cuál es el flujo máximo en la red, a menos que se enumeren todos los cortes posibles. La única información que se puede obtener de la enumeración parcial de los tres cortes es que el flujo máximo en la red no puede ser mayor que 60 unidades. Desafortunadamente, enumerar todos los cortes no es una tarea sencilla, y entonces se hace necesario desarrollar el eficiente algoritmo en la sección 6.4.2.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4A

1. Determine dos cortes más, en la figura 6.29, y obtenga sus capacidades.

6.4.2 Algoritmo de flujo máximo

El algoritmo de flujo máximo se basa en determinar **rutas de irrupción** que tengan flujo neto *positivo* entre los nodos fuente y sumidero. Cada ruta comunica parte o todas las capacidades de sus arcos al flujo total en la red.

Considérese el arco (i, j) con capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$. A medida que partes de esas capacidades contribuyen al flujo en el arco, se actualizan los **residuales** (o capacidades remanentes). La red con los residuales actualizados se llama **red residual**. Se usará la notación (c_{ij}, c_{ji}) para representar esos residuales.

Para un nodo j que recibe flujo del nodo i, se define una etiqueta $[a_j, i]$, donde a_j es el flujo del nodo i al nodo j. Los pasos del algoritmo se resumen como sigue.

Paso 1. Para todos los arcos (i, j) se iguala la capacidad residual con la capacidad inicial; esto es, $(c_{ij}, c_{ji}) = (\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$. Sea $a_1 = \infty$ y se etiqueta el nodo fuente 1 con $[\infty, -]$. Se iguala $i = 1$ y se prosigue en el paso 2.

Paso 2. Determinar S_i, el conjunto de nodos j no etiquetados que se pueden alcanzar directamente desde el nodo i, con arcos con residuales *positivos* (esto es, $c_{ij} > 0$ para toda $j \in S_i$). Si $S_i \neq \emptyset$, ir al paso 3. En caso contrario ir al paso 4.

Paso 3. Determinar $k \in S_i$ tal que

$$c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\}$$

Igualar $a_k = c_{ik}$ y etiquetar el nodo k con $[a_k, i]$. Si $k = n$, el nodo de sumidero se ha etiquetado, y se ha encontrado una *ruta de irrupción*; ir al paso 5. En caso contrario, igualar $i = k$ y seguir en el paso 2.

Paso 4. (*Retroceso*). Si $i = 1$, no hay otras irrupciones posibles; ir al paso 6. En caso contrario, sea r el nodo que se ha etiquetado *inmediatamente* antes del nodo actual i y quitar i del conjunto de nodos adyacentes a r. Igualar $i = r$ y continuar en el paso 2.

Paso 5. (*Determinación de la red residual*). Sea $N_p = (1, k_1, k_2, ..., n)$; se definen los nodos de la p-ésima ruta de irrupción del nodo fuente 1 al nodo sumidero n. Entonces el flujo máximo por la ruta se calcula como

$$f_p = \min \{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_n\}$$

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de irrupción se *disminuye* en f_p unidades en la dirección del flujo y se *aumenta* f_p unidades en la dirección

contraria; esto es, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual se cambia del actual (c_{ij}, c_{ji}) a

a) $(C_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$ si el flujo va de i a j

b) $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$ si el flujo va de j a i

Se reinstalan todos los nodos que se hayan eliminado en el paso 4. Poner $i = 1$ y regresar al paso 2 para intentar una nueva ruta de irrupción.

Paso 6. (*Solución*)

a) Si se han determinado m rutas de irrupción, el flujo máximo en la red es

$$F = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$$

b) Como los residuales *inicial* y *final* del arco (i, j) se obtienen con $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$ y (c_{ij}, c_{ji}), respectivamente, el flujo óptimo en el arco (i, j) se calcula como sigue: sea $(\alpha, \beta) = (\overline{C}_{ij} - c_{ij}, \overline{C}_{ji} - c_{ji})$. Si $\alpha > 0$, el flujo óptimo de i a j es α. Si $\beta > 0$, el flujo óptimo de i a j es β. (Es imposible que tanto α y β sean positivos.)*

Se invoca el proceso de retroceso del paso 4 cuando el algoritmo llega a un "punto ciego" por descuido, en un nodo intermedio, antes de poder realizar una irrupción. El ajuste del flujo en el paso 5 se puede explicar con la red de flujo sencilla de la figura 6.30. La red a) obtiene la primera ruta de irrupción $N_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ con su flujo máximo $f_1 = 5$. Así, los residuales de cada uno de los arcos (1,2), (2,3) y (3,4) se cambian de (5,0) a (0,5), según el paso 5. La red b) proporciona ahora la segunda ruta de irrupción $N_2 = \{1, 3, 2, 4\}$ con $f_2 = 5$. Después de hacer los ajustes necesarios de flujo, se obtiene la red c), donde ya no son posibles más irrupciones. Lo que sucedió en la transición de b) a c) no es más que una cancelación de un flujo antes comprometido en la dirección $2 \rightarrow 3$. El algoritmo puede "recordar" que se había comprometido antes un flujo de 2 a 3 sólo porque se ha aumentado la capacidad en la dirección contraria de 0 a 5 (de acuerdo con el paso 5).

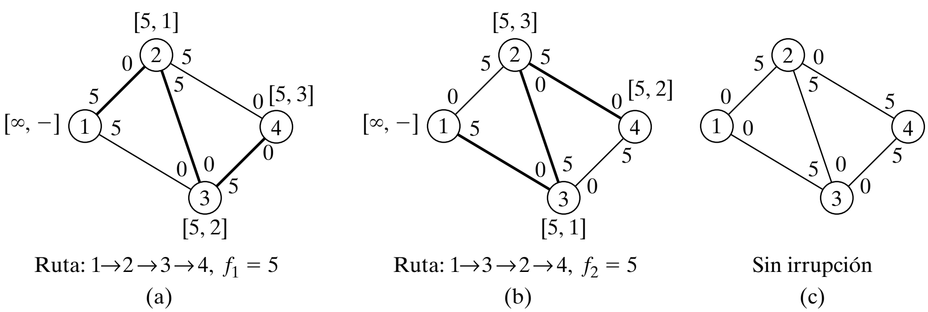


FIGURA 6.30

Uso del residual para calcular el flujo máximo

*N. del R.T.: Por otro lado, si $\beta > 0$, el flujo óptimo de j a i es β

Ejemplo 6.4-2

Determinar el flujo máximo en la red del ejemplo 6.4-1 (Figura 6.29). La figura 6.31 muestra un resumen gráfico de las iteraciones del algoritmo. El lector encontrará útil comparar la descripción de las iteraciones con el resumen gráfico.

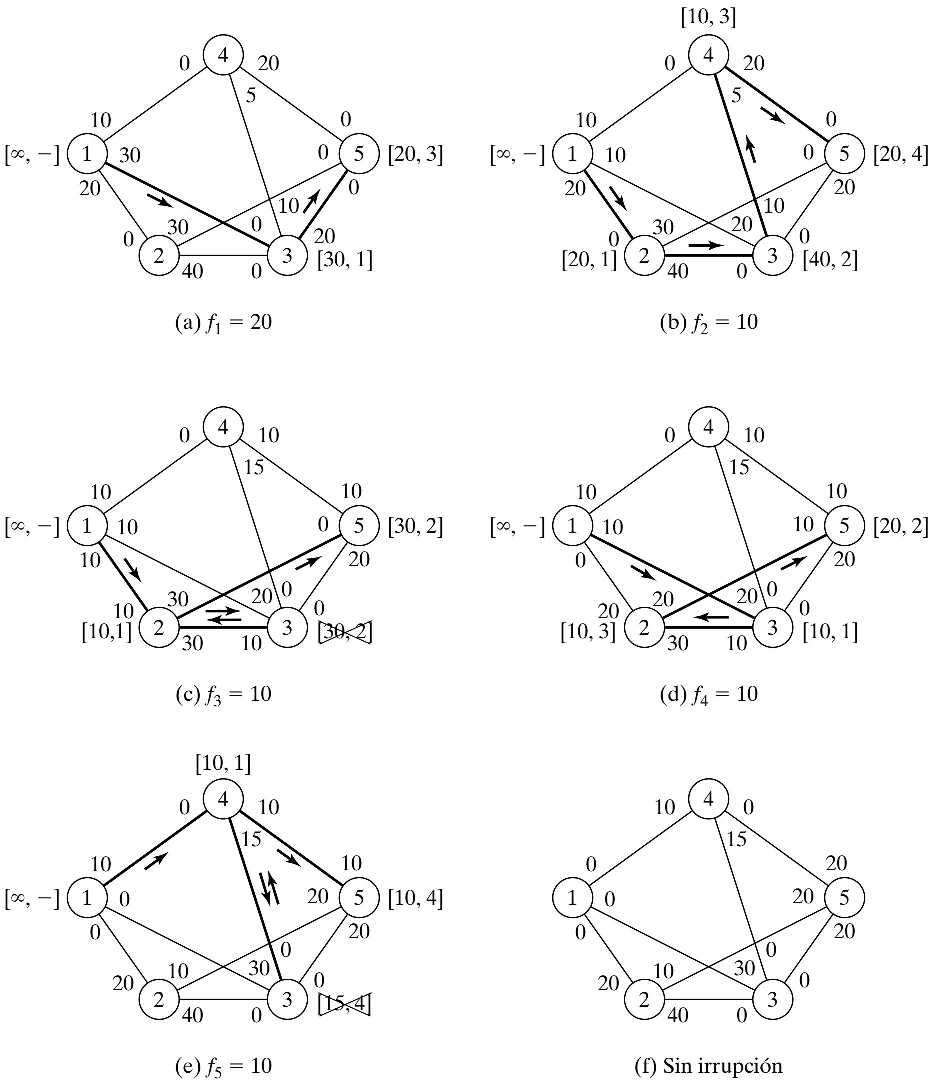


FIGURA 6.31

Iteraciones del algoritmo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2

Iteración 1. Igualar los residuales iniciales (c_{ij}, c_{ji}) a las capacidades iniciales ($\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji}$).

Paso 1. Igualar $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 con $[\infty, —]$. Poner $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\} (\neq \emptyset)$.

Paso 3. $k = 3$ porque $c_{13} = \text{máx}\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \text{máx}\{20, 30, 10\} = 30$. Tomar $a_3 = c_{13} = 30$ y etiquetar el nodo 3 con [30, 1]. Igualar $i = 3$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_3 = (4, 5)$.

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{35} = \text{máx}\{10, 20\} = 20$. Etiquetar el nodo 5 con [20, 3]. Se obtuvo una irrupción. Ir al paso 5.

Paso 5. La ruta de irrupción se determina con las etiquetas comenzando en el nodo 5 y terminando en el nodo 1; esto es, $(\mathbf{5}) \rightarrow [20, \mathbf{3}] \rightarrow (\mathbf{3}) \rightarrow [30, \mathbf{1}] \rightarrow (\mathbf{1})$. Así, $N_1 = \{1, 3, 5\}$ y $f_1 = \text{mín}\{a_1, a_3, a_5\} = \{\infty, 30, 20\} = 20$. Las capacidades residuales a lo largo de la ruta N_1 son

$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$$

$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$$

Iteración 2.

Paso 1. Poner $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 con $[\infty, —]$. Igualar $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.

Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = \text{máx}\{20, 10, 10\} = 20$. Poner $i = 2$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{3, 5\}$.

Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 40$. Etiquetar el nodo 3 con [40, 2]. Poner $i = 3$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_3 = \{4\}$ (observe que $c_{35} = 0$; en consecuencia el nodo 5 no puede incluirse en S_3).

Paso 3. $k = 4$ y $a_4 = c_{34} = 10$. Etiquetar el nodo 4 con [10, 3]. Igualar $i = 4$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_4 = \{5]$ (observe que los nodos 1 y 3 ya se han etiquetado y en consecuencia no se pueden incluir en S_4).

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{45} = 20$. Etiquetar el nodo 5 con [20, 4]. Se ha logrado la irrupción. Ir al paso 5.

Paso 5. $N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f_2 = \text{mín}\{\infty, 20, 40, 10, 20\} = 10$. Los residuales a lo largo de la ruta de N_2 son

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

$$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10)$$

$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15)$$

$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

Iteración 3.

Paso 1. Poner $a_1 = \infty$ y etiquetar el nodo 1 con $[\infty, —]$; poner $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.

Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = \text{máx}\{10, 10, 10\} = 10$ (aunque los empates se rompen en forma arbitraria, TORA selecciona siempre el nodo empatado que tenga el índice me-

nor; usaremos esta convención en el ejemplo). Etiquetar el nodo 2 con [10, 1]. Poner $i = 2$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_2 = \{3, 5\}$.

Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 30$. Etiquetar el nodo 3 con [30, 2]. Poner $i = 3$ y repetir el paso 2.

Paso 2. $S_3 = \varnothing$ (porque $c_{34} = c_{35} = 0$). Ir al paso 4 para retroceder.

Paso 4. La etiqueta [30, 2] en el nodo 3 da el nodo inmediato anterior $r = 2$. Sacar el nodo 3 de más consideraciones *en esta iteración*, tachándolo. Repetir el paso 2 con $i = r = 2$.

Paso 2. $S_2 = \{5\}$; nótese que el nodo 3 se ha eliminado en el paso de retroceso.

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{25} = 30$. Etiquetar el nodo 5 con [30, 2]. Se ha logrado la irrupción; proseguir en el paso 5.

Paso 5. $N_3 = \{1, 2, 5\}$ y $c_5 = \text{mín}\{\infty, 10, 30\} = 10$. Los residuales a lo largo de la trayectoria de N_3 son

$$(c_{12}, c_{21}) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20)$$

$$(c_{25}, c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10)$$

Iteración 4. En esta iteración se obtiene $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$ con $f_4 = 10$ (¡compruébelo!).

Iteración 5. En esta iteración se obtiene $N_5 = \{1, 4, 5\}$ con $f_5 = 10$ (¡compruébelo!).

Iteración 6. Todos los arcos que salen del nodo 1 tienen residuales cero. En consecuencia no hay más irrupciones posibles. Pasaremos al paso 6 para determinar la solución.

Paso 6. El flujo máximo en la red es $F = f_1 + f_2 + \ldots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. El flujo en los distintos arcos se calcula restando los últimos residuales (c_{ij}, c_{ji}) en las iteraciones 6 de las capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$, como se ve en la tabla siguiente.

Arco	$(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})_6$	Flujo	Dirección
(1, 2)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$1 \rightarrow 2$
(1, 3)	$(30, 0) - (0, 30) = (30, -30)$	30	$1 \rightarrow 3$
(1, 4)	$(10, 0) - (0, 10) = (10, -10)$	10	$1 \rightarrow 4$
(2, 3)	$(40, 0) - (40, 0) = (0, 0)$	0	—
(2, 5)	$(30, 0) - (10, 20) = (20, -20)$	20	$2 \rightarrow 5$
(3, 4)	$(10, 5) - (0, 15) = (10, -10)$	10	$3 \rightarrow 4$
(3, 5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$3 \rightarrow 5$
(4, 5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$4 \rightarrow 5$

Puede usted usar TORA para resolver el modelo de flujo máximo en una forma automatizada, o para producir las iteraciones que se describieron arriba. Partiendo del menú `SOLVE/MODIFY` (resolver/modificar), seleccione `Solve Problem` (resolver problema). Después de especificar el formato de los resultados, pase a la pantalla de resultados y seleccione `Maximum Flows` (flujos máximos) o `Iterations` (iteraciones). La figura 6.32 muestra las dos primeras iteraciones del ejemplo 6.4-2 (archivo ch6ToraMaxFlowEx6-4-2.txt).

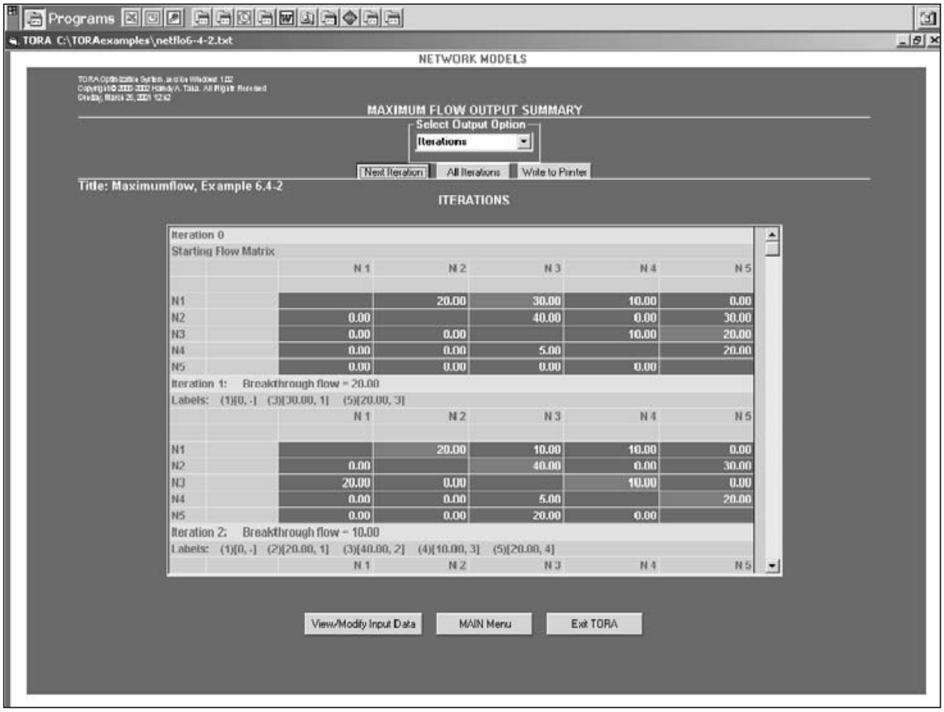


FIGURA 6.32

Iteraciones de flujo máximo para el ejemplo 6.4-2 con TORA

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4B

1. En el ejemplo 6.4-2,
   - **a)** Determine las capacidades excedentes en todos los arcos.
   - **b)** Determine el flujo a través de los nodos 2, 3 y 4.
   - **c)** ¿Se puede aumentar el flujo en la red aumentando las capacidades en las direcciones $3 \rightarrow 5$ y $4 \rightarrow 5$?
2. Determine el flujo máximo y el flujo óptimo en cada arco para la red de la figura 6.33.
3. Tres refinerías mandan un producto petrolero hacia dos terminales de distribución por una red de oleoductos. Toda la demanda que no se puede satisfacer por la red se adquiere en otras fuentes. La red de tuberías contiene tres estaciones de bombeo, como se ve en la figura 6.34. El producto va por la red en las direcciones que indican las flechas. La capacidad de cada segmento de tubería se ve directamente en los arcos, y está en millones de barriles por día. Determinar lo siguiente:
   - **a)** La producción diaria en cada refinería, que coincida con la capacidad máxima de la red.
   - **b)** La demanda diaria en cada terminal, que coincida con la capacidad máxima de la red.
   - **c)** La capacidad diaria de cada bomba, que coincida con la capacidad máxima de la red.

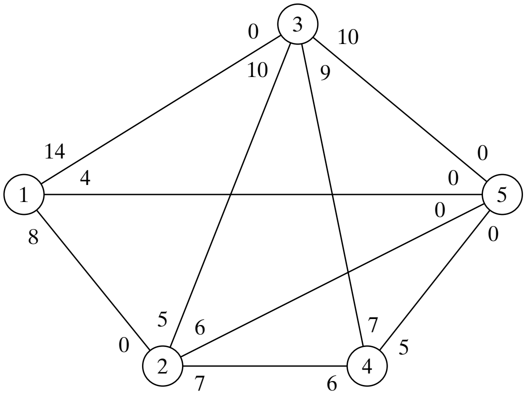


FIGURA 6.33
Red para el problema 2, conjunto 6.4b

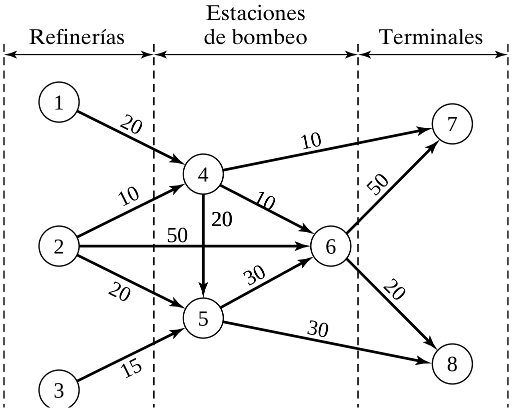


FIGURA 6.34
Red para el problema 3, conjunto 6.4b

4. Suponga que la capacidad diaria máxima de la bomba 6 en la red de la figura 6.34 se limita a 60 millones de barriles diarios. Remodele la red para incluir esta restricción. A continuación determine la capacidad máxima de la red.

5. De tres silos se transporta alimento para pollos a cuatro granjas. Algunos de los silos no pueden mandar en forma directa a algunas de las granjas. Las capacidades de las demás rutas se limitan por la cantidad de camiones disponibles y la cantidad de viajes que se hacen diario. La tabla siguiente muestra las cantidades diarias de oferta en los silos, y la demanda en las granjas (en miles de libras). Los elementos de las celdas de la tabla especifican las capacidades diarias de las rutas correspondientes.

	Granja 1	2	3	4	
Silo 1	30	5	0	40	**20**
2	0	0	5	90	**20**
3	100	40	30	40	**200**
	200	**10**	**60**	**20**	

a) Determine el programa que satisfaga la máxima parte de la demanda.

b) El programa propuesto ¿satisfará toda la demanda en las granjas?

6. En el problema 5 suponga que se permite trasbordo entre los silos 1 y 2 y los silos 2 y 3. También suponga que se permite trasbordo entre las granjas 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4. La capacidad diaria en las dos direcciones, de las rutas propuestas de transporte es 50 (mil) lb. ¿Qué efecto tiene el trasbordo sobre las demandas no satisfechas en las granjas?

7. Un padre tiene cinco hijos adolescentes y cinco tareas para asignarles. La experiencia ha indicado que es contraproducente forzar a que los niños acepten determinadas tareas. Teniendo eso en cuenta, les pide a sus hijos hacer una lista de preferencias entre las cinco tareas, y resulta la siguiente tabla:

Niño	Tarea preferida
Rif	3, 4 o 5
Mai	1
Ben	1 o 2
Kim	1, 2 o 5
Ken	2

El modesto objetivo del padre es terminar todas las tareas posibles y atender al mismo tiempo las preferencias de sus hijos. Determine la cantidad máxima de tareas que pueden terminarse y la asignación de tareas a hijos.

8. Cuatro fábricas producen cuatro clases de juguetes. La siguiente tabla es una lista de los juguetes que se producen en cada una de ellas.

Fábrica	Juguetes que produce
1	1, 2, 3
2	2, 3
3	1, 4
4	3, 4

Todos los juguetes requieren la misma mano de obra y los mismos materiales por unidad. Las capacidades diarias de las cuatro fábricas son 250, 180, 300 y 100 juguetes, respectivamente. Las demandas diarias de los cuatro juguetes son 200, 150, 350 y 100 unidades, respectivamente. Determine los programas de producción que satisfagan la mayor parte de las demandas de los cuatro juguetes.

9. El consejo académico de la U de A solicita una representación entre seis alumnos que están afiliados a cuatro sociedades honoríficas. La representación en el consejo académico comprende tres áreas: matemáticas, artes e ingeniería. En el consejo puede haber un máximo de dos alumnos en cada área. La siguiente tabla muestra la membresía de los seis alumnos en las cuatro sociedades honoríficas:

Sociedad	Alumnos afiliados
1	1, 2, 3
2	1, 3, 5
3	3, 4, 5
4	1, 2, 4, 6

Los alumnos especializados en las áreas se ven en la siguiente tabla:

Área	Alumnos conocedores
Matemáticas	1, 2, 4
Artes	3, 4
Ingeniería	4, 5, 6

Un alumno con conocimientos en más de un área debe ser asignado exclusivamente a un área. ¿Pueden estar las cuatro sociedades honoríficas representadas en el consejo?

10. *Flujo maximal/minimal en redes con cotas inferiores*. El algoritmo de flujo máximo que se explicó en esta sección supone que todos los arcos tienen cotas inferiores iguales a cero. En algunos modelos las cotas inferiores pueden ser estrictamente positivas, y puede ser interesante determinar el flujo máximo o mínimo en la red (véase el problema integral 6-3). La presencia de la cota inferior agrega una dificultad, porque puede ser que la red no tenga solución factible. El objeto de este ejercicio es demostrar que todo modelo de flujo máximo y mínimo con cotas inferiores positivas se puede resolver en dos pasos.

Paso 1. Determinar una solución inicial factible para la red con cotas inferiores positivas.

Paso 2. Con la solución factible del paso 1, determinar el flujo máximo o mínimo en la red original.[4]

a) Demuestre que se puede representar un arco (i, j) con el flujo limitado por $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ en forma equivalente con un *sumidero* con la demanda l_{ij} en el nodo i y una *fuente* con suministro l_{ij} en el nodo j, con el flujo limitado por $0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$.

b) Demuestre que determinar una solución factible para la red original equivale a determinar el flujo máximo x'_{ij} en la red después de: 1) modificar las cotas de x_{ij} a $0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$, 2) "agrupar" todas las fuentes resultante en una superfuente con capacidades de arcos de salida l_{ij}, 3) "agrupar" todos los sumideros resultados en un supersumidero con capacidades de arcos de entrada l_{ij} y 4) conectar el nodo terminal t con el nodo fuente s en la red original con un arco de capacidad infinita de retorno. Existe una solución factible si el flujo máximo en la nueva red es igual a la suma de las cotas inferiores en la red original. Aplique el procedimiento a la siguiente red y determine una solución factible de flujo:

Arco (i, j)	(l_{ij}, u_{ij})
(1, 2)	(5, 20)
(1, 3)	(0, 15)
(2, 3)	(4, 10)
(2, 4)	(3, 15)
(3, 4)	(0, 20)

c) Use la solución factible de la red obtenida en el punto b), junto con el algoritmo del flujo máximo, para determinar el flujo *mínimo* en la red original. (*Sugerencia:* calcule primero la red residual dada en la solución factible inicial. Después determine el flujo máximo *del nodo final al nodo inicial*. Esto equivale a determinar el flujo máximo que se debe cancelar del nodo inicial al nodo final. Ahora, combinando las soluciones de flujo factible y máximo, se llega al flujo mínimo en la red original.)

d) Use la solución factible obtenida en b) para la red, junto con el modelo de flujo máximo para determinar el flujo máximo en la red original. (*Sugerencia:* como en la parte c), comience con la red residual. A continuación aplique el algoritmo de irrupción a la red residual resultante, exactamente como en el modelo normal de flujo máximo.)

[4] N. del T.: "Maximal" es un "ideal máximo" en matemáticas. En el caso presente es sinónimo de "máximo".

6.4.3 Formulación del problema de flujo máximo con programación lineal

Se define x_{ij} como la cantidad de flujo en el arco (i, j) y sea c_{ij} la capacidad del mismo arco. Se supone que s y t son los nodos inicial y terminal entre los cuales se debe determinar el flujo máximo en la red capacitada (es decir, con sus capacidades).

Las restricciones del problema conservan el flujo de entrada y salida en cada nodo, con excepción de los nodos inicial y terminal. La función objetivo maximiza el flujo total “que sale” del nodo inicial s, o el flujo total “que entra” al nodo terminal t.

Ejemplo 6.4-3

En el modelo de flujo máximo de la figura 6.29 (Ejemplo 6.4-2), $s = 1$ y $t = 5$. La tabla siguiente es un resumen del programa lineal correspondiente con dos funciones objetivo distintas, que dependen de si se maximiza la salida del nodo 1 ($= z_1$) o la entrada al nodo 5 ($= z_2$).

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{43}	x_{45}	
Maximizar $z_1 =$	1	1	1							
Maximizar $z_2 =$					1		1		1	
Nodo 2	1			−1	−1					= 0
Nodo 3		1		1		−1	−1	1		= 0
Nodo 4			1			1		−1	−1	= 0
Capacidad	20	30	10	40	30	10	20	5	20	

La solución óptima, usando cualquiera de las funciones objetivo, es

$$x_{12} = 20,\ x_{13} = 30,\ x_{14} = 10,\ x_{25} = 20,\ x_{34} = 10,\ x_{35} = 20,\ x_{45} = 20$$

El flujo máximo asociado es $z_1 = z_2 = 60$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4C

1. Vuelva a hacer el problema 2, conjunto 6.4b, usando programación lineal.
2. Vuelva a hacer el problema 5, conjunto 6.4b, usando programación lineal.

6.4.4 Solución del problema de flujo máximo con hoja de cálculo Excel

La hoja de cálculo en Excel, basada en la red, que se desarrolló para el modelo de transporte (Sección 5.3.3), se modifica para determinar el flujo máximo en una red capacitada. Esta hoja de cálculo está diseñada para problemas con un máximo de 10 nodos. La figura 6.35 muestra su aplicación al ejemplo 6.4-2 (archivo ch6SolverMaxFlow.xls). La matriz de capacidades de flujo está en las celdas B6:K15.[5] Una celda vacía en la matriz de capacidades indica que el arco correspondiente tiene capacidad infinita. Un elemento cero corresponde a un arco de flujo inexistente. En cualquier otro caso, todos los arcos restantes deben tener capacidades finitas.

Una vez capturados los datos de capacidad de flujo, el resto de la hoja de cálculo (las secciones de *cálculos intermedios* y *solución óptima*) se crean en forma automática. Todo lo que se necesita ahora es actualizar los parámetros de Solver para que coincidan con los datos. La co-

[5]En la figura 6.35 se ocultaron los renglones 11 a 16, y la columna K para ahorrar espacio.

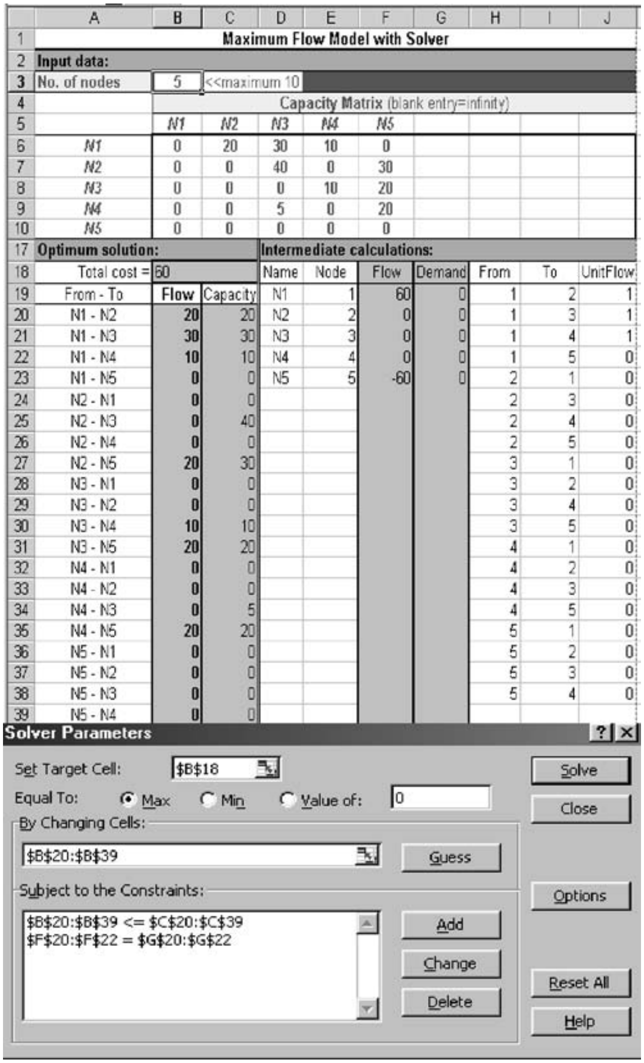


FIGURA 6.35

Solución del modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2, con Solver de Excel

lumna B especifica las celdas que cambian (flujo en arcos) del problema. El intervalo para Changing Cells debe abarcar todos los arcos especificados en la columna A (asegúrese de dar un nombre a cada nodo en la matriz de datos, o la columna A sólo mostrará un guión en las celdas correspondientes). En este ejemplo, las celdas B20:B39 proporcionan el intervalo de Changing Cells. La columna C especifica las capacidades de los arcos de la red (celdas C20:C39).

Las restricciones del modelo representan la ecuación de balance de flujo de cada nodo. La formulación como programa lineal, de la sección 6.4.3, indica que no es necesario formular nuevas ecuaciones de flujo para los nodos primero y último de la red (nodos 1 y 5 de la figura 6.35). Así, las celdas F20:F22 definen al lado izquierdo, y las celdas G20:G22 representan el lado derecho de las ecuaciones de flujo.

Con base en esta información, los parámetros de Solver para el ejemplo de la figura 6.26 se capturan como sigue:

```
Changing Cells: B20:B39
Constraints: B20:B39<=C20:C39   (Capacidad de arcos)
             F20:F22=G20:G22    (Ecuaciones de flujo para los nodos 2, 3 y 4)
```

Nótese que Target Cell se automatiza y no necesita cambiarse. El parámetro Equal to es Max porque se trata de un problema de maximización.

Los resultados de la figura 6.35 muestran la solución (N1-N2 = 20, N1-N3 = 30, N1-N4 = 10, N2-N5 = 20, N3-N4 = 10, N3-N5 = 20, N4-N5 = 20) con un flujo máximo de 60 unidades.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4D

1. Resuelva el problema 2, conjunto 6.4b, usando Solver de Excel.
2. Resuelva el problema 5, conjunto 6.4b, usando Solver de Excel.

6.5 PROBLEMA DEL FLUJO CAPACITADO CON COSTO MÍNIMO

El problema de flujo capacitado con costo mínimo se basa en las hipótesis siguientes:

1. A cada arco se le asocia un costo de flujo unitario (no negativo).
2. Los arcos pueden tener límites inferiores positivos de capacidad.
3. Todo nodo en la red puede funcionar como fuente o como sumidero.

El nuevo modelo determina los flujos en los distintos arcos, que minimizan el costo total y a la vez satisfacen las restricciones de flujo y las cantidades de oferta y demanda en los nodos. Primero representaremos el modelo de red capacitada de flujo y su formulación equivalente en programación lineal. Esta formulación es la base del desarrollo de un algoritmo símplex capacitado especial, para resolver el modelo de flujo en la red. La sección termina con una presentación de una plantilla de hoja de cálculo, de la red capacitada con costo mínimo.

6.5.1 Representación en red

Se tiene una red capacitada $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de los nodos y A es el conjunto de los arcos, y se definen

x_{ij} = cantidad de flujo del nodo i al nodo j

u_{ij} (l_{ij}) = capacidad máxima (mínima) del arco (i, j)

c_{ij} = costo de flujo unitario del nodo i al nodo j

f_i = flujo neto en el nodo i

La figura 6.36 muestra las definiciones en el arco (i, j). La etiqueta $[f_i]$ supone un valor positivo (negativo) cuando hay una oferta o suministro neto (demanda) asociada al nodo i.

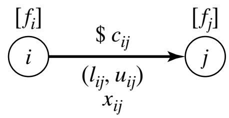


FIGURA 6.36
Arco capacitado con flujo externo

Ejemplo 6.5-1

GrainCo abastece de maíz a tres granjas avícolas desde tres silos. Las cantidades de oferta en los tres silos son 100, 200 y 50 mil bushels (1 bushel = 35.23 litros). GrainCo usa principalmente ferrocarril para transportar su maíz a las granjas, a excepción de tres rutas, en las que se usan camiones.

La figura 6.37 muestra las rutas disponibles entre los silos y las granjas. Los silos se representan con los nodos 1, 2 y 3, cuyas cantidades de suministro son [100], [200] y [50], respectivamente. Las granjas se representan con los nodos 4, 5 y 6, cuyas demandas son [−150], [−80] y [−120], respectivamente. Las rutas permiten transbordos entre los silos. Los arcos (1, 4), (3, 4) y (4, 6) son de camiones, con capacidades mínimas y máximas. Por ejemplo, la capacidad de la ruta (1, 4) es de 50 a 80 mil bushels. En todas las demás rutas se usan furgones, cuya capacidad máxima es prácticamente ilimitada. Los costos de transporte, por bushel, se indican en sus arcos respectivos.

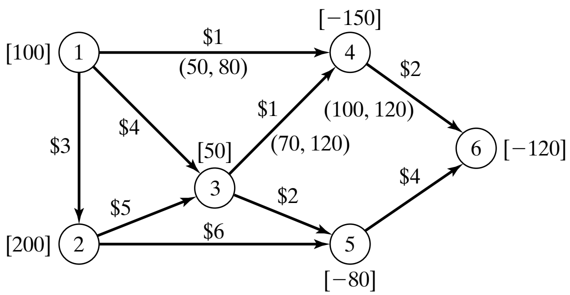


FIGURA 6.37
Red capacitada para el ejemplo 6.5-1

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5A

1. Se fabrica un producto para satisfacer la demanda durante un horizonte de planeación de 4 periodos, de acuerdo con los siguientes datos:

Periodo	Unidades de demanda	Costo unitario de producción ($)	Costo unitario de retención ($)
1	100	24	1
2	110	26	2
3	95	21	1
4	125	24	2

No se permite surtir pedidos atrasados. Represente el problema como modelo de red.

2. En el problema 1, suponga que se permite surtir pedidos atrasados con una penalización de $1.50 por unidad y por periodo. Formule el problema como modelo de red.

3. En el problema 1, suponga que las capacidades de producción para los periodos 1 a 4 son 110, 95, 125 y 100 unidades, respectivamente, y que en ese caso no puede satisfacerse la demanda sin surtir pedidos atrasados. Suponiendo que el costo de penalización por surtir atrasado es $1.50 por unidad y por periodo, formule el problema como modelo de red.

4. Daw Chemical tiene dos plantas que fabrican una sustancia básica para dos clientes, con capacidades de 660 y 800 toneladas por mes. La capacidad de producción mensual de la planta 1 es de 400 a 800 toneladas, y la de la planta 2 es de 450 a 900 toneladas. Los costos de producción en las plantas 1 y 2 son $25 y $28 por tonelada, respectivamente. La materia prima para las plantas procede de dos proveedores, que tienen contrato para embarcar al menos 500 y 700 toneladas mensuales para las plantas 1 y 2, a costos de $200 y $210 por tonelada, respectivamente. Daw Chemical también absorbe el costo de transporte tanto de la materia prima como del compuesto terminado. Los costos de transporte de la materia prima del proveedor 1 a las plantas 1 y 2 son de $10 y $12 por tonelada, los del proveedor 2 son de $9 y $13, respectivamente. Los costos de transporte de la planta 1 a los clientes 1 y 2 son $3 y $4 por tonelada, respectivamente, y de la planta 2, los costos son $5 y $2, respectivamente. Suponiendo que 1 tonelada de materia prima produce 1 tonelada del compuesto final, formule el problema como modelo de red.

5. Se pide a dos escuelas públicas no integradas que equilibren las proporciones raciales de sus alumnos, aceptando los de minoría. La inscripción de minorías debe ser entre 30 y 40% en ambas escuelas. Los alumnos de no minoría viven en dos poblaciones, y los de minoría viven en otras tres poblaciones. Las distancias recorridas, en millas, desde las cinco poblaciones hasta las dos escuelas se ven en la tabla siguiente:

		Distancia del viaje redondo (millas) de la escuela a				
		Áreas de minorías			*Áreas de no minorías*	
Escuela	*Inscripción máxima*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*
1	1500	20	12	10	4	5
2	2000	15	18	8	6	5
Población de alumnos		500	450	300	1000	1000

Formule el problema como modelo de red para determinar la cantidad de alumnos de minoría y de no minoría que se inscriben en cada escuela.

6.5.2 Formulación con programación lineal

La formulación de un modelo de red capacitada como programa lineal es la base del desarrollo del algoritmo símplex capacitado, que presentaremos en la sección siguiente. Al usar la notación descrita en la sección 6.5.1, el programa lineal para la red capacitada es

$$\text{Minimizar } z = \sum_{(i,\, j) \in A}\sum c_{ij}x_{ij}$$

sujeta a

$$\sum_{\substack{k \\ (j,\, k)\in A}} x_{jk} - \sum_{\substack{i \\ (i,\, j)\in A}} x_{ij} = f_j,\ j \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

La ecuación para el nodo j mide el flujo f_j neto en el nodo j como sigue:

$$(\text{Flujo que sale del nodo } j) - (\text{Flujo que entra al nodo } j) = f_j$$

El nodo j funciona como fuente si $f_j > 0$ y como sumidero si $f_j < 0$.

Siempre se puede eliminar la cota inferior l_{ij} de las restricciones, mediante la sustitución

$$x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$$

La nueva variable de flujo, x'_{ij}, tiene un límite superior igual a $u_{ij} - l_{ij}$. Además, el flujo neto en el nodo i se vuelve $f_i - l_{ij}$ y en el nodo j es $f_j + l_{ij}$. La figura 6.38 muestra la transformación de la actividad (i, j) después de que ha salido por sustitución la cota inferior.

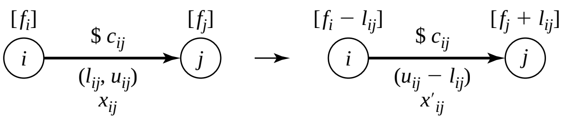


FIGURA 6.38
Eliminación de la cota inferior en los arcos

Ejemplo 6.5-2

Escriba el programa lineal para la red de la figura 6.37, antes y después de eliminar las cotas inferiores por sustitución.

Las restricciones principales del programa lineal relacionan el flujo de entrada y salida en cada nodo, y así se obtiene el siguiente programa lineal:

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}	
Minimizar	3	4	1	5	6	1	2	2	4	
Nodo 1	1	1	1							$= 100$
Nodo 2	-1			1	1					$= 200$
Nodo 3		-1		-1		1	1			$= 50$
Nodo 4			-1			-1		1		$= -150$
Nodo 5					-1		-1		1	$= -80$
Nodo 6								-1	-1	$= -120$
Cotas inferiores	0	0	50	0	0	70	0	100	0	
Cotas superiores	∞	∞	80	∞	∞	120	∞	120	∞	

Observe el arreglo de los coeficientes de las restricciones. La columna asociada con la variable x_{ij} tiene exactamente un $+1$ en el renglón i y un -1 en el renglón j. El resto de los coeficientes es 0. Esta estructura es característica de los modelos de flujo en red.

Las variables con cotas inferiores se sustituyen como sigue:

$$x_{14} = x'_{14} + 50$$

$$x_{34} = x'_{34} + 70$$

$$x_{46} = x'_{46} + 100$$

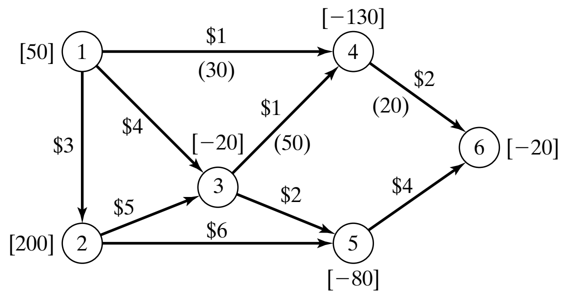
El programa lineal que resulta es

	x_{12}	x_{13}	x'_{14}	x_{23}	x_{25}	x'_{34}	x_{35}	x'_{46}	x_{56}	
Minimizar	3	4	1	5	6	1	2	2	4	
Nodo 1	1	1	1							= 50
Nodo 2	−1			1	1					= 200
Nodo 3		−1		−1		1	1			= −20
Nodo 4			−1			−1		1		= −130
Nodo 5					−1		−1		1	= −80
Nodo 6								−1	−1	= −20
Cotas superiores	∞	∞	30	∞	∞	50	∞	20	∞	

La red correspondiente, después de eliminar por sustitución las cotas inferiores, se ve en la figura 6.39. Observe que la sustitución de la cota inferior se puede hacer en forma directa en la figura 6.37, usando la sustitución de la figura 6.38 y sin necesidad de expresar el problema primero como programa lineal.

FIGURA 6.39

Red del ejemplo 6.5-2 después de eliminar las cotas inferiores por sustitución



Ejemplo 6.5-3 (Programación de empleo)

Este ejemplo ilustra un modelo de red que al principio no satisface el requisito de “flujo en nodo (es decir, que el flujo de salida del nodo menos el flujo de entrada al nodo es igual al flujo neto del nodo), pero que se puede convertir con facilidad a esta forma mediante una manipulación especial de las restricciones del programa lineal.

La agencia de empleo Tempo tiene un contrato para proporcionar trabajadores durante los 4 meses siguientes (de enero a abril) de acuerdo con el calendario siguiente:

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.
Cantidad o número de trabajadores	100	120	80	170

Debido al cambio en la demanda podría ser más económico conservar más trabajadores que los necesarios durante determinado mes. El costo de reclutar y mantener a un trabajador es función de su periodo de empleo, como se ve en la tabla siguiente:

Duración del empleo (meses)	1	2	3	4
Costo por trabajador ($)	100	130	180	220

Sea

x_{ij} = cantidad de trabajadores contratados al *iniciar* el mes i y despedidos al *iniciar* el mes j

Por ejemplo, x_{12} expresa la cantidad de trabajadores contratados en enero sólo durante 1 mes.

Para formular el problema como programa lineal para el periodo de 4 meses, se agrega mayo como mes ficticio (el mes 5) para que x_{45} defina la contratación en abril y para abril. Las restricciones tienen en cuenta que la demanda para el periodo k se pueden satisfacer para toda x_{ij} tal que $i \leq k < j$. Si $s_i \geq 0$, es la cantidad sobrante de trabajadores en el mes i, el programa lineal es

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	s_1	s_2	s_3	s_4	
Minimizar	100	130	180	220	100	130	180	100	130	100					
Ene.	1	1	1	1							−1				=100
Feb.		1	1	1	1	1	1					−1			=120
Mar.			1	1		1	1	1	1				−1		= 80
Abr.				1			1		1	1				−1	=170

El programa lineal anterior no tiene la estructura especial (−1, +1) del modelo de flujo en red (véase el ejemplo 6.5-2). Sin embargo, este programa lineal se puede convertir en un modelo equivalente de red de flujo usando las siguientes manipulaciones aritméticas:

1. En un programa lineal de n ecuaciones, crear una nueva ecuación, la $n + 1$, multiplicando la ecuación n por −1.
2. Dejar sin cambio la ecuación 1.
3. Para $i = 2, 3, ..., n$, reemplazar cada ecuación i con (ecuación i) − (ecuación $i - 1$).

La aplicación de estas manipulaciones al ejemplo de programación de empleo da como resultado el siguiente programa lineal, cuya estructura se ajusta al modelo de flujo en red:

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	s_1	s_2	s_3	s_4	
Minimizar	100	130	180	220	100	130	180	100	130	100					
Ene.	1	1	1	1							−1				= 100
Feb.	−1				1	1	1				1	−1			= 20
Mar.		−1			−1			1	1			1	−1		= −40
Abr.			−1			−1		−1		1			1	−1	= 90
May.				−1			−1		−1	−1				1	=−170

Al usar esta formulación, el modelo de programación de empleo se puede representar, en forma equivalente, por la red de flujo con costo mínimo de la figura 6.40. En realidad, como los arcos no tienen cotas superiores, el problema también se puede resolver como un modelo de transbordo (véase la sección 5.5).

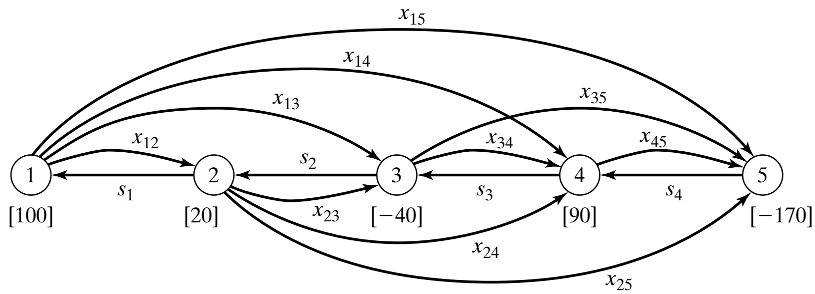


FIGURA 6.40

Representación del problema de programación de empleos como red

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5B

1. Escriba el programa lineal asociado a la red de flujo con costo mínimo de la figura 6.41, antes y después de eliminar las cotas inferiores por sustitución.

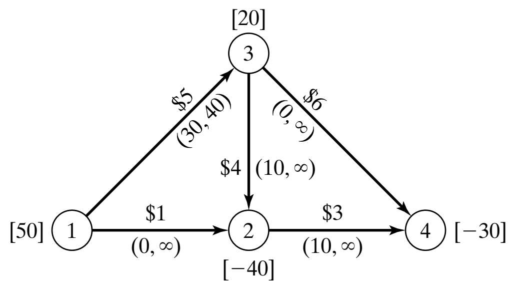


FIGURA 6.41

Red para el problema 1, conjunto 6.5b

2. Por inspección, encuentre una solución factible al modelo de red con costo mínimo del problema de programación de empleo, en el ejemplo 6.5-3 y figura 6.40. Interprete la solución indicando la pauta de contratación y despido que satisfaga la demanda para cada mes, y calcule el costo total asociado.

3. Reformule el modelo de programación de empleo del ejemplo 6.5-3, suponiendo que se debe contratar un trabajador durante un mínimo de 2 meses. Escriba el programa lineal y conviértalo en una red de flujo con costo mínimo.

4. Formule el programa lineal y la red asociada de flujo con costo mínimo para el modelo de programación de empleo del ejemplo 6.5-3 usando los siguientes datos de demanda. Los costos de reclutar y mantener un trabajador durante los periodos 1 a 5 son \$50, \$70, \$85, \$100 y \$130, respectivamente.

a)

Mes	1	2	3	4	5
Cantidad de trabajadores	300	180	90	170	200

b)

Mes	1	2	3	4	5
Cantidad de trabajadores	200	220	300	50	240

5. *Conversión de una red capacitada en una red no capacitada.* Demuestre que un arco ($i \rightarrow j$) con flujo capacitado $x_{ij} \leq u_{ij}$ se puede reemplazar con dos arcos *no capacitados* ($i \rightarrow k$) y ($j \rightarrow k$) con un flujo neto (de salida) de $[-u_{ij}]$ en el nodo k y un flujo adicional (de entrada) de $[+u_{ij}]$ en el nodo j. El resultado es que la red *capacitada* se puede convertir en un modelo de costo de transporte *no capacitado* (Sección 5.1). Aplique la transformación resultante a la red de la figura 6.42, y determine la solución óptima de la red original aplicando TORA al modelo de transporte no capacitado.

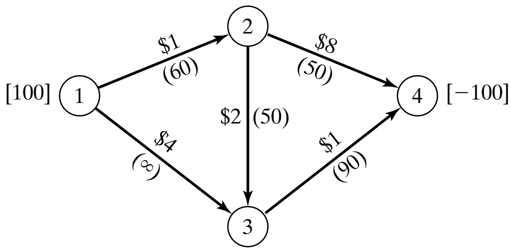


FIGURA 6.42

Red para el problema 5, conjunto 6.5b

6.5.3 Algoritmo símplex de red capacitada

Este algoritmo se basa en los pasos exactos del método símplex normal, pero su objeto es aprovechar la estructura especial en red del modelo de flujo con costo mínimo.

Ya que f_i es el flujo neto en el nodo i, como se definió en el programa lineal de la sección 6.5.2, el algoritmo símplex capacitado estipula que la red debe satisfacer

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$$

La condición indica que toda la oferta en la red es igual a la demanda total. Siempre se puede satisfacer este requisito agregando una fuente o un destino ficticios para balancear, que se conectan con todos los demás nodos de la red con arcos de costo unitario cero y capacidad infinita. Sin embargo, el balanceo de la red no garantiza que haya una solución factible, porque eso depende de las restricciones de capacidades en los arcos.

Ahora presentaremos los pasos del algoritmo capacitado. Es esencial estar familiarizado con el método símplex y la teoría de la dualidad (Capítulos 3 y 4). También ayudará el conocimiento del método símplex con cota superior (Sección 7.3).

Paso 0. Determinar una solución inicial básica factible (conjunto de arcos) para la red. Ir al paso 1.

Paso 1. Determinar un arco (variable) de entrada con la condición de optimalidad del método símplex. Si la solución es óptima, detenerse. En caso contrario ir al paso 2.

Paso 2. Determinar el arco (variable) de salida usando la condición de factibilidad del método símplex. Determinar la nueva solución y continuar en el paso 1.

Una red con n nodos y flujo neto cero (es decir, $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = 0$) consiste en $n - 1$ ecuaciones *independientes* de restricción. Así, una solución básica asociada debe incluir $n - 1$ arcos. Se puede demostrar que una solución básica siempre corresponde a un *árbol de expansión* de la red (véase la sección 6.2).

El arco entrante (paso 1) se determina calculando $z_{ij} - c_{ij}$, los coeficientes objetivo, para todos los arcos no básicos actuales (i, j). Si $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ para todas i y j, la base actual (es decir, la que se tiene en este momento) es óptima. En caso contrario se selecciona el arco no básico con la $z_{ij} - c_{ij}$ más positivo para entrar en la base.

El cálculo de los coeficientes objetivo se basa en la dualidad, exactamente como se hizo con el modelo de transporte (véase la sección 5.3.4). Al aplicar el programa lineal definido en la sección 6.5.2, sea w_i la variable dual asociada con la restricción del nodo i; entonces, el problema dual (excluyendo las cotas superiores) es

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{n} f_i w_i$$

sujeta a

$$w_i - w_j \leq c_{ij}, \ (i, j) \in A$$

$$w_i \text{ de signo no restringido, } i = 1, 2, ..., n$$

Según la teoría de la programación lineal,

$$w_i - w_j = c_{ij}, \text{ para el arco básico } (i, j)$$

Ya que por definición el programa lineal original (Sección 6.5.2) tiene una restricción redundante, se puede asignar un valor arbitrario a una de las variables duales (compárese con el algoritmo de transporte, sección 5.3). Por comodidad se iguala $w_1 = 0$. A continuación se resuelven las ecuaciones (básicas) $w_i - w_j = c_{ij}$ para determinar los valores duales restantes. De acuerdo con en método 2 de la sección 4.2.3, se sabe que el coeficiente objetivo de la x_{ij} no básica es la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de la restricción dual correspondiente al dual; es decir,

$$z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$$

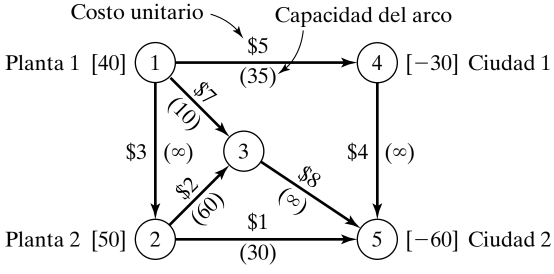
El único detalle que resta es demostrar cómo se determina la variable de salida. Lo haremos con un ejemplo numérico.

Ejemplo 6.5-4

Una red de tuberías conecta dos plantas desaladoras de agua a dos ciudades. Las cantidades diarias de abastecimiento en las dos plantas son 40 y 50 millones de galones, y las demandas diarias en las ciudades 1 y 2 son 30 y 60 millones de galones. Los nodos 1 y 2 representan a las plantas 1 y 2, y los nodos 4 y 5 representan a las ciudades 1 y 2. El nodo 3 es una estación de bombeo entre las plantas y las ciudades. El modelo ya está balanceado, porque la oferta en los nodos 1 y 2 es igual a la demanda en los nodos 4 y 5. La figura 6.43 muestra la red asociada.

FIGURA 6.43

Red para el ejemplo 6.5-4



Iteración 0.

Paso 0. *Determinación de una solución inicial básica factible:* El árbol de expansión *factible* inicial de la figura 6.44 (indicado con arcos de línea llena) se obtiene por inspección. En el caso normal se usa una técnica de variable artificial para llegar a esa solución (véanse los detalles en Bazaraa *et al.*, 1990, págs. 440-446).

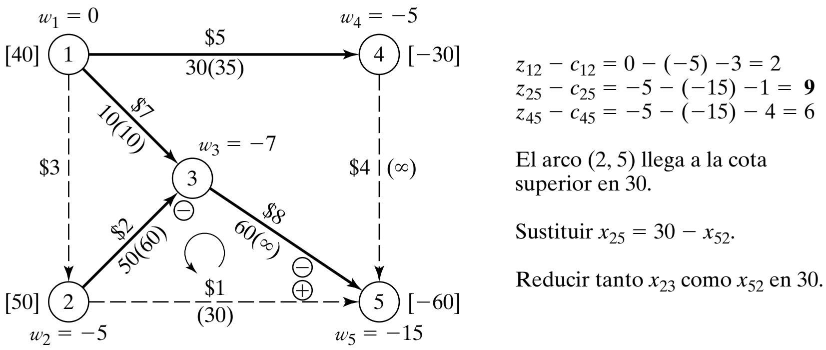


FIGURA 6.44
Red para la iteración 0

En la figura 6.44, la solución básica factible consiste en los arcos (línea llena) (1, 3), (1, 4), (2, 3) y (3, 5), con los flujos *factibles* de 10, 30, 50 y 60 unidades, respectivamente. Esto deja los arcos (línea interrumpida) (1, 2), (2, 5) y (4, 5) para representar a las variables no básicas. La notación $x(c)$ en los arcos indica que se asigna un flujo de x unidades a un arco con capacidad c. Los valores predeterminados para x y c son 0 e ∞, respectivamente.

Iteración 1.

Paso 1. *Determinación del arco entrante:* Se obtienen los valores duales resolviendo las ecuaciones básicas actuales

$$w_1 = 0$$
$$w_i - w_j = c_{ij}, \text{ para } (i, j) \text{ básicas}$$

Así se obtienen

$$\text{Arco } (1, 3): w_1 - w_3 = 7, \text{ por consiguiente } w_3 = -7$$
$$\text{Arco } (1, 4): w_1 - w_4 = 5, \text{ por consiguiente } w_4 = -5$$
$$\text{Arco } (2, 3): w_2 - w_3 = 2, \text{ por consiguiente } w_2 = -5$$
$$\text{Arco } (3, 5): w_3 - w_5 = 8, \text{ por consiguiente } w_5 = -15$$

Ahora se calculan $z_{ij} - c_{ij}$ para las variables no básicas, como sigue:

$$\text{Arco } (1, 2): w_1 - w_2 - c_{12} = 0 - (-5) - 3 = 2$$
$$\text{Arco } (2, 5): w_2 - w_5 - c_{25} = (-5) - (-15) - 1 = 9$$
$$\text{Arco } (4, 5): w_4 - w_5 - c_{45} = (-5) - (-15) - 4 = 6$$

Por lo anterior, el arco (2, 5) entra a la solución básica.

Paso 2. *Determinación del arco saliente:* En la figura 6.44 se ve que el arco (2, 5) forma un bucle con los arcos básicos (2, 3) y (3, 5). *De acuerdo con la definición del árbol de expansión, ya no se puede formar otro bucle*. Como el flujo en el arco nuevo (2, 5) debe aumentar, se ajusta el flujo en los arcos del bucle con una cantidad igual, para mantener la factibilidad de la nueva solución. Para lograrlo se identifica el flujo positivo (+) en el bucle, con la dirección del arco entrante (es decir, de 2 a 5). A continuación se asignan (+) o (−) a los arcos restantes del bucle, dependiendo de si el flujo en cada uno es *en* o *contra* la dirección del flujo del arco entrante. Estas convenciones de signo se muestran en la figura 6.44.

La determinación de la cantidad máxima de flujo en el arco entrante (2, 5) se basa en dos condiciones:

1. El flujo nuevo en los arcos básicos actuales del bucle no puede ser negativo.
2. El flujo nuevo en el arco entrante no puede exceder su capacidad.

La aplicación de la condición 1 indica que los flujos en los arcos (2, 3) y (3, 5) no puede disminuir en más de mín{50, 60} = 50 unidades. La condición 2 estipula que el flujo en el arco (2, 5) puede aumentar cuando mucho hasta la capacidad del arco (= 30 unidades). Entonces, el cambio máximo de flujo en el bucle es mín{30, 50} = 30 unidades. Los nuevos flujos en el bucle son entonces 30 unidades en el arco (2, 5), 50 − 30 = 20 unidades en el arco (2, 3) y 60 − 30 = 30 unidades en el arco (3, 5).

Debido a que ninguno de los arcos básicos actuales sale de la base a nivel cero, el nuevo arco (2, 5) debe permanecer no básico en la cota superior. Sin embargo, para no manejar arcos no básicos que están en el valor de su capacidad (o cota superior) se implementará la sustitución

$$x_{25} = 30 - x_{52},\ 0 \leq x_{52} \leq 30$$

Esta sustitución se hace en las ecuaciones de flujo asociadas con los nodos 2 y 5 como sigue. Se tiene que:

$$\text{Ecuación actual del flujo en el nodo 2: } 50 + x_{12} = x_{23} + x_{25}$$

$$\text{Ecuación actual del flujo en el nodo 5: } x_{25} + x_{35} + x_{45} = 60$$

Entonces, la sustitución $x_{25} = 30 - x_{52}$ da como resultado:

$$\text{Nueva ecuación del flujo en el nodo 2: } 20 + x_{12} + x_{52} = x_{23}$$

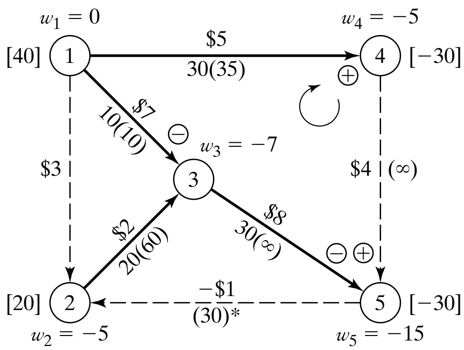
$$\text{Nueva ecuación del flujo en el nodo 5: } x_{35} + x_{45} = x_{52} + 30$$

En la figura 6.45 se ven los resultados de estos cambios. La dirección de flujo en el arco (2, 5) queda invertida ahora a $5 \rightarrow 2$ con $x_{52} = 0$, que era lo que se quería. También la sustitución requiere cambiar el costo unitario del arco (5, 2) a −$1. Indicaremos esta inversión de dirección en la red, etiquetando el arco con un asterisco.

Iteración 2. La figura 6.45 resume los nuevos valores de $z_{ij} - c_{ij}$ (¡compruébelos!) y muestra que el arco (4, 5) entra a la solución básica. También define al bucle asociado con el nuevo arco entrante, y asigna signos a sus arcos.

El flujo en el arco (4, 5) se puede aumentar en la cantidad mínima de

1. El *aumento* máximo permisible en el arco entrante (4, 5) = ∞
2. El *aumento* máximo permisible en el arco (1, 4) = 35 − 30 = 5 unidades



$z_{12} - c_{12} = 0 - (-5) - 3 = 2$
$z_{52} - c_{52} = -15 - (-5) - (-1) = -9$
$z_{45} - c_{45} = -5 - (-15) - 4 = \mathbf{6}$

Entra el arco (4, 5) en el nivel 5.

Sale el arco (1, 4) en la cota superior.

Sustituir $x_{14} = 35 - x_{41}$.

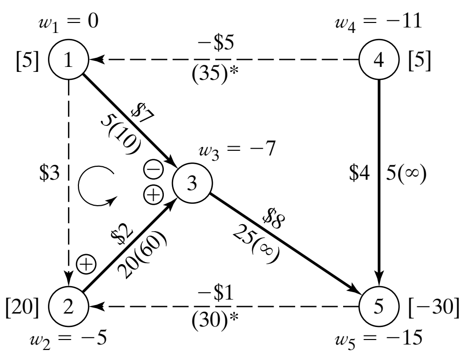
Reducir tanto x_{13} como x_{35} en 5.

FIGURA 6.45
Red para la iteración 1

3. La *disminución* máxima permisible en el arco (1, 3) = 10 unidades
4. La *disminución* máxima permisible en el arco (3, 5) = 30 unidades

Así, el flujo en el arco (4, 5) se puede aumentar a 5 unidades, con lo cual (4, 5) será básico y forzará a que el arco básico (1, 4) sea no básico en su cota superior (= 35).

Al usar la sustitución $x_{14} = 35 - x_{41}$, la red cambia como se ve en la figura 6.46, con los arcos (1, 3), (2, 3), (3, 5) y (4, 5) formando la solución (árbol de expansión) básica. La inversión del flujo en el arco (1, 4) cambia su costo unitario a −$5. También, convénzase el lector de que la sustitución en las ecuaciones de flujo de los nodos 1 y 4 agregara 5 unidades *de entrada* en cada nodo.



$z_{12} - c_{12} = 0 - (-5) - 3 = \mathbf{2}$
$z_{41} - c_{41} = -11 - 0 - (-5) = -6$
$z_{52} - c_{52} = -15 - (-5) - (-1) = -9$

Entra el arco (1, 2) en el nivel 5.

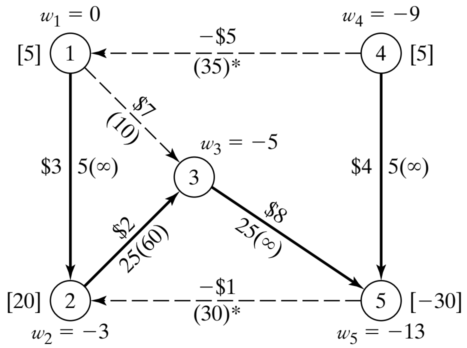
Sale el arco (1, 3) en el nivel 0.

Aumentar 5 a x_{23}.

FIGURA 6.46
Red para la iteración 2

Iteración 3. Los cálculos de las nuevas $z_{ij} - c_{ij}$ para los arcos no básicos (1, 2), (4, 1) y (5, 2) se resumen en la figura 6.46, que muestra que el arco (1, 2) entra al nivel 5 y el arco (1, 3) se vuelve no básico al nivel 0. La nueva solución se ve en la figura 6.47.

Iteración 4. Las nuevas $z_{ij} - c_{ij}$ de la figura 6.47 muestran que la solución es óptima. Los valores de las variables originales se obtienen por sustitución en reversa, como se ve en la figura 6.47.



$z_{13} - c_{13} = 0 - (-5) - 7 = -2$
$z_{41} - c_{41} = -9 - 0 - (-5) = -4$
$z_{52} - c_{52} = -13 - (-3) - (-1) = -9$

Solución óptima:
$x_{12} = 5, x_{13} = 0$
$x_{14} = 35 - 0 = 35$
$x_{23} = 25$
$x_{25} = 30 - 0 = 30$
$x_{35} = 25, x_{45} = 5$
Costo total = $490

FIGURA 6.47
Red para la iteración 3

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5C

1. Resuelva el problema 1, conjunto 6.5a, con el algoritmo símplex capacitado y también demuestre que se puede resolver con el modelo de transbordo.

2. Resuelva el problema 2, conjunto 6.5a, con el algoritmo símplex capacitado y también demuestre que se puede resolver con el modelo de transbordo.

3. Resuelva el problema 3, conjunto 6.5a, con el algoritmo símplex capacitado.

4. Resuelva el problema 4, conjunto 6.5a, con el algoritmo símplex capacitado.

5. Resuelva el problema 5, conjunto 6.5a, con el algoritmo símplex capacitado.

6. Resuelva el problema de programación de empleo del ejemplo 6.5-3 con el algoritmo símplex capacitado.

7. Wyoming Electric usa actualmente unos tubos para transportar lodo de carbón (arrastrado por agua bombeada) desde tres áreas mineras (1, 2 y 3) hasta tres centrales eléctricas (4, 5 y 6). Cada tubo puede transportar cuando mucho 10 toneladas por hora. Los costos de transporte, por tonelada, y la oferta y la demanda por hora se ven en la tabla siguiente.

	4	5	6	Oferta
1	$5	$8	$4	**8**
2	$6	$9	$12	**10**
3	$3	$1	$5	**18**
Demanda	**16**	**6**	**14**	

Determine el programa óptimo de transporte.

8. La red de la figura 6.48 muestra las distancias entre siete ciudades. Use el algoritmo símplex capacitado para determinar la distancia más corta entre los nodos 1 y 7. (*Sugerencia:* suponga que los nodos 1 y 7 tienen flujos netos de [+1] y [−1], respectivamente. Todos los demás nodos tienen flujo cero.)

9. Indique cómo se puede especializar el modelo de flujo con costo mínimo capacitado para que represente el modelo de flujo máximo de la sección 6.4. Aplique la transformación a la red del ejemplo 6.4-2. Por comodidad, suponga que la capacidad de flujo de 4 a 3 es cero. Todos los demás datos quedan sin cambio.

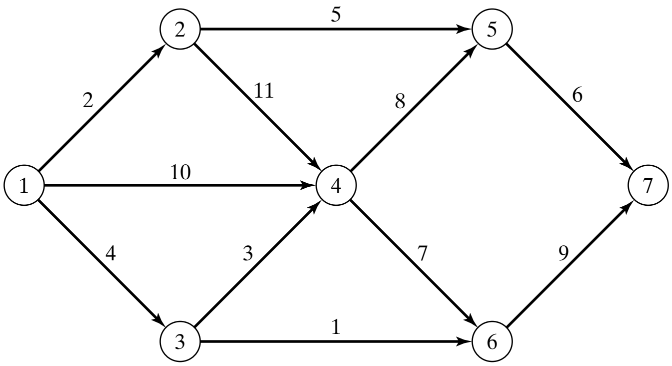


FIGURA 6.48
Red para el problema 8, conjunto 6.5c

6.5.4 Solución del modelo de flujo capacitado con costo mínimo con hoja de cálculo Excel

Como en los casos de los modelos de ruta más corta y de flujo máximo, la hoja de cálculo Excel que se desarrolló para el modelo general de transporte (Sección 5.3.3) se aplica con facilidad al modelo de flujo en red capacitada. La figura 6.49 muestra la aplicación al ejemplo 6.5-4 (archivo ch6SolverMinCostCapacitatedNetwork.xls). La hoja de cálculo está diseñada para redes con 10 nodos como máximo. En la matriz de capacidades (celdas N6:W15),[6] una celda en blanco representa un arco de capacidad infinita. Un arco inexistente se representa con un elemento de capacidad cero. Como ilustración, en el ejemplo 6.5-4, el arco de capacidad infinita 1-2 se representa con un elemento en blanco en la celda O6, y el arco inexistente 3-4 se muestra con un elemento cero en la celda Q8. La matriz de costos unitarios está en las celdas B6:K15. En forma arbitraria se asignaron costos unitarios cero a todos los arcos inexistentes.

Una vez que se crearon las matrices de costos unitarios y de capacidades, el resto de la hoja de cálculo (las secciones *cálculos intermedios* y *solución óptima*) se crea en forma automática, delineando las celdas necesarias para actualizar los parámetros de Solver para Changing Cells y Constraints. Ya está definida Target Cell para cualquier red (con 10 nodos o menos). En forma específica, para el ejemplo 6.5-4 se tiene

```
Changing cells: B20:B39
Constraints: B20:B39<=C20:C39   (Capacidad del arco)
             F19:F23=G19:G23    (Ecuación del flujo en nodo)
```

La figura 6.49 muestra la siguiente solución: N1-N2 = 5, N1-N4 = 35, N2-N3 = 25, N2-N5 = 30, N3-N5 = 25 y N4-N5 = 5. El costo total correspondiente es $490.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5D

1. Resuelva los siguientes problemas, con la hoja de cálculo de la sección 6.5.4:
a) El problema 3, conjunto 6.5c.
b) El problema 4, conjunto 6.5c.

---

[6]En la figura 6.49 se ocultaron los renglones 11 a 15, y la columna K para ahorrar espacio.

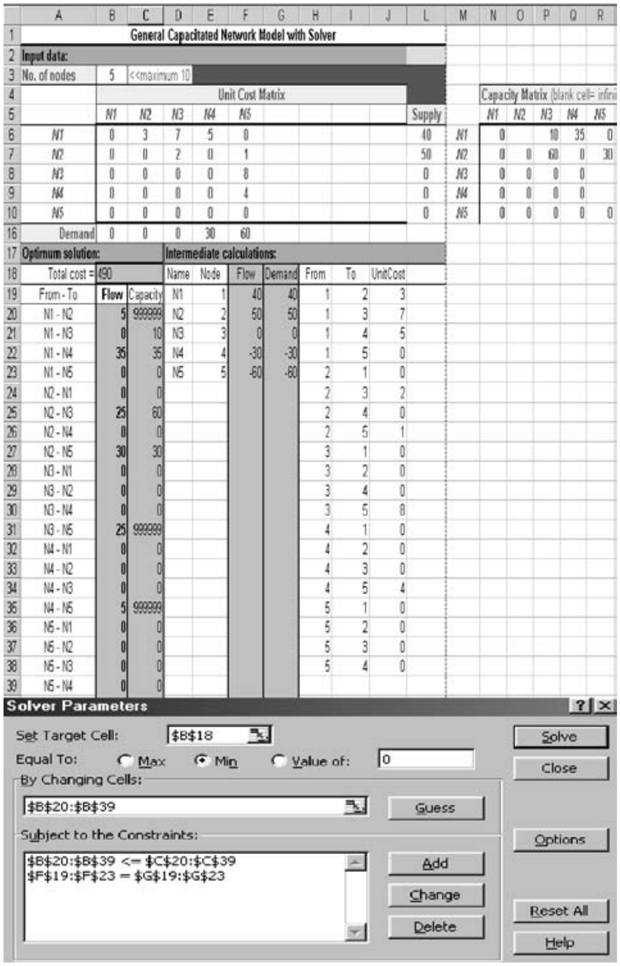


FIGURA 6.49

Solución del ejemplo 6.5-4 con Solver de Excel

c) El problema 7, conjunto 6.5c.

d) El problema 8, conjunto 6.5c.

6.6 MÉTODOS CPM Y PERT

Los métodos CPM (método de la ruta crítica o del camino crítico, *critical path method*) y PERT (técnica de evaluación y revisión de programa, *program evaluation and review technique*) se basan en redes, y tienen por objeto auxiliar en la planeación, programación y control de proyectos. Se define un proyecto como conjunto de actividades interrelacionadas, en la que cada actividad consume tiempo y recursos. El objetivo del CPM y del PERT es contar con un método analítico para programar las actividades. En la figura 6.50 se resumen los pasos de estas técnicas. Primero se definen las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia

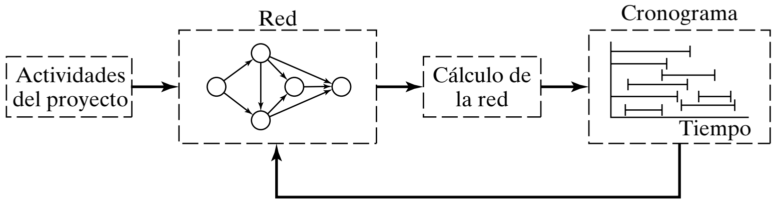


FIGURA 6.50
Fases de planeación de un proyecto con CPM o PERT

y sus necesidades de tiempo. A continuación, el proyecto se traduce en una red que muestre las relaciones de precedencia entre las actividades. El tercer paso implica cálculos específicos de redes, que forman la base del desarrollo del programa del proyecto en función del tiempo.

Durante la ejecución del proyecto, podría no cumplirse el programa que estaba planeado, causando que algunas de las actividades se adelanten o se atrasen. En este caso será necesario actualizar el programa para que refleje la realidad. Ésta es la razón de incluir un bucle, lazo o ciclo de retroalimentación entre la fase de programa y la fase de red, como se ve en la figura 6.50.

Las dos técnicas, CPM y PERT, que se desarrollaron en forma independiente, difieren en que en el CPM se supone duraciones determinísticas de actividad, mientras que en PERT se suponen duraciones probabilísticas. Esta presentación comenzará con el CPM y después se presentarán los detalles del PERT.

6.6.1 Representación en red

Cada actividad del proyecto se representa con un arco que apunta en la dirección de avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades del proyecto.

Para configurar la red se dispone de dos reglas:

Regla 1. *Cada actividad se representa con un arco, y uno sólo.*

Regla 2. *Cada actividad se debe identificar con dos nodos distintos*.

La figura 6.51 muestra cómo se puede usar una actividad ficticia para representar dos actividades concurrentes, *A* y *B*. Por definición, la actividad ficticia, que normalmente se representa con un arco de línea interrumpida, no consume tiempo o recursos. La inserción de una actividad ficticia en una de las cuatro formas que se ven en la figura 6.51, mantiene la concurrencia de *A* y *B*, y también proporciona nodos finales únicos para las dos actividades (para satisfacer la regla 2).

Regla 3. *Para mantener las relaciones de precedencia correctas, se deben contestar las siguientes preguntas cuando se agrega a la red cada actividad:*

a) *¿Qué actividades deben anteceder inmediatamente a la actividad actual?*

b) *¿Qué actividades deben seguir inmediatamente a la actividad actual?*

c) *¿Qué actividades deben efectuarse en forma concurrente o simultánea con la actividad actual?*

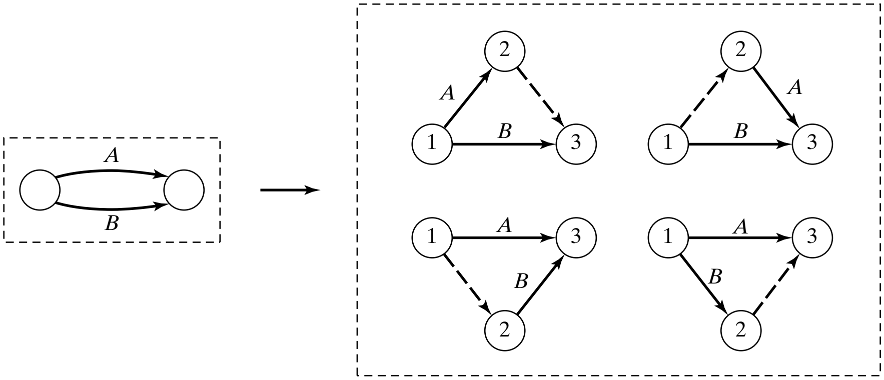


FIGURA 6.51

Uso de una actividad ficticia para tener representación única de las actividades concurrentes *A* y *B*

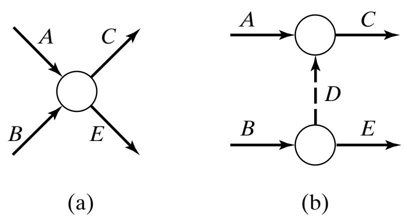
Para contestar estas preguntas se podrá necesitar el uso de actividades ficticias, para asegurar las precedencias correctas entre las actividades. Por ejemplo, considere al siguiente segmento de un proyecto:

1. La actividad *C* comienza de inmediato después de haber terminado *A* y *B*.
2. La actividad *E* se inicia después de que sólo terminó la actividad *B*.

La parte (a) de la figura 6.52 muestra la representación incorrecta de esta relación de precedencia, porque pide que *A* y *B* terminen antes de poder iniciar *E*. En la parte *B* se corrige la situación con el uso de la actividad ficticia.

FIGURA 6.52

Uso de una actividad ficticia para asegurar una relación de precedencia correcta



Ejemplo 6.6-1

Un editor tiene un contrato con un autor, para publicar su libro de texto. Las actividades (simplificadas) relacionadas con la producción del libro se ven a continuación. Formular la red asociada al proyecto.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (semanas)
A: Lectura del manuscrito por el editor	—	3
B: Preparación de páginas muestra por el tipógrafo	—	2
C: Diseño de la portada del libro	—	4
D: Preparación de las figuras del libro	—	3
E: Aprobación por el autor del manuscrito editado y las páginas muestra	*A*, *B*	2

F: Tipografía del libro	*E*	2
G: Revisión por el autor de las páginas tipografiadas	*F*	2
H: Revisión de las figuras por el autor	*D*	1
I: Producción de las placas de impresión	*G, H*	2
J: Producción y encuadernación del libro	*C, I*	4

La figura 6.53 muestra la red que describe las relaciones de precedencia entre las diversas actividades. Con la actividad ficticia (2, 3) se obtienen nodos finales únicos para las actividades concurrentes *A* y *B*. La numeración de los nodos se hace en forma que indique el avance en el proyecto.

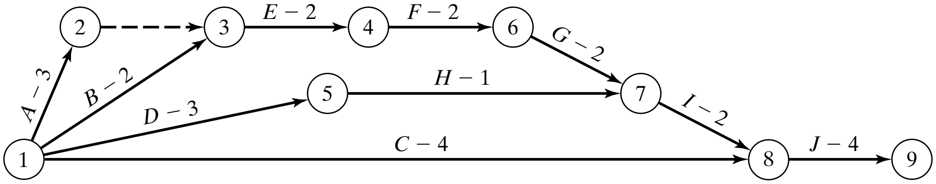


FIGURA 6.53

Red del proyecto para el ejemplo 6.6-1

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.6A

1. Formule la red del proyecto formada por las actividades *A* a *L* con las siguientes relaciones de precedencia:

a) *A*, *B* y *C* son las primeras actividades del proyecto y se pueden ejecutar en forma concurrente.
b) *A* y *B* anteceden a *D*.
c) *B* antecede a *E, F* y *H*.
d) *F* y *C* anteceden a *G*.
e) *E* y *H* anteceden a *I* y *J*.
f) *C, D, F* y *J* anteceden a *K*.
g) *K* antecede a *L*.
h) *I, G* y *L* son las actividades finales del proyecto.

2. Formule la red del proyecto formado por las actividades *A* a *P* que satisfaga las siguientes relaciones de precedencia:

a) *A, B* y *C* son las primeras actividades del proyecto y se pueden efectuar en forma concurrente.
b) *D, E* y *F* siguen de *A*.
c) *I* y *G* siguen tanto a *B* como a *D*.
d) *H* sigue tanto a *C* como a *G*.
e) *K* y *L* siguen a *I*.
f) *J* sigue tanto a *E* como a *H*.
g) *M* y *N* siguen a *F*, pero no pueden comenzar sino hasta que se hayan terminado *E* y *H*.
h) *O* sigue a *M* y a *L*.
i) *P* sigue a *J, L* y *O*.
j) *K, N* y *P* son las actividades finales del proyecto.

3. Las zapatas de cimentación de un edificio se pueden terminar en cuatro secciones conectadas. Las actividades en cada sección comprenden 1) excavación, 2) colocación del acero y 3) colado del concreto. No puede comenzar la excavación de una sección, sino hasta haber terminado la de la sección anterior. Esta misma restricción se aplica al colado del concreto. Formule la red del proyecto.

4. En el problema 3, suponga que se puede iniciar el 10% del trabajo de plomería al mismo tiempo con la excavación de la primera sección. Después de terminar cada sección de los cimientos, se puede iniciar un 5% de plomería, siempre y cuando la parte del 5% anterior se haya terminado. La plomería restante se puede terminar al finalizar el proyecto. Formule la red del proyecto.

5. Una encuesta de opiniones implica diseñar e imprimir cuestionarios, contratación y adiestramiento de personal, selección de los participantes, envío de cuestionarios por correo y análisis de los datos. Formule la red del proyecto, y escriba todas las hipótesis.

6. Las actividades de la tabla siguiente describen la construcción de una casa nueva. Formule la red asociada para el proyecto.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Desmontar el sitio	—	1
B: Llevar servicios al sitio	—	2
C: Excavar	*A*	1
D: Colar los cimientos	*C*	2
E: Plomería exterior	*B*, *C*	6
F: Cimbrar la casa	*D*	10
G: Instalación eléctrica	*F*	3
H: Tender el piso	*G*	1
I: Colar el techo	*F*	1
J: Plomería interior	*E*, *H*	5
K: Tejado	*I*	2
L: Recubrimiento aislante exterior	*F*, *J*	1
M: Instalar ventanas y puertas exteriores	*F*	2
N: Poner ladrillo	*L*, *M*	4
O: Aislar paredes y techo	*G*, *J*	2
P: Aplanado de paredes y techo	*O*	2
Q: Aislar techo	*I*, *P*	1
R: Acabados interiores	*P*	7
S: Acabados exteriores	*I*, *N*	7
T: Acondicionar terreno	*S*	3

7. Una empresa está preparando un presupuesto para el lanzamiento de un producto nuevo. La tabla siguiente muestra las actividades asociadas y sus duraciones. Formule la red del proyecto.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Pronosticar volumen de ventas	—	10
B: Estudiar el mercado de la competencia	—	7
C: Diseñar el artículo y las instalaciones	*A*	5
D: Preparar el programa de producción	*C*	3
E: Estimar el costo de producción	*D*	2
F: Establecer el precio de venta	*B*, *E*	1
G: Preparar el presupuesto	*E*, *F*	14

8. Las actividades para suministrar un servicio de coro se ven en la lista de la siguiente tabla:

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Seleccionar la música	—	2
B: Aprender la música	*A*	14
C: Hacer copias y comprar libros	*A*	14
D: Pruebas	*B*, *C*	3
E: Ensayos	*D*	70
F: Rentar el local	*D*	14
G: Decorar el local	*F*	1
H: Preparar los escenarios	*D*	1
I: Pedir las togas para el coro	*D*	7
J: Revisar el sistema de sonido	*D*	7
K: Seleccionar las pistas musicales	*J*	14
L: Preparar el sistema de sonido	*K*	1
M: Ensayo general	*E*, *G*, *L*	1
N: Fiesta del coro	*H*, *L*, *M*	1
O: Programa final	*I*, *N*	1

9. Para ensanchar un tramo de una carretera local se requiere reubicar 1700 pies de una línea primaria aérea de transmisión eléctrica de 13.8 kV. La siguiente tabla resume las actividades del proyecto. Formule la red de proyecto correspondiente.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Repasar el trabajo	—	1
B: Avisar la interrupción temporal a los clientes	*A*	0.5
C: Solicitar mercancía al almacén	*A*	1
D: Levantamiento del trabajo	*A*	0.5
E: Asegurar postes y material	*C*, *D*	3
F: Distribuir postes	*E*	3.5
G: Coordinación de la ubicación de los postes	*D*	0.5
H: Volver a estacar	*G*	0.5
I: Hacer agujeros	*H*	3
J: Encofrar y colar los postes	*F*, *I*	4
K: Cubrir los conductores anteriores	*F*, *I*	1
L: Tensar los nuevos conductores	*J*, *K*	2
M: Instalar el material restante	*L*	2
N: Colgar conductor	*L*	2
O: Podar árboles	*D*	2
P: Desenergizar e intercambiar las líneas	*B*, *M*, *N*, *O*	0.1
Q: Energizar la nueva línea	*P*	0.5
R: Limpieza	*Q*	1
S: Quitar el conductor anterior	*Q*	1
T: Quitar los postes anteriores	*S*	2
U: Regresar el material a los almacenes	*R*, *T*	2

10. La siguiente tabla muestra las actividades para comprar un auto nuevo. Formule la red del proyecto.

Actividad	Predecesor(es)	Duración (días)
A: Hacer un estudio de factibilidad	—	3
B: Encontrar comprador potencial para este auto	*A*	14
C: Lista de los modelos posibles	*A*	1
D: Investigar todos los modelos posibles	*C*	3
E: Entrevista con el mecánico	*C*	1
F: Recolectar propaganda en las agencias	*C*	2
G: Compilar los datos adecuados	*D, E, F*	1
H: Escoger los tres modelos mejores	*G*	1
I: Conducción de prueba con los tres modelos	*H*	3
J: Pedir datos de garantía y de financiamiento	*H*	2
K: Escoger un vehículo	*I, J*	2
L: Escoger la agencia	*K*	2
M: Investigar el color y las opciones deseadas	*L*	4
N: Prueba de manejo del modelo escogido	*L*	1
O: Comprar el automóvil	*B, M, N*	3

6.6.2 Cálculos para la ruta crítica (CPM)

El resultado final de CPM es la formulación o construcción del programa del proyecto (véase la figura 6.50). Para lograr este objetivo en una forma adecuada, se hacen cálculos especiales con los que se obtiene la siguiente información:

1. Duración total necesaria para terminar el proyecto.
2. Clasificación de las actividades del proyecto en *críticas* y *no críticas*.

Se dice que una actividad es **crítica** si no hay margen en la determinación de sus tiempos de inicio y de término. Una actividad **no crítica** permite alguna holgura en su programación, de modo que el tiempo de inicio de la actividad se puede adelantar o retrasar dentro de ciertos límites, sin afectar la fecha de terminación de todo el proyecto.

Para efectuar los cálculos necesarios, se define un **evento** como un momento en el tiempo en el que se terminan actividades y otras se inician. En términos de redes, un evento corresponde a un nodo. Se define lo siguiente:

$$\square_j = \text{Tiempo más temprano de ocurrencia del evento } j$$

$$\Delta_j = \text{Tiempo más tardío de ocurrencia del evento } j$$

$$D_{ij} = \text{Duración de la actividad } (i, j)$$

Las definiciones de los tiempos más *temprano* y más *tardío* del evento j se especifican en relación con las fechas de inicio y terminación de todo el proyecto.

Los cálculos de ruta crítica implican dos pasos: el **paso hacia adelante** determina los tiempos más *tempranos* o de ocurrencia de los eventos, y el **paso hacia atrás** calcula sus tiempos más tardíos de ocurrencia.

Paso hacia adelante (tiempos más tempranos de ocurrencia o tiempos más próximos, de ocurrencia, $\square$). Los cálculos se inician en el nodo 1 y avanzan en forma recursiva hasta el nodo final n.

Paso inicial. Poner $\square_1 = 0$, para indicar que el proyecto se inicia cuando el tiempo es 0.

Paso general *j*. Dado que los nodos *p*, *q*, ..., y *v* están enlazados *directamente* con el nodo *j* por las actividades de entrada (*p*, *j*), (*q*, *j*), ..., y (*v*, *j*) y que los tiempos más tempranos de ocurrencia de los eventos (nodos) *p*, *q*, ..., y *v* ya se han calculado, entonces se calcula el tiempo más temprano de ocurrencia del evento *j* como sigue:

$$\square_j = \text{máx}\{\square_p + D_{pj}, \square_q + D_{qj}, \ldots, \square_v + D_{vj}\}$$

El paso hacia adelante se termina cuando se calcula $\square_n$ en el nodo *n*. Por definición, $\square_j$ representa la ruta (duración) más larga al nodo *j*.

Paso hacia atrás (tiempos más tardíos de ocurrencia o tiempos más lejanos de ocurrencia, Δ). Después de terminar el paso hacia adelante, los cálculos del paso hacia atrás comienzan en el nodo *n* y terminan en el nodo 1.

Paso inicial. Igualar $\Delta_n = \square_n$ para indicar que las ocurrencias más temprano y más tardío del último nodo en el proyecto son iguales.

Paso general *j*. Dado que los nodos *p*, *q*, ..., y *v* están enlazados en *forma directa* con el nodo *j* por actividades *de salida* (*j*, *p*), (*j*, *q*), ..., y (*j*, *v*), y que ya se calcularon los tiempos más tardíos de los nodos *p*, *q*, ..., y *v*, el tiempo tardío del nodo *j* se calcula como sigue:

$$\Delta_j = \text{mín}\{\Delta_p - D_{jp}, \Delta_q - D_{jq}, \ldots, \Delta_v - D_{jv}\}$$

El paso hacia atrás se termina cuando se calcula Δ_1 en el nodo 1.

Con base en los cálculos anteriores, una actividad (*i*, *j*) será *crítica* si satisface tres condiciones:

1. $\Delta_i = \square_i$
2. $\Delta_j = \square_j$
3. $\Delta_j - \Delta_i = \square_j - \square_i = D_{ij}$

Las tres condiciones indican que los tiempos más tempranos y más tardíos de ocurrencia de los nodos *i* y *j* son iguales, y que la duración D_{ij} se ajusta exactamente al intervalo especificado de tiempo. Una actividad que no satisface las tres condiciones es *no crítica*.

Las actividades críticas de una red deben formar una trayectoria no interrumpida que abarque toda la red, desde el inicio hasta el final.

Ejemplo 6.6-2

Determinar la ruta crítica para la red del proyecto de la figura 6.54. Todas las duraciones están en días.

Paso hacia adelante

Nodo 1. Hacer o definir $\square_1 = 0$

Nodo 2. $\square_2 = \square_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$

Nodo 3. $\square_3 = \text{máx}\{\square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \text{máx}\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$
Nodo 4. $\square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$
Nodo 5. $\square_5 = \text{máx}\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \text{máx}\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$
Nodo 6. $\square_6 = \text{máx}\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\}$
$= \text{máx}\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25$

Los cálculos indican que el proyecto se puede terminar en 25 días.

Paso hacia atrás

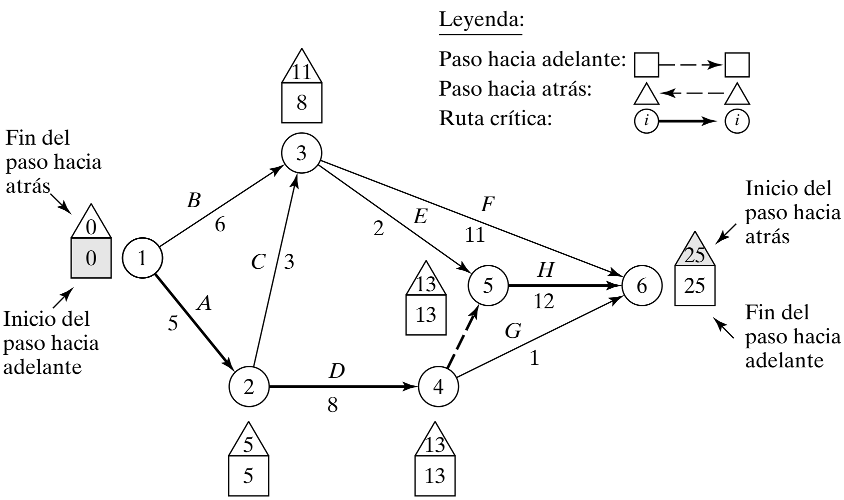
Nodo 6. Hacer $\Delta_6 = \square_6 = 25$
Nodo 5. $\Delta_5 = \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$
Nodo 4. $\Delta_4 = \text{mín}\{\Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45}\} = \text{mín}\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$
Nodo 3. $\Delta_3 = \text{mín}\{\Delta_6 - D_{36}, \Delta_5 - D_{35}\} = \text{mín}\{25 - 11, 13 - 2\} = 11$
Nodo 2. $\Delta_2 = \text{mín}\{\Delta_4 - D_{24}, \Delta_3 - D_{23}\} = \text{mín}\{13 - 8, 11 - 3\} = 5$
Nodo 1. $\Delta_1 = \text{mín}\{\Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_{12}\} = \text{mín}\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$

Si los cálculos fueron correctos, siempre terminarán con $\Delta_1 = 0$.

Los cálculos en los pasos hacia adelante y hacia atrás se resumen en la figura 6.54. Las reglas para determinar las actividades críticas indican que la ruta crítica es $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, que abarca la red desde el inicio (nodo 1) hasta el fin (nodo 6). La suma de las duraciones de las actividades críticas [(1, 2), (2, 4), (4, 5) y (5, 6)] es igual a la duración del proyecto (= 25 días), Observe que la actividad (4, 6) satisface las dos primeras condiciones para que la actividad sea crítica ($\Delta_4 = \square_4 = 13$ y $\Delta_5 = \square_5 = 25$), pero la tercera no ($\square_6 - \square_4 \neq D_{46}$). Por consiguiente, esa actividad no es crítica.

FIGURA 6.54

Cálculos de los pasos hacia adelante y hacia atrás para el proyecto del ejemplo 6.6-2



CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.6B

1. Determine la ruta crítica para la red de proyecto de la figura 6.55.

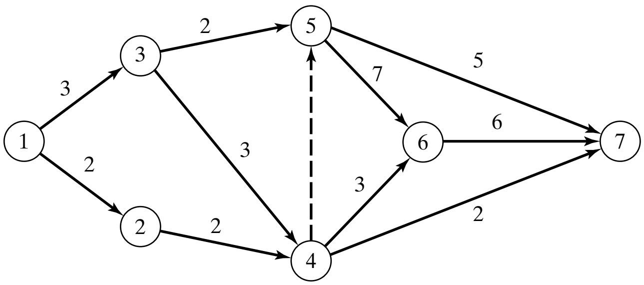
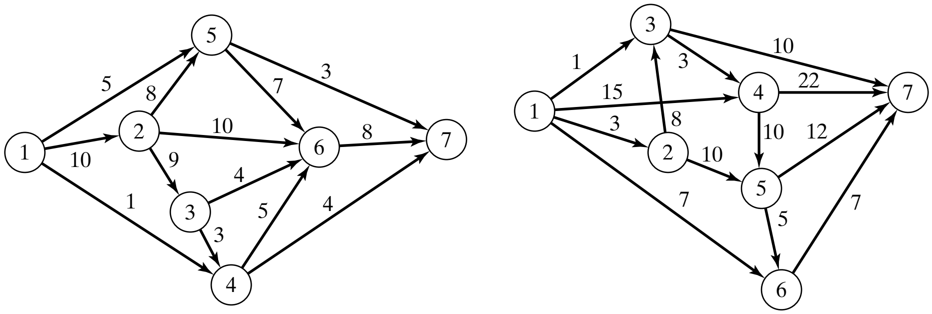


FIGURA 6.55

Red del proyecto para el problema 1, conjunto 6.6b

2. Determine la ruta crítica para la red del proyecto de la figura 6.56.



Proyecto (a) Proyecto (b)

FIGURA 6.56

Red del proyecto para el problema 2, conjunto 6.6b

3. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6, conjunto 6.6a.
4. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 8, conjunto 6.6a.
5. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 9, conjunto 6.6a.
6. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 10, conjunto 6.6a.

6.6.3 Construcción del cronograma

En esta sección se indica cómo se puede usar la información obtenida con los cálculos de la sección 6.6.2 para desarrollar el programa de tiempos, o cronograma. Se reconoce que $\square_i$ representa el *tiempo más temprano de iniciación* de una actividad (i, j), y que Δ_j representa el *tiempo más tardío de terminación*. Esto quiere decir que $(\square_i, \Delta_j)$ limita el intervalo máximo de tiempo durante el cual se puede programar la actividad (i, j).

Construcción de un cronograma preliminar. Se ilustrará con un ejemplo el método para construir un cronograma preliminar.

Ejemplo 6.6-3

Determinar el cronograma para el proyecto del ejemplo 6.6-2 (Figura 6.54).

Se puede tener un cronograma preliminar para las distintas actividades del proyecto poniendo sus intervalos de tiempo respectivos como se ve en la figura 6.57. Es necesario hacer dos observaciones.

1. Las actividades críticas (representadas por las líneas llenas) se deben programar una inmediatamente después de la otra, para asegurar que el proyecto se termine en la duración especificada de 25 días.
2. Las actividades no críticas (representadas por líneas interrumpidas) abarcan intervalos que tienen duraciones mayores y que por tanto permiten holguras en su programación dentro de sus intervalos asignados.

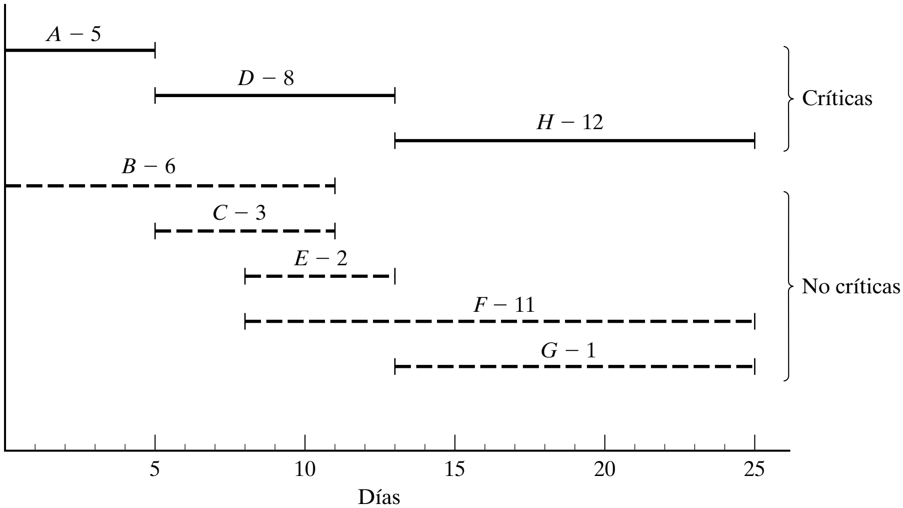


FIGURA 6.57

Programa preliminar para el proyecto del ejemplo 6.6-2

¿Cómo se deben programar las actividades no críticas dentro de sus intervalos respectivos? En el caso normal es preferible comenzar toda actividad no crítica lo más temprano posible. De este modo quedarán periodos de holgura en el momento oportuno al final del intervalo asignado, que se pueden usar para absorber demoras inesperadas en la ejecución de la actividad. Sin embargo, podrá ser necesario demorar el inicio de una actividad no crítica, después de su tiempo temprano. Por ejemplo, en la figura 6.57 suponga que cada una de las actividades no críticas *E* y *F* requiere de una conformadora, y que sólo se dispone de una. Si se programan *E* y *F* lo más temprano posible se requerirán dos conformadoras entre los tiempos 8 y 10. Se puede eliminar el traslape comenzando *E* en el tiempo 8 y demorando el tiempo de inicio de *F* hasta cierto momento entre los tiempos 10 y 14.

Si se pueden programar todas las actividades no críticas lo más temprano posible, el programa resultante es factible, automáticamente. En caso contrario, se pueden violar algunas relaciones de precedencia si se demoran actividades no críticas después de su tiempo temprano. Es el caso, por ejemplo, de las actividades *C* y *E* en la figura 6.57. En la red del proyecto (Figura 6.54), aunque se debe terminar *C* antes que *E*, los intervalos de *C* y *E* en la figura 6.57 permiten progra-

mar a C entre los tiempos 6 y 9, y a E entre los tiempos 8 y 10. Sin embargo, esos intervalos no aseguran que C anteceda a E. Hay una necesidad de "bandera roja" que indique en forma automática un conflicto en el programa. Esta información se obtiene calculando las *flotaciones* u *holguras* para las actividades no críticas.

Determinación de las holguras. Son las holguras de tiempo disponibles dentro del intervalo asignado para la actividad no crítica. Las dos más comunes son la **holgura total** y la **holgura libre**.

En la figura 6.58 se ve un resumen adecuado para calcular la holgura total (TF_{ij}) y la holgura libre (FF_{ij}) de la actividad (i, j). La holgura total es el exceso del intervalo de tiempo definido por el *tiempo más temprano* de ocurrencia del evento i hasta el *tiempo más tardío* de ocurrencia del evento j en la duración de (i, j); esto es,

$$TF_{ij} = \Delta_j - \square_i - D_{ij}$$

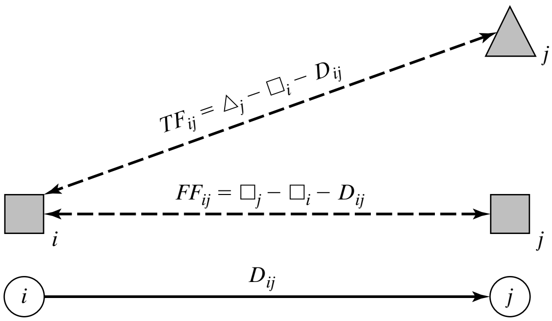


FIGURA 6.58
Cálculo de las holguras totales y libres

La holgura libre es el exceso del intervalo de tiempo definido desde el *tiempo más temprano* de ocurrencia del evento i hasta el *tiempo más temprano* de ocurrencia del elemento j durante la duración de (i, j), esto es

$$FF_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$$

Por definición, $FF_{ij} \leq TF_{ij}$.

Regla de la bandera roja. *Para una actividad (i, j) no crítica:*

a) *Si $FF_{ij} = TF_{ij}$, entonces se puede programar la actividad en cualquier lugar dentro de su intervalo ($\square_i$, Δ_j) sin causar conflicto con el programa.*

b) *Si $FF_{ij} < TF_{ij}$, entonces el inicio de la actividad (i, j) se puede demorar cuando mucho hasta FF_{ij} a partir de su tiempo más temprano de inicio ($\square_i$) sin causar conflicto con el programa. Toda demora mayor que FF_{ij} (pero no mayor que TF_{ij}) se debe acompañar por una demora igual a partir de $\square_j$ en el tiempo de iniciación de todas las actividades que salen del nodo j.*

La implicación de la regla es que una actividad (i, j) no crítica tendrá bandera roja si su $FF_{ij} < TF_{ij}$. Esta bandera roja sólo importa si se decide demorar el inicio de la actividad respecto a su tiempo temprano de inicio, $\square_i$, en cuyo caso se debe poner atención a los tiempos de inicio de las actividades que salen del nodo j, para evitar conflictos en el programa.

Ejemplo 6.6-4

Calcular las holguras de las actividades no críticas de la red en el ejemplo 6.6-2, y describir su uso en la finalización de un cronograma para el proyecto.

La tabla siguiente resume los cálculos de las holguras totales y libres. Conviene más hacer los cálculos en forma directa sobre la red, usando el procedimiento de la figura 6.54.

Actividad no crítica	Duración	Holgura total (*TF*)	Holgura libre (*FF*)
$B(1, 3)$	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$
$C(2, 3)$	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$
$E(3, 5)$	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$
$F(3, 6)$	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$
$G(4, 6)$	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$

Los cálculos ponen bandera roja en las actividades B y C, porque sus $FF < TF$. Las actividades restantes (E, F y G) tienen $FF = TF$, por lo que se pueden programar en cualquier momento entre su inicio más temprano y su terminación más tardía.

Para investigar la importancia de las actividades con bandera roja, veamos la actividad B. Como su $TF = 5$ días, esta actividad puede iniciarse ya desde el tiempo 0, o cuando mucho en el tiempo 5 (Figura 6.57). Sin embargo, como su $FF = 2$ días, si se inicia B en algún momento entre el tiempo 0 y el tiempo 2 no tendrá efecto sobre las actividades posteriores E y F. Sin embargo, si la actividad B debe iniciarse en el tiempo $2 + d$ (< 5), entonces los tiempos de inicio de las actividades inmediatas siguientes E y F deben correrse respecto a su tiempo más temprano de inicio ($= 8$), cuando menos d unidades de tiempo. De esta manera se conserva la relación de precedencia entre B y sus siguientes E y F.

En cuanto a la actividad C con bandera roja, se ve que su $FF = 0$. Eso quiere decir que *cualquier* demora en el inicio de C después de su tiempo más temprano de inicio ($= 5$) se debe acoplar con una demora al menos igual en el inicio de sus actividades posteriores E y F.

TORA tiene poderosas herramientas tutoriales para cálculos de ruta crítica y para formular el cronograma. Para usarlas, seleccione `Project Planning` ⇒ `CPM-Critical Path Method` (planeación de proyecto/método de la ruta crítica) en el `Main Menu` (menú principal).* Para producir cálculos paso por paso para el paso hacia adelante, el paso hacia atrás y las holguras, o bien `CPM Bar Chart` (diagrama de barras de ruta crítica) para formular y experimentar con un cronograma.

La figura 6.59 muestra los resultados de TORA para los cálculos de ruta crítica del ejemplo 6.6-2 (archivo ch6ToraCPMEx6-6-2.xls). Si el lector quiere generar los resultados con la opción `Next Step` (siguiente paso), TORA lo guía en los detalles de los cálculos para los pasos hacia adelante y hacia atrás.

La figura 6.60 muestra el programa de TORA, obtenido con la opción `CPM Bar Chart` para el proyecto del ejemplo 6.6-2. El diagrama de barras predetermina el cronograma en forma automática todas las actividades no críticas lo más pronto posible. Puede usted estudiar el impacto de demorar el tiempo de inicio de una actividad no crítico, usando las listas desplegables, que se explican por sí solas, dentro del cuadro inferior izquierdo de la pantalla. El impacto de una demora de una actividad no crítica se verá en forma directa en el cronograma, junto con una explicación. Por ejemplo, si se demora más de 2 unidades de tiempo el inicio de la actividad B, las

*Para ver los resultados en pantalla, seleccione CPM-CALCULATIONS (cálculo de CPM).

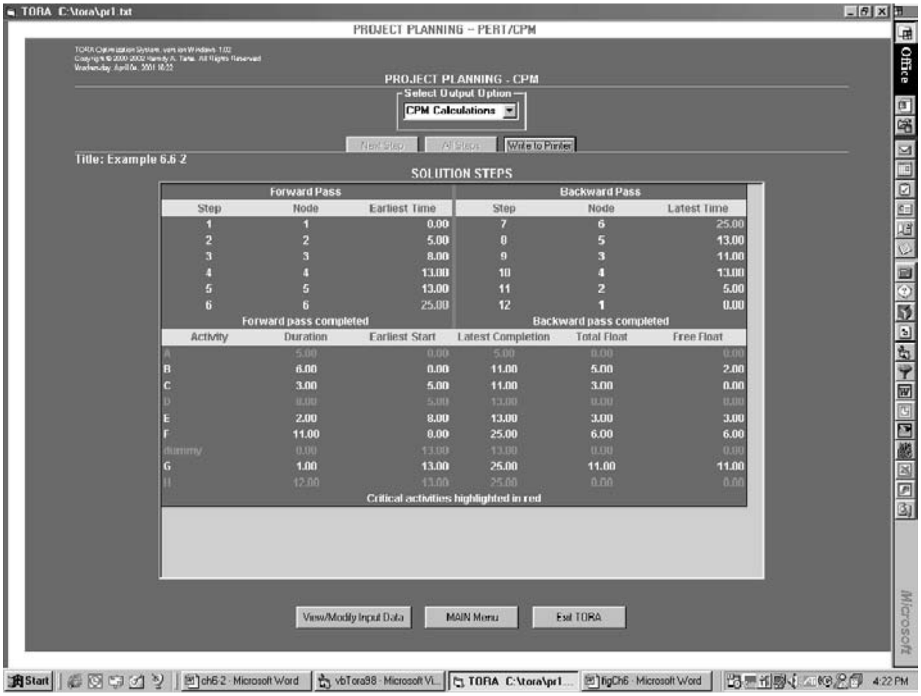


FIGURA 6.59

Cálculos de ruta crítica, paso a paso con TORA: paso hacia adelante, paso hacia atrás y holguras para el ejemplo 6.6-2

actividades posteriores *E* y *F* se demorarán una cantidad igual a la diferencia entre la demora y la holgura libre de la actividad *B*. En forma específica, dado que la holgura libre para *B* es 2 unidades de tiempo, si *B* se demora 3 unidades de tiempo, habrá que demorar *E* y *F* cuando menos en $3 - 2 = 1$ unidad de tiempo. Este caso se demuestra en la figura 6.60.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.6C

1. Dada una actividad (i, j) con duración D_{ij}, tiempo más temprano de inicio $\square_i$ y su tiempo más tardío de terminación Δ_j, determine los tiempos más temprano de terminación y tardío de inicio de (i, j).
2. ¿Cuáles son las holguras total y libre de una actividad crítica?
3. Para cada una de las actividades siguientes, determine la máxima demora en el tiempo de inicio, respecto a su tiempo más temprano de inicio, que permita que todas las actividades inmediatas posteriores se programen en cualquier momento dentro de sus tiempos más temprano y más tardío de terminación.
   a) $TF = 10,\ FF = 10,\ D = 4$
   b) $TF = 10,\ FF = 5,\ D = 4$
   c) $TF = 10,\ FF = 0,\ D = 4$
4. En el ejemplo 6.6-4 use las holguras para contestar lo siguiente:
   a) Suponga que la actividad *B* se inicia en el tiempo 1, y que la actividad *C* se inicia en el tiempo 5. Determine los tiempos más tempranos de inicio de *E* y *F*.

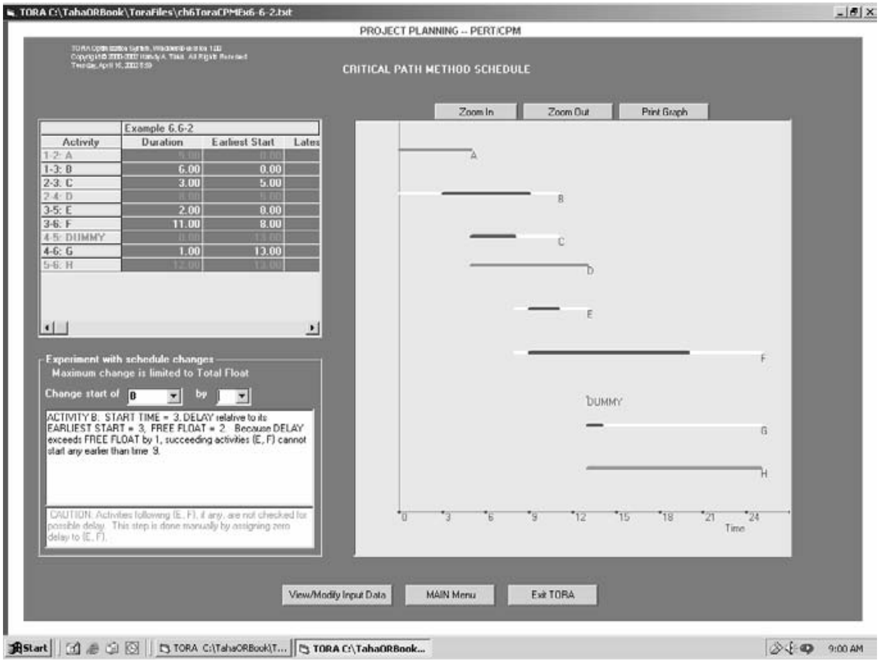


FIGURA 6.60

Cronograma para el ejemplo 6.6-2 obtenido con TORA

- **b)** Suponga que la actividad *B* se inicia en el tiempo 3, y que la actividad *C* se inicia en el tiempo 7. Determine los tiempos más tempranos de inicio para *E* y *F*.
- **c)** Si la actividad *B* se inicia en el tiempo 6, ¿qué efecto tendrá sobre otras actividades del proyecto?

5. En el proyecto del ejemplo 6.6-2 (Figura 6.54) suponga que las duraciones de las actividades *B* y *F* cambian de 6 a 11 días, y de 20 a 25 días, respectivamente.

- **a)** Determine la ruta crítica.
- **b)** Determine las holguras libre y total para la red, e identifique las actividades con bandera roja.
- **c)** Suponga que la actividad *A* se inicia en el tiempo 5. Determine los tiempos más tempranos de inicio de las actividades *C, D, E* y *G*.
- **d)** Suponga que las actividades *F, G* y *H* requieren el mismo equipo. Determine la cantidad mínima de unidades necesarias de este equipo.

6. Calcule las holguras e identifique las actividades con bandera roja para los proyectos (a) y (b) de la figura 6.56, y a continuación trace los cronogramas bajo las siguientes condiciones:

Proyecto (a)

- **i)** La actividad (1, 5) no puede iniciarse antes del tiempo 14.
- **ii)** Las actividades (5, 6) y (5, 7) usan el mismo equipo, del cual sólo hay disponible una unidad.
- **iii)** Todas las demás actividades se inician lo antes posible.

Proyecto (b)

i) La actividad (1, 3) se debe programar en su fecha más temprana de inicio, tomando en cuenta el requisito de que (1, 2), (1, 3) y (1, 6) usan equipo especial, del cual sólo se dispone de 1 unidad.

ii) Todas las demás actividades comienzan lo más pronto posible.

6.6.4 Formulación del método de la ruta crítica con programación lineal

Se puede concebir un problema de ruta crítica como lo contrario del problema de ruta más corta (Sección 6.3), en el sentido de que interesa determinar la ruta *más larga* desde el inicio hasta el fin. En consecuencia se puede aplicar la formulación como programa lineal de ruta más corta, en la sección 6.3.3, a la ruta crítica, como sigue. Supondremos que un flujo unitario entra a la red en el nodo de inicio y sale en el nodo final. Se definen,

$$x_{ij} = \text{Cantidad de flujo en la actividad } (i, j) \text{ para toda } i \text{ y } j \text{ definida}$$

$$D_{ij} = \text{Duración de la actividad } (i, j) \text{ para toda } i \text{ y } j \text{ definida}$$

Así, la función objetivo del programa lineal se transforma en

$$\text{Maximizar } z = \sum_{\text{todas las actividades definidas } (i,\, j)} D_{ij} x_{ij}$$

(Compárese con la formulación del programa lineal de ruta más corta en la sección 6.3.3, donde se minimiza la función objetivo.) Hay una restricción que representa la conservación del flujo en cada nodo; esto es, para todo nodo j,

$$\text{Flujo total que entra} = \text{Flujo total que sale}$$

Naturalmente, todas las variables x_{ij} son no negativas. Observe que una de las restricciones es redundante.

De nuevo, como en el problema de ruta más corta, se puede usar el dual del programa lineal para resolver el problema CPM (de ruta crítica). El ejemplo que sigue aplica las dos formulaciones al proyecto del ejemplo 6.6-2.

Ejemplo 6.6-5

La formulación en programación lineal del ejemplo 6.6-2 (Figura 6.54) se ve abajo. Nótese que los nodos 1 y 6 son los de inicio y de término, respectivamente.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Ficticia	G	*H*	
	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	
Maximizar $z =$	5	6	3	8	2	11	0	1	12	
Nodo 1	−1	−1								$= -1$
Nodo 2	1		−1	−1						$= 0$
Nodo 3		1	1		−1	−1				$= 0$
Nodo 4				1			−1	−1		$= 0$
Nodo 5					1		1		−1	$= 0$
Nodo 6						1		1	1	$= 1$

TORA obtiene la siguiente solución óptima:

$$z = 25,\ x_{12}(A) = 1,\ x_{24}(D) = 1,\ x_{45}\,(\text{ficticia}) = 1,\ x_{56}(H) = 1;\ \text{todas las demás} = 0$$

La solución define la ruta crítica como $A \rightarrow D \rightarrow$ Ficticia $\rightarrow H$, y la duración del proyecto es 25 días.

El problema dual del programa lineal anterior es:

$$\text{Minimizar } w = y_6 - y_1$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
y_2 - y_1 &\geq 5 && (A)\\
y_3 - y_1 &\geq 6 && (B)\\
y_3 - y_2 &\geq 3 && (C)\\
y_4 - y_2 &\geq 8 && (D)\\
y_5 - y_3 &\geq 2 && (E)\\
y_6 - y_3 &\geq 11 && (F)\\
y_5 - y_4 &\geq 0 && (\text{Ficticia})\\
y_6 - y_4 &\geq 1 && (G)\\
y_6 - y_5 &\geq 12 && (H)
\end{aligned}
$$

$$\text{todas las } y_i \text{ no restringidas}$$

La formulación dual, aunque puramente matemática, revela una definición interesante de las variables duales, que es consistente con las relaciones de precedencia de la red de ruta crítica. En forma específica, veamos la siguiente definición:

$$y_j = \text{Tiempo de ocurrencia del nodo } j$$

En este caso, $w = y_6 - y_1$ representa la duración del proyecto. Cada restricción se asocia a una actividad, y especifica las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades. Por ejemplo, $y_2 - y_1 \geq 5$ equivale a $y_2 \geq y_1 + 5$, lo que indica que y_2, el tiempo temprano del nodo 2 no puede ser anterior al tiempo $y_1 + 5$. Al minimizar la función objetivo se obtiene el intervalo menor de tiempo en el que se satisfacen todas las relaciones de precedencia. También obsérvese que con el (nuevo) significado práctico que se usó para describir las variables duales, se pueden restringir esas variables a valores no negativos. De hecho, el tiempo de inicio y_1 del proyecto se puede igualar a cero, en cuyo caso la función objetivo se reduce a minimizar $w = y_6$. Igualar $y_1 = 0$ también es consistente con el hecho que una de las restricciones primales es redundante.

De acuerdo con la restricción de no negatividad, la solución dual óptima, obtenida con TORA, es

$$w = 25,\ y_1 = 0,\ y_2 = 5,\ y_3 = 11,\ y_4 = 13,\ y_5 = 13,\ y_6 = 25$$

La solución indica que la duración del proyecto es $w = 25$ días.

Las actividades críticas corresponden a las restricciones que se satisfacen como ecuaciones estrictas con la solución dada; son $A \rightarrow D \rightarrow$ Ficticia $\rightarrow H$. Esas restricciones se identifican por sus variables excedentes cero, o teniendo en cuenta que si se satisface una restricción en forma de ecuación, en la solución, entonces su valor dual asociado debe ser positivo. En

realidad, al aparear las restricciones con su solución dual asociada (determinada con TORA), se obtiene:

Restricción	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Ficticia	*G*	*H*
Valor dual asociado	1	0	0	1	0	0	1	0	1

La conclusión es que la ruta crítica es $A \rightarrow D \rightarrow$ Ficticia $\rightarrow H$. Obsérvese que los valores duales *positivos* siempre serán iguales a 1, porque una demora de un día en cualquier actividad crítica aumentará un día la duración del proyecto (recuérdese que la variable dual se interpreta como el valor por unidad de un recurso; véase la sección 4.3.1).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.6D

1. Use programación lineal para determinar la ruta crítica para la red del proyecto en la figura 6.55.
2. Use programación lineal para determinar la ruta crítica para las redes de proyecto en la figura 6.56.

6.6.5 Redes de PERT

El PERT difiere del CPM en que basa la duración de una actividad en tres estimaciones:

1. **Tiempo optimista** a, donde se supone que la ejecución va extremadamente bien.
2. **Tiempo más probable** m, donde se supone que la ejecución se hace bajo condiciones normales.
3. **Tiempo pesimista** b, donde se supone que la ejecución va extremadamente mal.

Se supone que el intervalo (a, b) abarca todas las estimaciones posibles de la duración de una actividad. Por consiguiente, el estimado m debe estar en algún lugar dentro del intervalo (a, b). Con base en los estimados (o estimaciones), el tiempo promedio de duración $\overline{D}$, y la varianza v, se calculan como sigue:

$$\overline{D} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

Los cálculos de ruta crítica (CPM) que se describieron en las secciones 6.6.2 y 6.6.3 se pueden aplicar en forma directa, sustituyendo la estimación única D por $\overline{D}$.

Ahora es posible estimar la probabilidad de que un nodo j en la red suceda en un tiempo programado especificado con anterioridad, S_j. Sea e_j el tiempo más temprano de ocurrencia del nodo j. Como las duraciones de las actividades que van del nodo de inicio al nodo j son variables aleatorias, e_j también debe ser una variable aleatoria. Suponiendo que todas las actividades en la red sean estadísticamente independientes, se puede determinar la media, $E\{e_j\}$ y la varianza, $\text{var}\{e_j\}$ como sigue. Si sólo hay una ruta desde el nodo de inicio hasta el nodo j, la media es la suma de las duraciones esperadas $\overline{D}$, para todas las actividades a lo largo de esa ruta, y la varianza es la suma de las varianzas v de las mismas actividades. Por otra parte, si

hay más de una ruta que llegue al nodo j, será necesario calcular primero la distribución estadística de la duración de la ruta más larga, antes de calcular la media y la varianza correctas. Este problema es bastante difícil, porque equivale a determinar la distribución del máximo de varias variables aleatorias. Por consiguiente, una hipótesis simplificadora es calcular la media y la varianza, $E\{e_j\}$ y $\text{var}\{e_j\}$, como el de la ruta al nodo j que tenga la suma mayor de duraciones *esperadas* de las actividades. Si hay dos o más rutas que tienen la misma media (o promedio), se selecciona la que tenga la varianza mayor, porque refleja la máxima incertidumbre y en consecuencia conduce a un estimado más conservador de las probabilidades.

Una vez calculados la media y la varianza $E\{e_j\}$ y $\text{var}\{e_j\}$ de la ruta al nodo j, la probabilidad que se realice el nodo j en un tiempo S_j preestablecido, se calcula con la siguiente fórmula:

$$P\{e_j \leq S_j\} = P\left\{\frac{e_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}} \leq \frac{S_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}}\right\} = P\{z \leq K_j\}$$

en donde

$$z = \text{Variable aleatoria normal estándar}$$

$$K_j = \frac{S_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}}$$

La variable aleatoria normal estándar z tiene media 0 y desviación estándar 1 (véase el apéndice C). La justificación para usar la distribución normal es que e_j es la suma de variables aleatorias independientes. De acuerdo con el *teorema del límite central* (o *ley de la distribución de los errores*; véase la sección 12.5.4), e_j está distribuida normalmente, en forma aproximada.

Ejemplo 6.6-6

Se tiene el proyecto del ejemplo 6.6-2. Para evitar repetir los cálculos de ruta crítica, se seleccionaron los valores de a, m y b en la tabla siguiente, de tal modo que $\overline{D}_{ij} = D_{ij}$ para toda i y j en el ejemplo 6.6-2.

Actividad	*i-j*	(*a*, *m*, *b*)	Actividad	*i-j*	(*a*, *m*, *b*)
A	1-2	(3, 5, 7)	*E*	3-5	(1, 2, 3)
B	1-3	(4, 6, 8)	*F*	3-6	(9, 11, 13)
C	2-3	(1, 3, 5)	*G*	4-6	(1, 1, 1)
D	2-4	(5, 8, 11)	*H*	5-6	(10, 12, 14)

La media $\overline{D}_{ij}$ y la varianza V_{ij} de las distintas actividades se ve en la tabla de abajo. Observe que para una actividad ficticia $(a, b, m) = (0, 0, 0)$, y en consecuencia su media y varianza también son iguales a cero.

Actividad	*i-j*	$\overline{D}_{ij}$	V_{ij}	Actividad	*i-j*	$\overline{D}_{ij}$	V_{ij}
A	1-2	5	0.444	*E*	3-5	2	0.111
B	1-3	6	0.444	*F*	3-6	11	0.444
C	2-3	3	0.444	*G*	4-6	1	0.000
D	2-4	8	1.000	*H*	5-6	12	0.444

La tabla siguiente muestra la trayectoria más larga del nodo 1 a los distintos nodos, junto con su media y varianza asociados.

Nodo	Ruta más larga basada en duraciones medias	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta
2	1-2	5.00	0.67
3	1-2-3	8.00	0.94
4	1-2-4	13.00	1.20
5	1-2-4-5	13.00	1.20
6	1-2-4-5-6	25.00	1.37

Por último, en la tabla siguiente se calcula la probabilidad de que cada nodo se realice en un tiempo S_j preestablecido, especificado por el analista.

Nodo j	Ruta más larga	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta	S_j	K_j	$P\{z \leq K_j\}$
2	1-2	5.00	0.67	5.00	0	.5000
3	1-2-3	8.00	0.94	11.00	3.19	.9993
4	1-2-4	13.00	1.20	12.00	−.83	.2033
5	1-2-4-5	13.00	1.20	14.00	.83	.7967
6	1-2-4-5-6	25.00	1.37	26.00	.73	.7673

En TORA hay un módulo para hacer cálculos de PERT. Para usarlo, seleccione `Project Planning` ⇒ `PERT-Program Evaluation and Review Technique` (planeación de proyecto/PERT-técnica de evaluación y revisión de programa) en `Main Menu` (el menú principal). En la pantalla de resultados tendrá usted la opción de seleccionar `Activity Mean/Var` (media y varianza de actividad) para calcular la media y la varianza de cada actividad, o bien `PERT Calculations` (cálculos de PERT) para calcular la media y la varianza de la ruta más larga a cada nodo de la red.

La figura 6.61 muestra el resultado de los cálculos de PERT para el ejemplo 6.6-6 (archivo ch6ToraPERTEx6-6-6.txt).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.6E

1. Se tiene el problema 2, conjunto 6.6b. A continuación se muestran los estimados (*a, m, b*). Determine las probabilidades de que los distintos nodos del proyecto se realicen sin demora.

Proyecto (a)				Proyecto (b)			
Actividad	*(a, m, b)*	*Actividad*	*(a, m, b)*	*Actividad*	*(a, m, b)*	*Actividad*	*(a, m, b)*
1-2	(5, 6, 8)	3-6	(3, 4, 5)	1-2	(1, 3, 4)	3-7	(12, 13, 14)
1-4	(1, 3, 4)	4-6	(4, 8, 10)	1-3	(5, 7, 8)	4-5	(10, 12, 15)
1-5	(2, 4, 5)	4-7	(5, 6, 8)	1-4	(6, 7, 9)	4-7	(8, 10, 12)
2-3	(4, 5, 6)	5-6	(9, 10, 15)	1-6	(1, 2, 3)	5-6	(7, 8, 11)
2-5	(7, 8, 10)	5-7	(4, 6, 8)	2-3	(3, 4, 5)	5-7	(2, 4, 8)
2-6	(8, 9, 13)	6-7	(3, 4, 5)	2-5	(7, 8, 9)	6-7	(5, 6, 7)
3-4	(5, 9, 19)			3-4	(10, 15, 20)		

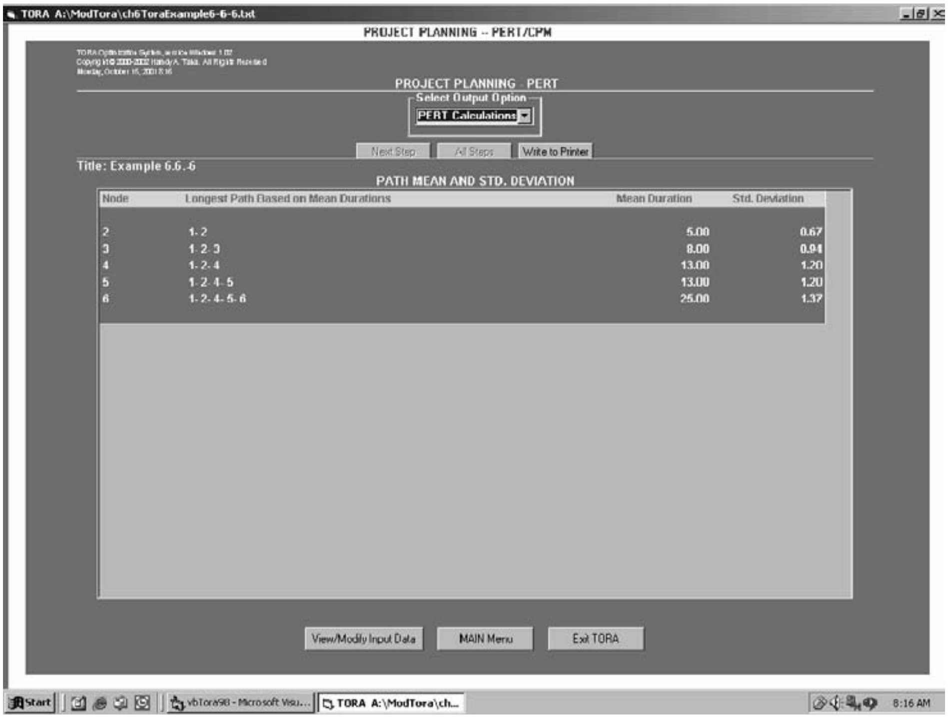


FIGURA 6.61

Cálculos de PERT con TORA, para el ejemplo 6.6-6

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Ahuja, R. T. Magnati y J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993.

Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flow*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1990.

Evans, J. R. y E. Minieka, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, 2a. ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1992.

Murty, K., *Network Programming*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

PROBLEMAS INTEGRALES

6.1 Una persona que vive en San Francisco (SF) desea pasar 15 días de vacaciones visitando cuatro parques nacionales: Yosemite (YO), Yellowstone (YE), Grand Teton (GT) y Mount Rushmore (MR). El recorrido, que comienza y termina en San Francisco, visita los parques en el orden siguiente, incluyendo una estancia de 2 días en cada parque: SF $\rightarrow$ YO $\rightarrow$ YE $\rightarrow$ GT $\rightarrow$ MR $\rightarrow$ SF. El viaje de uno a otro parque dura un día, sea por avión o por carretera. Cada tramo del recorrido toma 1/2 día si se va en avión. Por carretera se tarda 1/2 día de SF a YO, 3 días de YO a YE, un día de YE a GT, 2 días de GT a MR y 3 días para regresar de MR a SF. El atractivo es que en general el viaje por carretera cuesta menos, pero tarda más. Teniendo en cuenta que la persona debe regresar al trabajo en 15 días, el objetivo es hacer el recorrido lo menos costoso posible dentro del

límite de 15 días. La siguiente tabla muestra el costo del viaje sencillo hecho en avión y por carretera. Determine el modo de viajar en cada tramo del recorrido.

	Costo por aire ($)					Costo por carretera ($)				
Desde	*SF*	*YO*	*YE*	*GT*	*MR*	*SF*	*YO*	*YE*	*GT*	*MR*
SF	——	150	350	380	450	——	130	175	200	230
YO	150	——	400	290	340	130	——	200	145	180
YE	350	400	——	150	320	175	200	——	70	150
GT	380	290	150	——	300	200	145	70	——	100
MR	450	340	320	300	——	230	180	150	100	——

6.2[7] Un benefactor donó valiosos libros a la Biblioteca Pública Springdale. Esos libros vienen en cuatro alturas: 12, 10, 8 y 6 pulgadas. El bibliotecario principal estima que se necesitarán 12 pies de entrepaños para los libros de 12 pulgadas, 18 pies para los de 10 pulgadas, 9 pies para los de 8 pulgadas y 10 pies para los de 6 pulgadas. El costo de construcción de un entrepaño está formado por un costo fijo y uno variable, por pie de longitud, como se ve en la siguiente tabla.

Altura de entrepaños (pulg)	Costo fijo ($)	Costo variable ($/pie de longitud)
12	25	5.50
10	25	4.50
8	22	3.50
6	22	2.50

Como los libros más pequeños se pueden guardar en entrepaños más grandes, ¿cómo se deben diseñar los entrepaños?

6.3 Una empresa marítima desea entregar cinco embarques de los puertos *A, B* y *C* a los puertos *D* y *E*. Las fechas de entrega de los cinco embarques son

Embarque	Ruta de transporte	Fecha de entrega
1	*A* a *D*	10
2	*A* a *E*	15
3	*B* a *D*	4
4	*B* a *E*	5
5	*C* a *E*	18

La siguiente tabla muestra los tiempos de viaje (en días) entre los puertos. Se supone que el viaje de regreso toma menos tiempo.

	A	B	C	D	E
A				3	4
B				3	2
C				3	5
D	2	2	2		
E	3	1	4		

[7]Basado en A. Ravindran, "On Compact Storage in Libraries", *Opsearch*, vol. 8, núm. 3, págs. 245-52, 1971.

La empresa desea determinar la cantidad mínima de barcos necesarios para cumplir con este programa de entregas.

6.4[8] Varias personas han establecido empresas separadas de correduría que negociaron acciones muy especulativas. Los corredores operaron bajo un sistema financiero relajado que permitió extensas transacciones entre corredurías, como compra, venta, crédito y préstamo. Para el grupo de corredores en conjunto, la fuente principal de ingresos fue la comisión que recibieron por ventas a clientes externos.

Al final, las operaciones riesgosas con acciones especulativas se volvieron inmanejables y todos los corredores se declararon en bancarrota. En el momento de declarar la bancarrota, la situación financiera fue que todos ellos debían dinero a clientes externos, y las relaciones financieras entre ellos eran tan complicadas que casi cada corredor debía dinero a todos los demás del grupo.

A los corredores cuyos activos podían pagar sus deudas se les declaró solventes. Los restantes corredores fueron remitidos a operaciones legales con objeto de resolver la situación de deuda atendiendo los mejores intereses de los clientes externos. Como los activos y las cantidades por cobrar a los corredores insolventes eran menores que sus deudas, se prorratearon todas las deudas. El efecto final fue una liquidación completa de todos los activos de los corredores no solventes.

Para resolver los enredos financieros dentro del grupo de corredores insolventes, se decidió que sólo se ejecutarían las transacciones para satisfacer ciertos requisitos legales porque, de hecho, ninguno de los corredores obtendría los fondos que otros le debían. Como tal, el cuerpo legal pidió que la cantidad de transacciones entre corredores se redujera al mínimo absoluto. Eso quiere decir que si A debía a B una cantidad X y B debía a A una cantidad Y, las dos transacciones "circuito" se redujeran a una cuya cantidad fuera $|X - Y|$. Esta cantidad iría de A a B si $X > Y$, y de B a A si $Y > X$. Si $X = Y$, las transacciones se eliminarían por completo. La idea debía comprender todas las transacciones de circuito que implicaran cualquier cantidad de corredores.

¿Cómo manejaría usted esta situación? En forma específica, se le pide contestar dos preguntas:

1. ¿Cómo se deben prorratear las deudas?

2. ¿Cómo se debe reducir al mínimo las transacciones entre corredores?

---

[8]Basado en H. Taha, "Operations Research Analyisis of a Stock Market Problem", *Computers and Operations Research*, vol. 18, núm. 7, págs. 597-602, 1991.

CAPÍTULO 7

Programación lineal avanzada

En este capítulo se presenta una versión matricial de la programación lineal que permite el desarrollo de varios algoritmos computacionalmente eficientes: el método símplex modificado, acotamiento superior e inferior, descomposición y programación paramétrica. El capítulo presenta también el algoritmo de Karmarkar, de punto interior, totalmente distinto, que parece bastante eficiente al manejar programas lineales muy grandes.

7.1 FUNDAMENTOS DE MÉTODO SÍMPLEX

En la programación lineal, se dice que el espacio de soluciones factibles forma un **conjunto convexo** si el segmento de recta que une dos puntos factibles *distintos* cualquiera también está en el conjunto. Un **punto extremo** del conjunto convexo es un punto factible que no puede estar en un segmento de recta que una a dos puntos factibles *distintos* en el conjunto. En realidad, los puntos extremos son lo mismo que los puntos de esquina (vértices), nombre más adecuado que se usó en los capítulos 2, 3 y 4.

La figura 7.1 ilustra dos conjuntos. El conjunto (a), que es característico del espacio de soluciones de un programa lineal, es convexo (con seis puntos extremos), mientras que el conjunto (b) es no convexo.

En la solución gráfica del programa lineal, presentada en la sección 2.3, demostramos que la solución óptima siempre se puede asociar con un punto extremo factible (vértice) del espacio

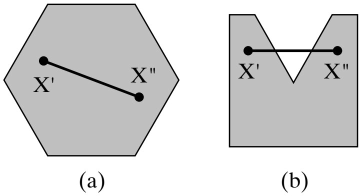


FIGURA 7.1

Ejemplos de un conjunto convexo y uno no convexo

de soluciones. Este resultado tiene sentido, intuitivamente, porque en programación lineal todo punto factible se puede determinar como función de los puntos extremos. Por ejemplo, en el conjunto convexo (a) de la figura 7.1, dados los puntos extremos $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5$ y $\mathbf{X}_6$, un punto factible $\mathbf{X}$ se puede expresar como **combinación convexa** de los puntos extremos mediante

$$\mathbf{X} = \alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2 + \alpha_3\mathbf{X}_3 + \alpha_4\mathbf{X}_4 + \alpha_5\mathbf{X}_5 + \alpha_6\mathbf{X}_6$$

en donde

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 6$$

Esta observación demuestra que los puntos extremos contienen todo lo necesario para definir por completo el espacio de soluciones.

Ejemplo 7.1-1

Demostrar que el siguiente conjunto es convexo:

$$C = \{(x_1, x_2) | x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Sean $\mathbf{X}_1 = \{x_1^1, x_2^1\}$ y $\mathbf{X}_2 = \{x_1^2, x_2^2\}$ dos puntos distintos cualquiera en C. Si C es convexo, entonces $\mathbf{X} = (x_1, x_2) = \alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2$ también debe estar en C. Para demostrar que eso es cierto se necesita demostrar que se satisfacen todas las restricciones de C en el segmento de recta $\mathbf{X}$; esto es

$$x_1 = \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 \leq \alpha_1(2) + \alpha_2(2) = 2$$

$$x_2 = \alpha_1 x_2^1 + \alpha_2 x_2^2 \leq \alpha_1(3) + \alpha_2(3) = 3$$

Por consiguiente, $x_1 \leq 2$ y $x_2 \leq 3$ porque $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Además, se satisfacen las condiciones de no negatividad, porque α_1 y α_2 son no negativos.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.1A

1. Demuestre que el conjunto $Q = \{x_1, x_2 \,|\, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ es convexo. ¿Es esencial la condición de no negatividad en la demostración?
2. Demuestre que el conjunto $Q = \{x_1, x_2 \,|\, x_1 \geq 1 \text{ o } x_2 \geq 2\}$ es no convexo.
3. Determine en forma gráfica los puntos extremos del siguiente conjunto convexo:

$$Q = \{x_1, x_2 \,|\, x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

   Demuestre que todo el espacio de soluciones factibles se puede determinar como combinación convexa de sus puntos extremos. Llegue entonces a la conclusión que todo espacio (acotado) convexo de soluciones está totalmente definido una vez que se conocen sus puntos extremos.
4. En el espacio de soluciones de la figura 7.2 (trazado a escala), exprese el punto interior (3, 1) como combinación convexa de los puntos extremos A, B, C y D, donde cada punto extremo tiene un peso estrictamente positivo.

7.1.1 Desde puntos extremos hasta soluciones básicas

Conviene expresar el problema lineal general en forma de ecuación (véase la sección 3.1) con notación matricial. Se define $\mathbf{X}$ como un n-vector que representa las variables; $\mathbf{A}$ como matriz

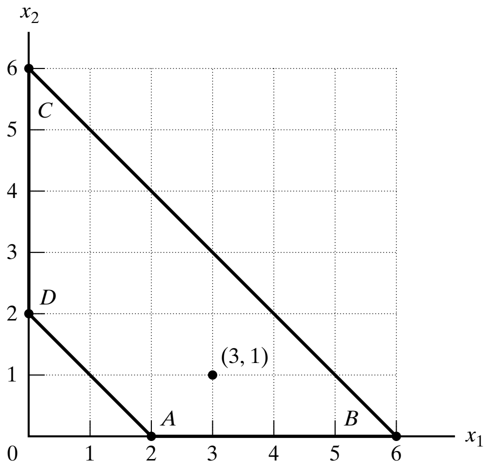


FIGURA 7.2

Espacio de soluciones para el problema 4, conjunto 7.1a

de $(m \times n)$ que representa los coeficientes de restricción, y **C** como un n-vector que representa los coeficientes de la función objetivo. Entonces el programa lineal se escribe como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \mathbf{CX}$$

sujeta a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Al usar el formato del capítulo 3 (véase también la figura 4.1), siempre se puede hacer que las m columnas de la extrema derecha de **A** representen la matriz identidad **I** mediante arreglos adecuados de las variables de holgura y artificiales asociadas con la solución básica de arranque.

Una **solución básica** de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ se determina igualando $n - m$ variables a cero, y resolviendo las m ecuaciones resultantes con las m incógnitas que quedan, siempre que la solución obtenida sea única. Dada esta definición, la teoría de la programación lineal establece la siguiente relación entre la definición geométrica de puntos extremos, y la definición algebraica de soluciones básicas:

$$\text{Puntos extremos de } \{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} = \mathbf{b}\} \Leftrightarrow \text{Soluciones básicas de } \mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

La relación indica que los puntos extremos del espacio de soluciones del programa lineal están totalmente definidos por las soluciones básicas del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$, y viceversa. Se llega entonces a la conclusión de que las soluciones básicas de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ contienen toda la información necesaria para determinar la solución óptima del problema lineal. Además, si se impone la restricción de no negatividad $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, la búsqueda de la solución óptima se confina sólo a las soluciones básicas *factibles.*

Para formalizar la definición de una solución básica, se puede expresar el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ en forma vectorial como sigue:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}$$

El vector $\mathbf{P}_j$ es la j-ésima columna de $\mathbf{A}$. Se dice que un subconjunto de m vectores forma una **base B**, si y sólo si esos m vectores son **linealmente independientes**. En este caso, la matriz **B** es **no singular**. Si $\mathbf{X}_B$ es el conjunto de m variables asociado con los vectores de **B** no singular, entonces $\mathbf{X}_B$ debe ser una **solución básica**. En este caso,

$$\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$$

Dada la inversa de $\mathbf{B}^{-1}$ que es $\mathbf{B}$, se obtiene la solución básica correspondiente:

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Si $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{X}_B$ es factible. Naturalmente, la definición supone que las $n - m$ variables restantes son **no básicas** a nivel cero.

El resultado anterior demuestra que en un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, la cantidad máxima de soluciones básicas (factibles y no factibles) es

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo 7.1-2

Determinar y clasificar (en factible y no factible) todas las soluciones básicas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la tabla siguiente se resumen los resultados. La inversa de **B** se determina con uno de los métodos de la sección A.2.7.

B	$\mathbf{BX}_B = \boldsymbol{b}$	Solución	Estado
$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	Factible
$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3)$	(No es base)	—	—
$(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$	No factible

También se puede investigar el problema expresándolo en forma vectorial, como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cada uno de $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ y $\mathbf{b}$ es un vector bidimensional que se puede representar, en forma genérica, como $(a_1, a_2)^T$. En la figura 7.3 se grafican estos vectores en el plano (a_1, a_2). Por ejemplo, para $\mathbf{b} = (4, 2)^T, a_1 = 4$ y $a_2 = 2$.

Como se manejan dos ecuaciones ($m = 2$), una base debería incluir exactamente dos vectores, seleccionados entre $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Según la figura 7.3, las combinaciones $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ y $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ forman bases, porque sus vectores asociados son independientes. En la combinación $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3)$ los dos vectores son dependientes y en consecuencia no forman una base.

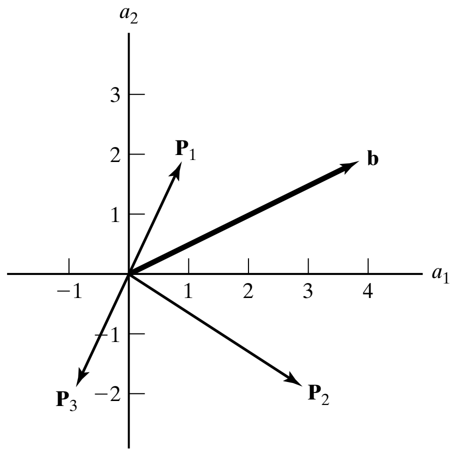


FIGURA 7.3
Representación vectorial del espacio de soluciones de una programación lineal

Desde el punto de vista algebraico, una combinación forma una base si su determinante es distinto de cero (véase la sección A.2.5). Los cálculos siguientes demuestran que las combinaciones $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ y $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ son bases, y que la combinación $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3)$ no lo es.

$$\det(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) - (2 \times 3) = -8 \neq 0$$

$$\det(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = (3 \times -2) - (-2 \times -1) = -8 \neq 0$$

$$\det(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) - (2 \times -1) = 0$$

Se puede aprovechar la representación vectorial del problema para describir cómo se determina la solución de arranque del método símplex. A partir de la representación vectorial de la figura 7.3, se puede usar la base $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ para iniciar las iteraciones símplex, porque produce la solución básica factible $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2)^T$. Sin embargo, en ausencia de la representación vectorial, la única vía de acción disponible es probar todas las bases posibles (en este ejemplo 3, como se demostró arriba). La dificultad con estos tanteos (pruebas y errores) es que no son adecuados para cálculos automáticos. En un programa lineal normal, con miles de variables y restricciones donde el uso de la computadora es obligatorio, los tanteos no son opción práctica por la tremenda carga computacional. Para aliviar este problema, el método símplex siempre usa una matriz identidad, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, para iniciar las iteraciones. ¿Por qué es ventajoso arrancar con $\mathbf{B} = \mathbf{I}$? La respuesta es que siempre proporciona una solución básica *factible* de arranque (siempre y cuando el vector del lado derecho de las ecuaciones sea no negativo). Se puede ver este resultado en la figura 7.3, graficando los vectores $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, y notando que coinciden con los ejes horizontal y vertical, con lo que siempre se garantiza una solución básica y factible en el arranque.

La base $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ pasa a formar parte de las ecuaciones del programa lineal si todas las restricciones son $\leq$. En otros casos, sólo se añaden los vectores unitarios que sean necesarios. Es lo que se logra con las variables artificiales (Sección 3.4). Luego se penalizan estas variables extrañas en la función objetivo, para forzarlas al nivel cero en la solución final.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.1B

1. En los siguientes conjuntos de ecuaciones, a) y b) tienen soluciones únicas (básicas), c) tiene una infinidad de soluciones y d) no tiene solución. Demuestre cómo se pueden comprobar estas afirmaciones mediante la representación vectorial gráfica. A partir de este ejercicio enuncie las condiciones generales de dependencia o independencia vectorial que conduzcan a solución única, infinidad de soluciones e inexistencia de solución.

a) $x_1 + 3x_2 = 2$
$3x_1 + x_2 = 3$

b) $2x_1 + 3x_2 = 1$
$2x_1 - x_2 = 2$

c) $2x_1 + 6x_2 = 4$
$x_1 + 3x_2 = 2$

d) $2x_1 - 4x_2 = 2$
$-x_1 + 2x_2 = 1$

2. Determine en forma gráfica (mediante vectores) si cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene solución única, infinidad de soluciones o inexistencia de solución. En los casos de soluciones únicas, indique, partiendo de la representación vectorial (sin resolver algebraicamente las ecuaciones) si los valores de x_1 y x_2 son positivos, cero o negativos.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine si algunas de las siguientes combinaciones forman una base.

a) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$
b) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$
c) $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$
d) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$

4. ¿Cierto o falso?

a) El sistema $\mathbf{BX} = \mathbf{b}$ tiene una solución única si $\mathbf{B}$ es no singular.
b) El sistema $\mathbf{BX} = \mathbf{b}$ no tiene solución si $\mathbf{B}$ es singular y $\mathbf{b}$ es independiente de $\mathbf{B}$.
c) El sistema $\mathbf{BX} = \mathbf{b}$ tiene una infinidad de soluciones si $\mathbf{B}$ es singular y $\mathbf{b}$ es dependiente.

7.1.2 Tabla símplex generalizada en forma matricial

En esta sección se usarán matrices para desarrollar la tabla símplex general. Esta representación será la base para desarrollos posteriores en el capítulo.

Se tiene la programación lineal en forma de ecuación:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX}, \text{ sujeta a } \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El problema se puede escribir en forma equivalente como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Supongamos que $\mathbf{B}$ es una base factible del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, y sea $\mathbf{X}_B$ el conjunto correspondiente de variables básicas, con $\mathbf{C}_B$ como su vector objetivo asociado. Entonces, la solución correspondiente se puede calcular como sigue (el método para invertir matrices en partición se describe en la sección A.2.7):

$$\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_B \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

La tabla general símplex en forma matricial se puede derivar de las ecuaciones originales como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Con manipulaciones matriciales se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{P}_j$ es el j-ésimo vector de $\mathbf{A}$, la columna de la tabla símplex asociada con la variable x_j se puede representar como sigue:

Básica	x_j	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

De hecho, esta tabla es la misma que se presentó en el capítulo 3 (véase el problema 5 del conjunto 7.1c). Una propiedad importante de esta tabla es que la inversa $\mathbf{B}^{-1}$, es el único elemento que cambia de un cuadro al siguiente, y que *todo* el cuadro se puede generar una vez conocido $\mathbf{B}^{-1}$. Este punto es importante, porque se puede controlar el error computacional de redondeo en cualquier cuadro, si se controla la exactitud de $\mathbf{B}^{-1}$. Este resultado fue la razón principal del desarrollo del método símplex modificado en la sección 7.2.

Ejemplo 7.1-3

Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Se debe generar el tabla símplex asociada con la base $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$.

Dado $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, entonces $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2)^T$ y $\mathbf{C}_B = (1, 4)$. Así,

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces se obtiene

$$\mathbf{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para calcular las columnas de restricción en el cuerpo de la tabla,

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se calcula el renglón objetivo como sigue:

$$\mathbf{C}_B[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)] - \mathbf{C} = (1,4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - (1,4,7,5) = (0,0,1,-3)$$

Por último, se calcula el valor de la función objetivo como sigue:

$$z = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B = (1,4)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 19$$

Así, toda la tabla se puede resumir como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	1	-3	19
x_1	1	0	2	0	3
x_2	0	1	0	2	4

La conclusión principal de este ejemplo es que una vez conocida la inversa $\mathbf{B}^{-1}$, se puede generar toda la tabla símplex a partir de $\mathbf{B}^{-1}$ y los datos *originales* del problema.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.1C

1. En el ejemplo 7.1-3, sea $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$. Demuestre que la solución básica correspondiente es factible y a continuación genere la tabla símplex correspondiente.

2. En la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Verifique si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores forma una base (factible o no factible): $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$.

3. En la siguiente programación lineal calcule toda la tabla símplex asociada a $\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, x_5)^T$:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. La siguiente es una tabla óptima de programación lineal:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	−1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	−1	1	2

Las variables x_3, x_4 y x_5 son holguras en el problema original. Con manipulaciones matriciales, reconstruya la programación lineal original, y a continuación calcule el valor objetivo óptimo.

5. En la tabla símplex generalizada, suponga que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\mathrm{I}}, \mathbf{X}_{\mathrm{II}})^T$, correspondiendo $\mathbf{X}_{\mathrm{II}}$ a una solución típica básica *de arranque* (formada por variables de holgura y/o artificiales) con $\mathbf{B} = \mathbf{I}$; y sean $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{\mathrm{I}}, \mathbf{C}_{\mathrm{II}})$ y $\mathbf{A} = (\mathbf{D}, \mathbf{I})$ las particiones correspondientes de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}$, respectivamente. Demuestre que la forma matricial de la tabla símplex se reduce a la siguiente forma, que es exactamente la que se usó en el capítulo 3.

Básica	$\mathbf{X}_{\mathrm{I}}$	$\mathbf{X}_{\mathrm{II}}$	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{C}_{\mathrm{I}}$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathrm{II}}$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

7.2 MÉTODO SÍMPLEX MODIFICADO

En la sección 7.1.1 se demuestra que la solución óptima de un programa lineal siempre está asociada a una solución básica (factible). La búsqueda del óptimo con el método símplex se inicia seleccionando una base $\mathbf{B}$ factible, y pasando entonces a otra base factible $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$, que conduce a un valor mejor (o cuando menos, a uno no peor) de la función objetivo. Al continuar de esta manera se llega al final a la base factible óptima.

Los pasos iterativos del método símplex *modificado* o *revisado* son exactamente iguales que en la *tabla* del método símplex que se presentó en el capítulo 3. La diferencia principal es que los cálculos del método modificado se basan en álgebra de matrices, y no en operaciones de renglón. El uso del álgebra de matrices reduce el efecto adverso del error de redondeo de las máquinas, al controlar la exactitud de cálculo de $\mathbf{B}^{-1}$. Este resultado se debe a que, como se ve en la sección 7.1, toda la tabla símplex se puede calcular a partir de los datos *originales* y con $\mathbf{B}^{-1}$ en ese momento. En el método de la tabla símplex del capítulo 3, cada cuadro se genera partiendo del inmediato anterior, lo que tiende a empeorar el problema del error de redondeo.

7.2.1 Desarrollo de las condiciones de optimalidad y factibilidad

El problema lineal general se puede plantear como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ sujeta a } \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Para un vector básico dado $\mathbf{X}_B$ con su base $\mathbf{B}$ y vector objetivo $\mathbf{C}_B$ correspondientes, la tabla general símplex desarrollada en la sección 7.1.2 indica que toda iteración símplex se puede representar con las siguientes ecuaciones:

$$z + \sum_{j=1}^{n} (z_j - c_j) x_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{X}_B)_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i$$

en donde

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - c_j$$

Se usa la notación $(\mathbf{V})_i$ para representar al i-ésimo elemento del vector $\mathbf{V}$.

Condición de optimalidad. En la ecuación de z de arriba, un aumento de x_j no básica por encima de su valor actual cero mejorará el valor de z en relación con su valor actual, $\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, sólo si su $z_j - c_j$ es estrictamente negativo en el caso de maximización, y estrictamente positivo en caso de minimización. En caso contrario x_j no puede mejorar la solución y debe permanecer como no básica en nivel cero. Aunque se puede escoger cualquier variable no básica que satisfaga esta condición para mejorar la solución, en el método símplex se usa una regla aproximada, que selecciona a la variable entrante como la que tiene el $z_j - c_j$ *más* negativo si es maximización (*más* positivo si es minimización).

Condición de factibilidad. La determinación del vector saliente se basa en examinar la ecuación de restricción asociada con la i-ésima variable *básica*. En forma específica,

$$(\mathbf{X}_B)_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i$$

Cuando se selecciona el vector $\mathbf{P}_j$ con la condición de optimalidad para entrar a la base, su variable asociada x_j aumentará sobre el nivel cero. Al mismo tiempo, todas las variables no básicas restantes quedan en el nivel cero. Así, la i-ésima ecuación de restricción se reduce a

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j$$

La ecuación indica que si $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i > 0$, un aumento de x_j puede hacer que $(\mathbf{X}_B)_i$ se vuelva negativo, lo cual viola la condición de no negatividad, $(\mathbf{X}_B)_i \geq 0$ para toda i. Entonces,

$$(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i x_j \geq 0, \text{ para toda } i$$

Esta condición lleva al siguiente valor máximo de la variable entrante x_j:

$$x_j = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i} \middle| (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j)_i > 0 \right\}$$

La variable básica causante de producir la relación mínima sale de la solución básica y se convierte en no básica con nivel cero.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.2A

1. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

sujeta a

$$\mathbf{P}_1x_1 + \mathbf{P}_2x_2 + \mathbf{P}_3x_3 + \mathbf{P}_4x_4 = \mathbf{b}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_4$ se ven en la figura 7.4. Suponga que la base **B** de la iteración del momento está formada por $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

a) Si el vector $\mathbf{P}_3$ entra a la base, ¿cuál de los dos vectores básicos actuales debe salir para que la solución básica sea factible?

b) El vector $\mathbf{P}_4$ ¿puede ser parte de una solución factible?

2. Demuestre que en cualquier iteración símplex, $z_j - c_j = 0$ para todas las variables *básicas* asociadas.

3. Demuestre que si $z_j - c_j > 0$ (<0) para todas las variables x_j no básicas de un programa lineal de maximización (minimización), la solución óptima es única. O bien, si $z_j - c_j$ es igual a cero para una x_j no básica, el problema tiene una solución óptima alternativa.

4. En una solución de arranque con todas las holguras, demuestre, con la forma matricial del cuadro, que el procedimiento mecánico que se usó en la sección 3.3, en el que se expresa la ecuación objetivo en la forma

$$z - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$$

se calcula el $z_j - c_j$ en forma automática para todas las variables del cuadro de arranque.

5. Use la forma matricial de la tabla símplex para demostrar que en toda solución básica de arranque con todas las variables artificiales, el procedimiento que se empleó en la sección 3.4.1, donde se deben eliminar las variables artificiales por sustitución, en la función objetivo y usando las ecuaciones de restricción, lo que se hace en realidad es calcular el $z_j - c_j$ adecuado para todas las variables del cuadro de arranque.

6. Considere un problema lineal en el que el signo de la variable x_k no está restringido. Demuestre que si se sustituye $x_k = x_k^+ - x_k^-$, donde x_k^+ y x_k^- son no negativas, es imposible que x_k^+ y x_k^- se reemplacen entre sí en una solución óptima alternativa.

7. Dado el problema lineal general en forma de ecuación, con *m* ecuaciones y *n* incógnitas, determine la cantidad máxima de puntos extremos *adyacentes* que se pueden alcanzar desde un punto extremo no degenerado del espacio de soluciones.

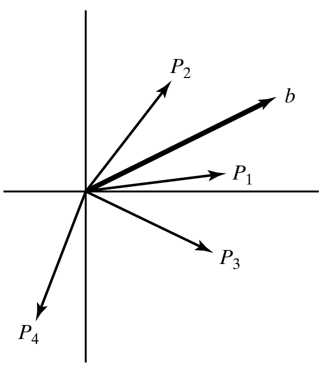


FIGURA 7.4

Representación vectorial del problema 1, conjunto 7.2a

8. Suponga que al aplicar la condición de factibilidad del método símplex, $x_r = 0$ es una variable básica, y que x_j es la variable entrante. ¿Por qué es necesario que la variable saliente x_r tenga $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r > 0$? ¿Dónde está la falacia si $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r \leq 0$? (*Sugerencia:* la x_r básica debe seguir siendo no negativa.)
9. En la implementación de la condición de factibilidad del método símplex, ¿cuáles son las condiciones para llegar por primera vez a una solución degenerada? ¿Para continuar obteniendo una solución degenerada en la siguiente iteración? ¿Para eliminar la degeneración en la siguiente iteración? Explique matemáticamente la respuesta.
10. ¿Cuáles son las relaciones entre los puntos extremos y las soluciones básicas cuando hay degeneración y cuando hay no degeneración? ¿Cuál es la cantidad máxima de iteraciones que se pueden efectuar en determinado punto extremo, suponiendo que no hay ciclos?
11. Se tiene la siguiente programación lineal

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} \text{ sujeta a } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Suponga que el vector entrante $\mathbf{P}_j$ es tal que al menos un elemento de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ es positivo.

a) Si se reemplaza $\mathbf{P}_j$ por $\alpha\mathbf{P}_j$, donde α es un escalar positivo, y siempre y cuando x_j permanezca como la variable entrante, deduzca la relación entre los valores de x_j correspondientes a $\mathbf{P}_j$ y $\alpha\mathbf{P}_j$.

b) Conteste la parte a) si además se sustituye a **b** por $\beta\mathbf{b}$, siendo β un escalar positivo.

12. Se tiene la siguiente programación lineal

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} \text{ sujeta a } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Después de obtener la solución óptima, se sugiere poder hacer básica una variable x_j no básica (rentable) reduciendo los requerimientos por unidad de x_j de los distintos recursos a $\frac{1}{\alpha}$ de sus valores originales; $\alpha > 1$. Como se reducen los requerimientos por unidad, se espera que también se reduzca la utilidad por unidad de x_j a $\frac{1}{\alpha}$ de su valor original. ¿Harán estos cambios que x_j sea una variable rentable? Explique por qué.

13. Se tiene la siguiente programación lineal

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} \text{ sujeta a } (\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Defina a $\mathbf{X}_B$ como el vector básico actual, con **B** como su base asociada y $\mathbf{C}_B$ su vector de coeficientes objetivo. Demuestre que si se sustituye $\mathbf{C}_B$ por los nuevos coeficientes $\mathbf{D}_B$, los valores de $z_j - c_j$ del vector básico $\mathbf{X}_B$ permanecerán siendo igual a cero. ¿Qué importancia tiene este resultado?

7.2.2 Algoritmo símplex modificado

Después de desarrollar las condiciones de optimalidad y factibilidad en la sección 7.2.1, ahora presentaremos los pasos de cómputo del método símplex modificado (o revisado).

Paso 0. Forme una solución básica factible de arranque, y sean **B** y $\mathbf{C}_B$ su base asociada y vector de coeficientes objetivo, respectivamente.

Paso 1. Calcule la inversa $\mathbf{B}^{-1}$ usando un método adecuado de inversión.[1]

[1]En la mayor parte de las representaciones de programa lineal, que incluyen las seis primeras ediciones de este libro, se integra el método de la *forma de producto* para invertir una base (véase la sección A.2.7) en el algoritmo símplex modificado, porque la *forma producto* se presta muy bien para cálculos del método modificado, donde las bases sucesivas difieren exactamente en una columna. El autor quitó este detalle en esta explicación, porque hace parecer el algoritmo más complicado de lo que es en realidad. Además, casi nunca se usa la *forma producto* en el desarrollo de programas informáticos de programación lineal, porque no está diseñado para cálculos automáticos, donde el error de redondeo de la máquina puede ser un asunto importante. En el caso normal se usa algún método avanzado de análisis numérico, como la *descomposición* LU, para obtener la inversa. Por cierto, el módulo de inversión de matrices en TORA se basa en la descomposición LU.

Paso 2. Para cada variable x_j *no básica*, calcule

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$$

Si $z_j - c_j \geq 0$ en maximización (≤ 0 en minimización) para toda x_j no básica, deténgase; la solución óptima es

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ z = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B$$

En caso contrario, aplique la condición de optimalidad y determine la variable *entrante* x_j como la variable no básica con el valor más negativo de $z_j - c_j$ en caso de maximización, y más positivo en caso de minimización.

Paso 3. Calcule $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$. Si todos los elementos de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ son negativos o cero, deténgase; el problema no tiene solución acotada. En caso contrario, calcule $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Entonces, para todos los elementos *estrictamente positivos* de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$, determine las relaciones definidas por la condición de factibilidad. La variable básica x_i asociada con la relación mínima es la variable *saliente*.

Paso 4. A partir de la base actual $\mathbf{B}$, forme una nueva base reemplazando al vector saliente $\mathbf{P}_j$ con el vector entrante $\mathbf{P}_j$. Vaya al paso 1 para iniciar una nueva iteración.

Ejemplo 7.2-1

Se resolverá el modelo de Reddy Mikks (Sección 2.1) con el algoritmo símplex modificado. El mismo modelo se resolvió con el método tabular en la sección 3.3.2. Al comparar los dos métodos se demostrará que son uno y el mismo.

La forma de ecuación, del modelo de Reddy Mikks, se puede expresar como sigue, en forma matricial:

$$\text{Maximizar } z = (5, 4, 0, 0, 0, 0)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

sujeta a

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$$

Usaremos la notación $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_6)$ para representar a los coeficientes de la función objetivo, y $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_6)$ para representar los vectores columna de las ecuaciones de restricción. El lado derecho de las restricciones expresan al vector $\mathbf{b}$.

En los cálculos siguientes presentaremos la fórmula algebraica para cada paso, y su respuesta numérica final, sin detallar las operaciones aritméticas. Es instructivo para el lector si llena los huecos de cada paso.

Iteración 0.

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_3, x_4, x_5, x_6), \mathbf{C}_{B_0} = (0, 0, 0, 0)$$
$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) = \mathbf{I}, \mathbf{B}_0^{-1} = \mathbf{I}$$

Así,

$$\mathbf{X}_{B_0} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b} = (24, 6, 1, 2)^T, z = \mathbf{C}_{B_0}\mathbf{X}_{B_0} = 0$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1} = (0,0,0,0)$$
$$\{z_j - c_j\}_{j=1,2} = \mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) - (c_1,c_2) = (-5,-4)$$

Por consiguiente, $\mathbf{P}_1$ es el vector entrante.

Cálculos de factibilidad:

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_3,x_4,x_5,x_6)^T = (24,6,1,2)^T$$
$$\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_1 = (6,1,-1,0)^T$$

Por consiguiente,

$$x_1 = \text{mín}\left\{\frac{24}{6},\frac{6}{1},-,-\right\} = \text{mín}\,\{\mathbf{4},6,-,-\} = 4$$

y $\mathbf{P}_4$ se vuelve vector saliente.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el conocido formato de tabla símplex. La presentación debe contribuir a convencer al lector de que los dos métodos son esencialmente el mismo.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	-5	-4	0	0	0	0	0
x_3	6						24
x_4	1						6
x_5	-1						1
x_6	0						2

Iteración 1.

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_1,x_4,x_5,x_6), \mathbf{C}_{B_1} = (5,0,0,0)$$
$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_4,\mathbf{P}_5,\mathbf{P}_6)$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al usar un método adecuado de inversión (véase la sección A.2.6, en particular el método de *forma de producto*), la inversa resulta:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{X}_{B_1} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = (4,2,5,2)^T, z = \mathbf{C}_{B_1}\mathbf{X}_{B_1} = 20$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1} = (\tfrac{5}{6}, 0, 0, 0)$$
$$\{z_j - c_j\}_{j=2,3} = \mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) - (c_2, c_3) = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{6})$$

Así, el vector entrante es $\mathbf{P}_2$.

Cálculos de factibilidad:

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_1, x_4, x_5, x_6)^T = (4, 2, 5, 2)^T$$
$$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_2 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 1)^T$$

Por consiguiente,

$$x_2 = \text{mín}\left\{\frac{4}{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\frac{4}{3}}, \frac{5}{\frac{5}{3}}, \frac{2}{1}\right\} = \text{mín}\,\{6, \tfrac{3}{2}, 3, 2\} = \tfrac{3}{2}$$

y $\mathbf{P}_4$ se vuelve vector saliente. (El lector encontrará útil resumir los resultados de arriba en el formato de tabla símplex, como hicimos en la iteración 0.)

Iteración 2.

$$\mathbf{X}_{B_2} = (x_1, x_2, x_5, x_6)^T, \mathbf{C}_{B_2} = (5, 4, 0, 0)$$
$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{X}_{B_2} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = (3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2})^T, z = \mathbf{C}_{B_2}\mathbf{X}_{B_2} = 21$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1} = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}, 0, 0)$$
$$\{z_j - c_j\}_{j=3,4} = \mathbf{C}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) - (c_3, c_4) = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2})$$

Así, $\mathbf{X}_{B_2}$ es óptimo y terminan los cálculos.

Resumen de la solución óptima:

$$x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.2B

1. En el ejemplo 7.2-1 haga un resumen de los datos de la iteración 1 en el formato de tabla de la sección 3.3.

2. Resuelva los siguientes programas lineales con el método símplex modificado:

a) Maximizar $z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 4x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 12 \\ 4x_1 + x_2 + 12x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Minimizar $z = 2x_1 + x_2$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\leq 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\geq 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Resuelva la siguiente programación lineal con el método símplex modificado, dado el vector básico factible de arranque $\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_4, x_5)^T$.

$$\text{Minimizar } z = 7x_2 + 11x_3 - 10x_4 + 26x_6$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_5 + x_6 &= 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 3x_6 &= 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resuelva lo siguiente, con el método símplex de dos fases modificado:

a) El problema 2-c

b) El problema 2-d

c) El problema 3 (sin tener en cuenta el $\mathbf{X}_{B_0}$ de arranque mencionado)

5. *Método símplex dual modificado*. Los pasos del método símplex dual modificado (con manipulaciones de matrices) se pueden resumir como sigue:

Paso 0. Sea $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ la base de arranque y al menos uno de los elementos de $\mathbf{X}_{B_0}$ sea negativo (no factible).

Paso 1. Calcular $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, los valores actuales de las variables básicas. Seleccionar la variable saliente x_r que tenga el valor más negativo. Si todos los elementos de $\mathbf{X}_B$ son no negativos, detenerse; la solución actual es factible (y óptima).

Paso 2. **a)** Calcular $z_j - c_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$ para todas las variables x_j no básicas.

b) Para todas las variables no básicas x_j, calcular los coeficientes de restricción $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r$ asociados con el renglón de la variable saliente x_j.

c) La variable entrante está asociada a

$$\theta = \min_j\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r}\right|, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r < 0\right\}$$

Si todas las $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r \geq 0$, no existe solución factible.

Paso 3. Obtener la base nueva intercambiando los vectores entrante y saliente ($\mathbf{P}_j$ y $\mathbf{P}_r$). Calcular la nueva inversa y seguir en el paso 1.

Aplique el método al siguiente problema:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7.3 ALGORITMO DE VARIABLES ACOTADAS

En los modelos de programación lineal, las variables pueden tener cotas superior e inferior explícitas. Por ejemplo, en las instalaciones productivas las cotas superior e inferior pueden representar las demandas máxima y mínima de ciertos productos. También se presentan variables acotadas principalmente cuando se resuelven problemas de programación entera, con el algoritmo de ramificación y acotamiento (véase la sección 9.3.1).

El algoritmo acotado es computacionalmente eficiente, porque tiene en cuenta a las cotas *en forma implícita*. Se estudiarán primero las cotas inferiores, por ser más sencillo. Dada $\mathbf{X} \geq \mathbf{L}$, se usa la sustitución

$$\mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{X}', \quad \mathbf{X}' \geq \mathbf{0}$$

y se resuelve el problema en términos de $\mathbf{X}'$ (cuya cota inferior es igual a cero ahora). La $\mathbf{X}$ original se determina por sustitución en reversa, que es legítima porque garantiza que $\mathbf{X} = \mathbf{X}' + \mathbf{L}$ permanecerá siendo no negativa para toda $\mathbf{X}' \geq \mathbf{0}$.

A continuación se estudiarán las restricciones de cota superior, $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}$. La idea de la sustitución directa (es decir, $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{X}'', \mathbf{X}'' \geq \mathbf{0}$) no es correcta, porque la sustitución en reversa $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{X}''$, no asegura que $\mathbf{X}$ permanezca siendo no negativa. Entonces se necesita un método distinto.

Se definirá el modelo de programación lineal con cota superior como sigue:

$$\text{Maximizar } z = \{\mathbf{CX} | (\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{0} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}\}$$

El algoritmo acotado sólo usa las restricciones $(\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ en forma explícita, y tiene en cuenta a $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}$ en forma implícita al modificar la condición de factibilidad símplex.

Sea $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ una solución básica factible actual de $(\mathbf{A}, \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ y supóngase que de acuerdo con la condición de optimalidad (usual), $\mathbf{P}_j$ es el vector entrante. Entonces, *dado que todas las variables no básicas son cero*, la ecuación de restricción de la i-ésima variable se pueden escribir como sigue:

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i\, x_j$$

Cuando la variable entrante x_j aumenta sobre el nivel cero, $(\mathbf{X}_B)_i$ *aumentará o disminuirá* dependiendo de si $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i$ es negativa o positiva, respectivamente. Así, cuando se determina el valor de la variable entrante x_j, se deben satisfacer tres condiciones:

1. La variable básica $(\mathbf{X}_B)_i$ permanece no negativa; es decir, $(\mathbf{X}_B)_i \geq 0$.
2. La variable básica $(\mathbf{X}_B)_i$ no rebasa su cota superior; es decir, $(\mathbf{X}_B)_i \leq (\mathbf{U}_B)_i$, donde $\mathbf{U}_B$ comprende los elementos ordenados de $\mathbf{U}$ correspondientes a $\mathbf{X}_B$.
3. La variable entrante x_j no puede tomar un valor mayor que su cota superior; esto es, $x_j \leq u_j$, donde u_j es el j-ésimo elemento de $\mathbf{U}$.

La primera condición, $(\mathbf{X}_B)_i \geq 0$ requiere que

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j \geq 0$$

Se satisface si

$$x_j \leq \theta_1 = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \middle| (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i > 0 \right\}$$

Esta condición es la misma que la de factibilidad en el método símplex regular.

A continuación, la condición $(\mathbf{X}_B)_i \leq (\mathbf{U}_B)_i$ especifica que

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j \leq (\mathbf{U}_B)_i$$

Se satisface si

$$x_j \leq \theta_2 = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{U}_B)_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \middle| (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i < 0 \right\}$$

Al combinar las tres restricciones, x_j entra a la solución en el nivel que satisfaga

$$x_j = \min\,(\theta_1, \theta_2, u_j)$$

El cambio de base para la iteración siguiente depende de si x_j entra a la solución al nivel θ_1, θ_2 o u_j. Suponiendo que $(\mathbf{X}_B)_r$ es la variable saliente, se tienen las siguientes reglas:

1. $x_j = \theta_1$: $(\mathbf{X}_B)_r$ sale de la solución básica (se vuelve no básica) al nivel cero. La nueva iteración se genera de la forma normal símplex, usando $(\mathbf{X}_B)_r$ como las variables entrante y saliente, respectivamente.
2. $x_j = \theta_2$: $(\mathbf{X}_B)_r$ se vuelve no básica *en su cota superior*. La nueva iteración se genera como en el caso de $x_j = \theta_1$, con una modificación que tiene en cuenta que $(\mathbf{X}_B)_r$ será no básica en la *cota superior*. Como los valores de θ_1 y θ_2 se dedujeron bajo el supuesto de que *todas las variables no básicas están en el nivel cero* (¡convénzase el lector de que éste es el caso!) se debe convertir la nueva variable no básica $(\mathbf{X}_B)_r$ en la cota superior a una variable no básica en el nivel cero. Esto se logra con la sustitución $(\mathbf{X}_B)_r = (\mathbf{U}_B)_r - (\mathbf{X}_B)'_r$, siendo $(\mathbf{X}_B)'_r \geq 0$. No importa si la sustitución se hace antes o después de haber calculado la nueva base.
3. $x_j = u_j$: El vector básico $\mathbf{X}_B$ queda sin cambio porque $x_j = u_j$ se detiene antes de forzar a alguna de las variables básicas actuales a llegar a su cota inferior $(= 0)$ o superior. Eso quiere decir que x_j permanecerá no básica *pero en la cota superior*. Con el argumento que acabamos de presentar, la nueva iteración se genera usando la sustitución $x_j = u_j - x'_j$.

Si hay empate entre θ_1, θ_2 y u_j, se puede romper en forma arbitraria. Sin embargo es preferible que, cuando sea posible, se implemente la regla para $x_j = u_j$ porque implica menos cálculos.

La sustitución $x_j = u_j - x'_j$ cambiará las $c_j, \mathbf{P}_j$ y $\mathbf{b}$ en $c'_j = -c_j, \mathbf{P}'_j = -\mathbf{P}_j$, y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - u_j\mathbf{P}_j$. Esto quiere decir que si se usa el método símplex modificado, todos los cálculos (por ejemplo, de $\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{X}_B$ y $z_j - c_j$) se deben basar en los valores actualizados de $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ en cada iteración (véase el problema 5, conjunto 7.3a, para mayores detalles).

Ejemplo 7.3-1

Resolver el siguiente modelo de programación lineal con el algoritmo de acotación superior.[2]

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5y + 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + y + 2x_3 \leq 14$$

$$2x_1 + 4y + 3x_3 \leq 43$$

$$0 \leq x_1 \leq 4, 7 \leq y \leq 10, 0 \leq x_3 \leq 3$$

La cota inferior de y se tiene en cuenta usando la sustitución $y = x_2 + 7$, donde $0 \leq x_2 \leq 10 - 7 = 3$.

No se usará el método símplex modificado para hacer los cálculos, para evitar desviarse en los detalles de cómputo. En su lugar se usará la forma de tabla compacta. En los problemas 5, 6 y 7, del conjunto 7.3a, se maneja la versión revisada del algoritmo.

---

[2]Usted puede usar las funciones `Linear Programming` ⇒ `Solve problem` ⇒ `Algebraic` ⇒ `Iterations` ⇒ `Bounded simplex` de TORA para producir las iteraciones símplex correspondientes.

Iteración 0.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	-3	-5	-2	0	0	35
x_4	1	1	2	1	0	7
x_5	2	4	3	0	1	15

Entonces $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{X}_B = (x_4, x_5)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (7, 15)^T$. Como x_2 es la variable entrante $(z_2 - c_2 = -5)$, se obtiene

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2 = (1, 4)^T$$

que da como resultado

$$\theta_1 = \text{mín}\left\{\frac{7}{1}, \frac{15}{4}\right\} = 3.75, \text{ que corresponde a } x_5$$

$$\theta_2 = \infty \text{ (porque } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2 > \mathbf{0})$$

A continuación, dada la cota superior de la variable entrante $x_2 \leq 3$, se ve que

$$x_2 = \text{ mín }\{3.75, \infty, 3\} = 3\ (= u_2)$$

Como x_2 entra en su cota superior $(= u_2 = 3)$, $\mathbf{X}_B$ queda sin cambiar y x_2 se vuelve no básica *en su cota superior*. Se usará la sustitución $x_2 = 3 - x_2'$ para obtener el nuevo cuadro siguiente:

Básica	x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	Solución
z	-3	5	-2	0	0	50
x_4	1	-1	2	1	0	4
x_5	2	-4	3	0	1	3

De hecho, la sustitución cambia el vector original del lado derecho de $\mathbf{b} = (7, 15)^T$ a $\mathbf{b}' = (4, 3)^T$. Este cambio se debe tener en cuenta en los cálculos futuros.

Iteración 1. La variable entrante es x_1. El vector básico $\mathbf{X}_B$ y $\mathbf{B}^{-1}$ $(= \mathbf{I})$ son iguales que en la iteración 0. A continuación,

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1 = (1, 2)^T$$

$$\theta_1 = \text{ mín}\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{2}\right\} = 1.5, \text{ que corresponde a } x_5 \text{ básica}$$

$$\theta_2 = \infty \text{ (porque } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1 > \mathbf{0})$$

Así,

$$x_1 = \text{ mín }\{1.5, \infty, 4\} = 1.5\ (= \theta_1)$$

Entonces, la variable entrante x_1 se vuelve básica y la variable saliente x_5 se vuelve no básica en nivel cero, con lo que se obtiene

Básica	x_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	-1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{109}{2}$
x_4	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	1	-2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Iteración 2. La nueva inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\mathbf{X}_B = (x_4, x_1)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2})^T$$

donde $\mathbf{b}' = (4, 3)^T$ que se calculó al final de la iteración 0. Se selecciona x'_2 como la variable entrante y, teniendo en cuenta que $\mathbf{P}'_2 = -\mathbf{P}_2$, se obtiene

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}'_2 = (1, -2)^T$$

Por consiguiente,

$$\theta_1 = \text{mín}\left\{\frac{\frac{5}{2}}{1}, —\right\} = 2.5, \text{que corresponde a } x_4 \text{ básica}$$

$$\theta_2 = \text{mín}\left\{—, \frac{\frac{3}{2} - 4}{-2}\right\} = 1.25, \text{que corresponde a } x_1 \text{ básica}$$

Entonces se tiene

$$x'_2 = \text{mín}\,\{2.5, 1.25, 3\} = 1.25\ (=\theta_2)$$

Como x_1 se vuelve no básica en su cota superior se aplica la sustitución $x_1 = 4 - x'_1$ para obtener

Básica	x'_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	-1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{109}{2}$
x_4	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x'_1	-1	-2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$

A continuación la variable entrante x'_2 se vuelve básica y la variable saliente x'_1 se vuelve no básica a nivel cero, con lo cual

Básica	x'_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{223}{4}$
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x'_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

El último cuadro es factible y óptimo. Observe que los dos últimos pasos se podrían haber invertido; primero podríamos haber hecho básica a x_2' para luego aplicar la sustitución $x_1 = 4 - x_1'$ (¡haga la prueba!). Sin embargo, la secuencia que presentamos aquí implica menos cálculos.

Los valores óptimos de x_1, x_2 y x_3 se obtienen por sustitución en reversa, y son $x_1 = u_1 - x_1' = 4 - 0 = 4$, $x_2 = u_2 - x_2' = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$ y $x_3 = 0$. Por último, se obtiene $y = l_2 + x_2 = 7 + \frac{7}{4} = \frac{35}{4}$. El valor óptimo correspondiente de es $\frac{223}{4}$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.3A

1. Para la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2$$

a) Resuélvalo gráficamente y trace la secuencia de puntos extremos que conducen a la solución óptima.

b) Resuélvalo con el algoritmo de acotamiento superior y demuestre que ese método llega a los mismos puntos extremos que la solución óptima gráfica (use TORA para generar las iteraciones).

c) ¿Cómo reconoce el algoritmo de acotamiento superior a los puntos extremos?

2. Resuelva el siguiente problema con el algoritmo de acotamiento:

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 10x_6$$

sujeta a

$$8x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 \le 13$$

$$0 \le x_j \le 1, j = 1,2,\ldots,6$$

3. Resuelva los siguientes problemas con el algoritmo de acotamiento:

a) Minimizar $z = 6x_1 - 2x_2 - 3x_3$

sujeta a

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 7$$

$$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 1$$

b) Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 15$$

$$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3$$

4. En los siguientes problemas, alguna de las variables tienen cotas inferiores positivas. Para resolverlos, use el algoritmo de acotamiento.

a) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3$
sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3$$
$$1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 3, 2 \leq x_3$$

b) Maximizar $z = x_1 + 2x_2$
sujeta a

$$-x_1 + 2x_2 \geq 0$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 1$$

c) Maximizar $z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$
sujeta a

$$4x_1 - x_2 \leq 9$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$-3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 12$$
$$1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 5, 0 \leq x_3 \leq 2$$

5. Considere la definición matricial del problema con variables acotadas; suponga que el vector $\mathbf{X}$ se separa en $(\mathbf{X}_z, \mathbf{X}_u)$, donde $\mathbf{X}_u$ representa las variables básicas *y también* las no básicas que se sustituyen en la cota superior. En consecuencia, el problema se puede escribir como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_z & -\mathbf{C}_u \\ 0 & \mathbf{D}_z & \mathbf{D}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X}_z \\ \mathbf{X}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Use $\mathbf{X}_u = \mathbf{U}_u - \mathbf{X}'_u$ donde $\mathbf{U}_u$ es un subconjunto de $\mathbf{U}$ que representa las cotas superiores de $\mathbf{X}_u$, y sea $\mathbf{B}$ (y $\mathbf{X}_B$) la base de la iteración símplex en el momento, después de haber eliminado por sustitución a $\mathbf{X}_u$. Demuestre que la tabla general símplex asociada es:

Básica	$\mathbf{X}_z^T$	$\mathbf{X}'^T_u$	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_z - \mathbf{C}_z$	$-\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_u + \mathbf{C}_u$	$\mathbf{C}_u\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' + \mathbf{C}_u\mathbf{U}_u$
$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_z$	$-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_u$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}'$

donde $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{D}_u\mathbf{U}_u$.

6. En el ejemplo 7.3-1, haga lo siguiente:

a) En la iteración 1, compruebe que $\mathbf{X}_B = (x_4, x_1)^T = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$ usando manipulaciones matriciales.

b) En la iteración 2, demuestre que se puede calcular $\mathbf{B}^{-1}$ a partir de los datos originales del problema. A continuación compruebe los valores dados de x_4 y x'_2 básicas, usando manipulaciones matriciales.

7. Resuelva la parte a) del problema 3 usando la versión (matricial) símplex modificada para variables con cota superior.

8. *Algoritmo dual símplex acotado.* El algoritmo dual símplex (Sección 4.4) se puede modificar como sigue, para tener en cuenta las variables acotadas. Dada la restricción de cota superior $x_j \leq u_j$ para toda j (si u_j es infinita, se reemplaza con una cota superior M suficientemente grande), la solución del programa lineal se convierte a la forma dual factible (es decir, primal óptima) usando la sustitución $x_j = u_j - x_j'$, cuando sea necesario.

Paso 1. Si alguna de las variables básicas actuales $(\mathbf{X}_B)_i$ es mayor que su cota superior, usar la sustitución $(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{U}_B)_i - (\mathbf{X}_B)_i'$. Seguir en el paso 2.

Paso 2. Si todas las variables básicas son factibles, detenerse. En caso contrario, seleccionar la variable saliente x_r como la que tenga el valor más negativo. Seguir en el paso 3.

Paso 3. Seleccionar la variable entrante aplicando la condición de optimalidad, del método símplex dual. Seguir en el paso 4.

Paso 4. Hacer un cambio de bases. Ir al paso 1.

Aplique el algoritmo descrito a los siguientes problemas:

a) Minimizar $z = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 13$$
$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1$$

b) Maximizar $z = x_1 + 5x_2 - 2x_3$

sujeta a

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 26$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 17$$
$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, x_3 \geq 0$$

7.4 ALGORITMO DE DESCOMPOSICIÓN

Imagine el caso de desarrollar un plan corporativo maestro para varias fábricas. Aunque cada fábrica tiene su capacidad y restricciones de producción propias e independientes, todas ellas están enlazadas a nivel corporativo por consideraciones presupuestales. El modelo que resulta incluye dos tipos de restricciones: *comunes*, que representan las restricciones presupuestales corporativas, e *independientes*, que representan las restricciones de capacidad interna y de producción de cada instalación. La figura 7.5 representa la distribución de las restricciones resultantes para n actividades (fábricas). En ausencia de las restricciones comunes, todas las actividades se hacen en forma independiente.

El algoritmo de descomposición mejora la eficiencia de cálculo para el problema que se ve en la figura 7.5, descomponiéndolo en n subproblemas que se pueden resolver casi en forma independiente. Sin embargo se debe decir que en el pasado estaba más justificada la necesidad del algoritmo de descomposición, cuando la velocidad y la memoria de las computadoras eran modestas. Hoy tienen posibilidades impresionantes, y posiblemente no sea imperativa la necesidad del algoritmo de descomposición. Empero, lo presentaremos aquí por su interesante aportación teórica.

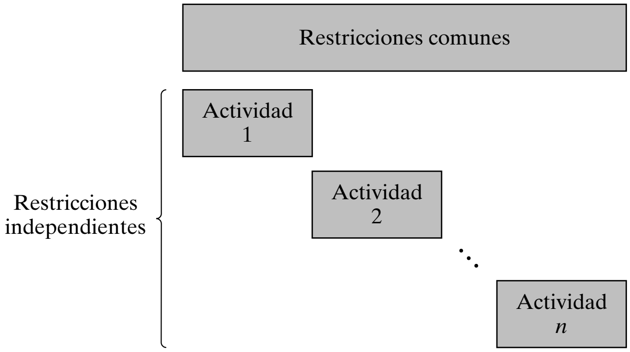


FIGURA 7.5
Distribución de una programación lineal descomponible

El modelo matemático correspondiente es:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{C}_n\mathbf{X}_n$$

sujeta a

$$\begin{array}{llll} \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{A}_n\mathbf{X}_n & \leq \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 & \leq \mathbf{b}_1 \\ \quad\quad \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2 & \leq \mathbf{b}_2 \\ \quad\quad\quad \ddots & \vdots \\ \quad\quad\quad\quad \mathbf{D}_n\mathbf{X}_n & \leq \mathbf{b}_n \end{array}$$

$$\mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}, \; j = 1,2,\dots, n$$

Se agregan las variables de holgura y de exceso que sean necesarias para convertir todas las desigualdades en ecuaciones.

El principio de descomposición se basa en representar todo el problema en función de los *puntos extremos* de los conjuntos $\mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j, \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}, j = 1,2, \dots, n$. Para hacerlo, se debe acotar el espacio de soluciones definido por cada $\mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j, \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}$. Siempre se puede satisfacer este requisito para cualquier conjunto *j*, agregando la restricción artificial $\mathbf{1X}_j \leq M$, siendo *M* suficientemente grande.

Supongamos que los puntos extremos de $\mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j, \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}$ se definen como $\hat{\mathbf{X}}_{jk}, k = 1,2, \dots, K_j$. Entonces,

$$\mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{K_j} \beta_{jk}\hat{\mathbf{X}}_{jk}, \; j = 1,2,\dots, n$$

donde $\beta_{jk} \geq 0$ para toda *k*, y $\sum_{k=1}^{k_j} \beta_{jk} = 1$.

Se puede reformular todo el problema en términos de los puntos extremos, para obtener el siguiente **problema maestro**:

$$\text{Maximizar } = \sum_{k=1}^{K_1} \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{1k}\beta_{1k} + \sum_{k=1}^{K_2} \mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{2k}\beta_{2k} + \dots + \sum_{k=1}^{K_n} \mathbf{C}_n\hat{\mathbf{X}}_{nk}\beta_{nk}$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{K_1} \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{X}}_{1k}\beta_{1k} + \sum_{k=1}^{K_2} \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_{2k}\beta_{2k} + \dots + \sum_{k=1}^{K_n} \mathbf{A}_n\hat{\mathbf{X}}_{nk}\beta_{nk} \le \mathbf{b}_0 \\
&\sum_{k=1}^{K_1} \beta_{1k} = 1 \\
&\sum_{k=1}^{K_2} \beta_{2k} = 1 \\
&\ddots \qquad \vdots \\
&\sum_{k=1}^{K_n} \beta_{nk} = 1 \\
&\beta_{jk} \ge 0, \text{ para toda } j \text{ y } k
\end{aligned}
$$

Las nuevas variables en el problema maestro son β_{jk}. Una vez determinados sus valores óptimos β^*_{jk}, se puede encontrar la solución óptima del problema original con la sustitución en reversa:

$$
\mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{K_j} \beta^*_{jk}\hat{\mathbf{X}}_{jk}, j = 1, 2, \dots, n
$$

Podrá parecer que la solución del problema maestro requiere una determinación anterior de *todos* los puntos extremos $\hat{\mathbf{X}}_{jk}$, ¡es una tarea verdaderamente difícil! Por fortuna no es así.

Para resolver el problema maestro con el método símplex modificado (Sección 7.2) se necesitan determinar las variables entrante y saliente en cada iteración. Comencemos con la variable entrante. Dadas $\mathbf{C}_B$ y $\mathbf{B}^{-1}$ de la base actual del problema maestro, entonces para β_{jk}, no básica:

$$
z_{jk} - c_{jk} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_{jk} - c_{jk}
$$

siendo

$$
c_{jk} = \mathbf{C}_j\hat{\mathbf{X}}_{jk} \text{ y } \mathbf{P}_{jk} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_j\hat{\mathbf{X}}_{jk} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Ahora, para decidir cuál de las variables β_{jk} (si es que hay alguna) debe entrar a la solución, se debe determinar

$$
z_{j^*k^*} - c_{j^*k^*} = \min_{\text{toda } j \text{ y } k} \{z_{jk} - c_{jk}\}
$$

Si $z_{j^*k^*} - c_{j^*k^*} < 0$, entonces, de acuerdo con el criterio de optimalidad en maximización, $\beta_{j^*k^*}$ debe entrar a la solución; de otra manera, el óptimo se ha alcanzado.

Todavía no se ha demostrado cómo se calcula numéricamente $z_{j^*k^*} - c_{j^*k^*}$. La idea reside en la siguiente identidad:

$$\min_{\text{toda } j \text{ y } k}\{z_{jk} - c_{jk}\} = \min_j\{\min_k\{z_{jk} - c_{jk}\}\}$$

La razón por la que se puede establecer esta identidad, es que cada conjunto convexo $\mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j$, $\mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}$ tiene su conjunto independiente de puntos extremos. De hecho, lo que indica la identidad es que se puede determinar $z_{j^*k^*} - c_{j^*k^*}$ en dos pasos:

Paso 1. Para cada conjunto convexo $\mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j, \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}$, determinar el punto extremo $\hat{\mathbf{X}}_{jk^*}$ que produzca el mínimo $z_{jk} - c_{jk}$; esto es, $z_{jk^*} - c_{jk^*} = \min_k\{z_{jk} - c_{jk}\}$.

Paso 2. Determinar $z_{j^*k^*} - c_{j^*k^*} = \min_j\{z_{jk^*} - c_{jk^*}\}$.

Sabemos, por la teoría de la programación lineal, que la solución óptima, cuando es finita, debe estar asociada a un punto extremo del espacio de soluciones. Como cada uno de los conjuntos $\mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j, \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}$ está acotado por definición, el paso 1 equivale matemáticamente a resolver n programas lineales de la forma

$$\text{Minimizar } w_j = \{z_j - c_j | \mathbf{D}_j\mathbf{X}_j \leq \mathbf{b}_j, \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}\}$$

En realidad, la función objetivo w_j es una función lineal en $\mathbf{X}_j$ (véase el problema 8, conjunto 7.4a).

La determinación de la variable entrante $\beta_{j^*k^*}$ en el problema maestro se reduce a resolver n programas lineales (menores) para determinar el punto extremo “entrante” $\hat{\mathbf{X}}_{j^*k^*}$. Este método evita la necesidad de determinar todos los puntos extremos de todos los n conjuntos convexos. Una vez ubicado el punto extremo que se desea, quedan a la mano todos los elementos del vector columna $\mathbf{P}_{j^*k^*}$. Con esa información ya se puede determinar la variable saliente y, a continuación, calcular la siguiente $\mathbf{B}^{-1}$ usando los cálculos del método símplex modificado.

Ejemplo 7.4-1

Resolver la siguiente programación lineal con el algoritmo de descomposición:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2 + x_4 + x_5$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 40 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_3 + x_4 &\geq 5 \\ x_3 + 5x_4 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema tiene dos subproblemas que corresponden a los siguientes conjuntos de variables:

$$\mathbf{X}_1 = (x_1, x_2)^T, \mathbf{X}_2 = (x_3, x_4)^T$$

El problema maestro correspondiente se puede representar así como sigue:

Subproblema 1				Subproblema 2				Solución básica de arranque			
β_{11}	β_{12}	$\ldots$	β_{1K_1}	β_{21}	β_{22}	$\ldots$	β_{2K_2}	x_5	x_6	x_7	
$\mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{11}$	$\mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{12}$	$\ldots$	$\mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{1K_1}$	$\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{21}$	$\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{22}$	$\ldots$	$\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{2K_2}$	0	$-M$	$-M$	
$\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{X}}_{11}$	$\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{X}}_{12}$	$\ldots$	$\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{X}}_{1K_1}$	$\mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_{21}$	$\mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_{22}$	$\ldots$	$\mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_{2K_2}$	1	0	0	= 40
1	1	$\ldots$	1	0	0	$\ldots$	0	0	1	0	= 1
0	0	$\ldots$	0	1	1	$\ldots$	1	0	0	1	= 1
$\mathbf{C}_1 = (3,5)$ $\mathbf{A}_1 = (1,1)$ Espacio de soluciones, $\mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{b}_1$: $5x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$				$\mathbf{C}_2 = (1,1)$ $\mathbf{A}_2 = (1,1)$ Espacio de soluciones, $\mathbf{D}_2\mathbf{X}_2 \leq \mathbf{b}_2$: $x_3 + x_4 \geq 5$ $x_3 + 5x_4 \leq 50$ $x_3, x_4 \geq 0$							

Observe que x_5 es la variable auxiliar que convierte la restricción común en la siguiente ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$$

Recuerde que los subproblemas 1 y 2 sólo tienen en cuenta las variables x_1, x_2, x_3 y x_4. Ésta es la razón por la que x_5 debe aparecer explícitamente en el problema maestro. Las variables básicas de arranque restantes, x_6 y x_7, son artificiales.

Iteración 0.

$$\mathbf{X}_B = (x_5, x_6, x_7)^T = (40, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{C}_B = (0, -M, -M), \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$$

Iteración 1.

Subproblema 1 ($j = 1$). Se tiene

$$z_1 - c_1 = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} - \mathbf{C}_1\mathbf{X}_1$$

$$= (0, -M, -M)\begin{pmatrix}(1,1)\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} - (3, 5)\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

$$= -3x_1 - 5x_2 - M$$

Así, la programación lineal correspondiente es

$$\text{Minimizar } w_1 = -3x_1 - 5x_2 - M$$

sujeta a

$$5x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución de este problema, con el método símplex, es

$$\hat{\mathbf{X}}_{11} = (0, 12)^T, z_1^* - c_1^* = w_1^* = -60 - M$$

Subproblema 2 ($j = 2$). La programación lineal asociada es

$$\begin{aligned}\text{Minimizar } z_2 - c_2 &= \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2\\0\\1\end{pmatrix} - \mathbf{C}_2\mathbf{X}_2\\ &= (0, -M, -M)\begin{pmatrix}(1,1)\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}\\0\\1\end{pmatrix} - (1,\ 1)\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}\\ &= -x_3 - x_4 - M\end{aligned}$$

sujeta a

$$x_3 + x_4 \geq 5$$
$$x_3 + 5x_4 \leq 50$$
$$x_3, x_4 \geq 0$$

La solución óptima del problema es

$$\hat{\mathbf{X}}_{21} = (50, 0)^T, z_2^* - c_2^* = -50 - M$$

Como el problema maestro es de maximización y $z_1^* - c_1^* < z_2^* - c_2^*$ y $z_1^* - c_1^* < 0$, entonces se deduce que β_{11} asociada con el punto extremo $\hat{\mathbf{X}}_{11}$ debe entrar a la solución. Para determinar la variable saliente,

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{X}}_{11}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1,1)\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\1\\0\end{pmatrix}$$

Así, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_{11} = (12, 1, 0)^T$. Dada $\mathbf{X}_B = (x_5, x_6, x_7)^T = (40, 1, 1)^T$, se ve que x_6 (una variable artificial) sale de la solución básica (en forma permanente).

La nueva base se determina reemplazando el vector asociado con x_6 por el vector $\mathbf{P}_{11}$, con lo cual se obtiene (¡verifíquelo!)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 12 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -12 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La nueva solución básica es

$$\mathbf{X}_B = (x_5, \beta_{11}, x_7)^T = \mathbf{B}^{-1}(40,1,1)^T = (28,1,1)^T$$
$$\mathbf{C}_B = (0, \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{11}, -M) = (0,60,-M)$$

Iteración 2.

Subproblema 1 ($j = 1$). La función objetivo asociada es

$$\text{Minimizar } w_1 = -3x_1 - 5x_2 + 60$$

(¡compruébelo!). La solución óptima produce $z_1^* - c_1^* = w_1 = 0$, lo que quiere decir que ninguno de los puntos extremos restantes en el subproblema 1 puede mejorar la solución en el problema maestro.

Subproblema 2 ($j = 2$). La función objetivo asociada es (en forma coincidente) la misma que para $j = 2$ en la iteración 1 (¡compruébelo!). La solución óptima produce

$$\hat{\mathbf{X}}_{22} = (50,0)^T, z_2^* - c_2^* = -50 - M$$

Observe que en realidad $\hat{\mathbf{X}}_{22}$ es el mismo punto extremo que $\hat{\mathbf{X}}_{21}$. Se usará el subíndice 2 por conveniencia en la notación, para representar la iteración 2.

De los resultados de los dos subproblemas, $z_2^* - c_2^* < 0$ indica que β_{22} asociada con $\hat{\mathbf{X}}_{22}$ entra a la solución básica.

Para determinar la solución saliente, se considera

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1)\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_{22} = (50,0,1)^T$. Como $\mathbf{X}_B = (x_5, \beta_{11}, x_7)^T = (28,1,1)^T, x_5$ sale.

La nueva base y su inversa son las siguientes (¡compruébelo!)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 50 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{50} & -\frac{12}{50} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{50} & \frac{12}{50} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = (\beta_{22}, \beta_{11}, x_7)^T = \mathbf{B}^{-1}(40,1,1)^T = (\tfrac{14}{25}, 1, \tfrac{11}{25})^T$$
$$\mathbf{C}_B = (\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{22}, \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{11}, -M) = (50,60,-M)$$

Iteración 3.

Subproblema 1 ($j = 1$). El lector debe verificar que la solución objetivo asociada es

$$\text{Minimizar } w_1 = (\tfrac{M}{50} - 2)x_1 + (\tfrac{M}{50} - 4)x_2 - \tfrac{12M}{50} + 48$$

La solución óptima asociada es

$$\hat{\mathbf{X}}_{13} = (0,0)^T, z_1^* - c_1^* = -\tfrac{12M}{50} + 48$$

Subproblema 2 ($j = 2$). Se puede demostrar (¡compruébelo!) que la función objetivo es

$$\text{Minimizar } w_2 = (\tfrac{M}{50})(x_3 + x_4) - M$$

La solución óptima asociada es

$$\hat{\mathbf{X}}_{23} = (5,0)^T, z_2^* - c_2^* = -\tfrac{9M}{10}$$

Variable x_5 ***no básica***. Según la definición del problema maestro, $z_j - c_j$ de x_5 debe calcularse y compararse por separado. Entonces,

$$\begin{aligned} z_5 - c_5 &= \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_5 - c_5 \\ &= (1 + \tfrac{M}{50}, 48 - \tfrac{12M}{50}, -M)(1,0,0)^T - 0 \\ &= 1 + \tfrac{M}{50} \end{aligned}$$

Por lo anterior, x_5 no puede mejorar la solución.

Según la información anterior, la β_{23} asociada con $\hat{\mathbf{X}}_{23}$ entra a la solución básica. Para determinar la variable saliente se considera

$$\mathbf{P}_{23} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{X}}_{23} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1)\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_{23} = (\tfrac{1}{10}, 0, \tfrac{9}{10})^T$. Dado que $\mathbf{X}_B = (\beta_{22}, \beta_{11}, x_7)^T = (\tfrac{14}{25}, 1, \tfrac{11}{25})^T$, la variable artificial x_7 sale (en forma permanente) de la solución básica.

Entonces la nueva base y su inversa son (¡compruébelo!)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 50 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{45} & -\tfrac{12}{45} & -\tfrac{5}{45} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tfrac{1}{45} & \tfrac{12}{45} & \tfrac{50}{45} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = (\beta_{22}, \beta_{11}, \beta_{23})^T = \mathbf{B}^{-1}(40,1,1)^T = (\tfrac{23}{45}, 1, \tfrac{22}{45})^T$$

$$\mathbf{C}_B = (\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{22}, \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{X}}_{11}, \mathbf{C}_2\hat{\mathbf{X}}_{23}) = (50, 60, 5)$$

Iteración 4.

Subproblema 1 ($j = 1$). $w_1 = -2x_1 - 4x_2 + 48$. Da como resultado $z_1^* - c_1^* = w_1^* = 0$.

Subproblema 2 ($j = 2$). $w_2 = 0x_3 + 0x_4 + 48 = 48$.

Variable no básica $x_5 : z_5 - c_5 = 1$. La información anterior indica que la iteración 3 es óptima.

Se puede calcular la solución óptima del problema original por sustitución en reversa:

$$\mathbf{X}_1^* = (x_1, x_2)^T = \beta_{11}\hat{\mathbf{X}}_{11} = 1(0,12)^T = (0,12)^T$$

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_2^* = (x_3, x_4)^T &= \beta_{22}\hat{\mathbf{X}}_{22} + \beta_{23}\hat{\mathbf{X}}_{23} \\ &= \left(\tfrac{23}{45}\right)(50,0)^T + \left(\tfrac{22}{45}\right)(5,0)^T \\ &= (28,0)^T\end{aligned}$$

El valor óptimo de la función objetivo se puede obtener por sustitución directa.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.4A

1. En cada uno de los casos siguientes, determine en forma gráfica los puntos extremos factibles, y exprese el espacio de soluciones factibles en función de esos puntos extremos. Si el espacio de soluciones no está acotado, agregue una restricción adecuada de variable artificial.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 \quad &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. En el ejemplo 7.4-1, los puntos extremos factibles de los subespacios $\mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 = \mathbf{b}_1, \mathbf{X}_1 \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{D}_2\mathbf{X}_2 = \mathbf{b}_2, \mathbf{X}_2 \geq \mathbf{0}$ se pueden determinar en forma gráfica. Use esta información para expresar en forma explícita el problema maestro asociado. A continuación demuestre que la aplicación del método símplex al problema maestro produce la misma variable entrante β_{jk} que la que se genera resolviendo los subproblemas 1 y 2. Convénzase el lector así de que la determinación de la variable entrante β_{jk} equivale exactamente a resolver los dos problemas de minimización.

3. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \qquad\qquad &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &\leq 9 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad &\geq 10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 - 5x_4 &\leq 4 \\
x_3 + \ \ x_4 &\leq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Construya el problema maestro en forma explícita usando los puntos extremos de los subespacios, y a continuación resuelva el problema obtenido en forma directa con el método símplex.

4. Resuelva el problema 3 usando el algoritmo de descomposición, y compare los dos procedimientos.

5. Aplique el algoritmo de descomposición al siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 + x_6$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 50 \\
x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_2 &\leq 8 \\
5x_3 + x_4 &\leq 12 \\
x_5 + x_6 &\geq 5 \\
x_5 + 5x_6 &\leq 50 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

6. Indique los cambios necesarios para aplicar el algoritmo de descomposición a programas lineales de minimización. A continuación resuelva el siguiente problema:

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 5x_4$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 + x_3 + x_4 &\geq 25 \\
5x_1 + x_2 &\leq 20 \\
5x_1 - x_2 &\geq 5 \\
x_3 + x_4 &= 20 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

7. Resuelva el siguiente problema con el algoritmo de descomposición:

$$\text{Minimizar } z = 10y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4 + y_5$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
y_1 + 4y_2 - y_3 &\geq 8 \\
2y_1 + y_2 + y_3 &\geq 2 \\
3y_1 + y_4 + y_5 &\geq 4 \\
y_1 + 2y_4 - y_5 &\geq 10 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(*Sugerencia:* resuelva primero el problema dual por descomposición.)

8. En el algoritmo de descomposición suponga que la cantidad de restricciones en el problema original es r. Demuestre que la función objetivo del problema j se puede expresar como

$$\text{Maximizar } w_j = z_j - c_j = (\mathbf{C}_B\mathbf{R}\mathbf{A}_j - \mathbf{C}_j)\mathbf{X}_j + \mathbf{C}_B\mathbf{V}_{r+j}$$

El vector $\mathbf{R}$ representa las primeras r columnas de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{V}_{r+j}$ es su $(r + j)$ ésima columna.

7.5 DUALIDAD

Hemos manejado el problema dual a un nivel elemental en el capítulo 4. En esta sección se presenta un tratamiento más riguroso de la dualidad, que nos permite verificar las relaciones primal-dual que formaban la base del análisis de sensibilidad en el capítulo 4. también esta presentación establece las bases del desarrollo de la programación paramétrica.

7.5.1 Definición matricial del problema dual

Suponga que el problema primal, en forma de ecuación con m restricciones y n variables se define como sigue:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX}$$

sujeta a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Si el vector $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ representa las variables duales, las reglas de la tabla 4.2 producen el siguiente problema dual:

$$\text{Minimizar } w = \mathbf{Yb}$$

sujeta a

$$\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$$

$$\mathbf{Y} \text{ no restringida}$$

Observe que algunas de las restricciones $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$ pueden saltarse la $\mathbf{Y}$ no restringida.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.5A

1. Demuestre que el dual del dual es el primal.
2. Suponga que el primal es mín $z = \{\mathbf{CX} | \mathbf{AX} \geq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}\}$. Defina el problema dual correspondiente.

7.5.2 Solución dual óptima

En esta sección se establecen las relaciones entre los problemas primal y dual, y se indica cómo se puede determinar la solución dual óptima a partir de la solución primal óptima. Sea $\mathbf{B}$ la base primal *óptima* actual, y defínase $\mathbf{C}_B$ como los coeficientes de la función objetiva asociados con el vector óptimo $\mathbf{X}_B$.

Teorema 7.5-1. (Teorema de la dualidad débil.) *Para cualquier par de soluciones* factibles *primal y dual* $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, *el valor de la función objetivo en el problema de* minimización *establece una cota superior al valor de la función objetiva en el problema de* maximización. *Para el par* óptimo $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$, *los valores de las funciones objetivo en los dos problemas son iguales*.

Demostración. El par factible (X, Y) satisface todas las restricciones de los dos problemas. Al "premultiplicar" ambos lados de las restricciones del problema de maximización por Y (no restringida), se obtiene

$$\mathbf{YAX} = \mathbf{Yb} = w \tag{1}$$

También, para el problema de minimización, al "postmultiplicar" ambos lados por $\mathbf{X}(\geq \mathbf{0})$, se obtiene

$$\mathbf{YAX} \geq \mathbf{CX}$$

o bien

$$\mathbf{YAX} \geq \mathbf{CX} = z \tag{2}$$

(Es esencial la no negatividad del vector **X** para mantener la dirección de la desigualdad.) Al combinar las ecuaciones (1) y (2) se obtiene $z \leq w$ para cualquier par *factible* $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Nótese que el teorema *no* depende de etiquetar a los problemas como primal o dual. Lo que importa es el sentido de la optimización en cada problema. En forma específica, para cualquier par de soluciones factibles, el valor objetivo en el problema de maximización no es mayor que el valor objetivo en el problema de minimización.

La implicación del teorema es que dada $z \leq w$ para toda solución factible, el máximo de z y el mínimo de w se alcanzan cuando los dos valores objetivo son iguales. Una consecuencia de este resultado es que la "bondad" de cualesquiera soluciones primales y duales dadas, en relación con el óptimo, se puede verificar comparando la diferencia $(w - z)$ con $\frac{z + w}{2}$. Mientras menor sea la relación $\frac{2(w - z)}{z + w}$, las dos soluciones se acercarán más a ser óptimas. La *regla fácil* que se sugiere *no* implica que el valor objetivo óptimo sea $\frac{z + w}{2}$.

¿Qué sucede si uno de los dos problemas tiene un valor objetivo no acotado? La respuesta es que el otro problema debe ser no factible. Porque si no lo fuera, ambos problemas tiene soluciones factibles y debe seguir vigente la relación $z \leq w$; esto es imposible, porque se supuso que $z = +\infty$ o $w = -\infty$ por suposición.

La siguiente pregunta es: si un problema es no factible, ¿el otro problema es no acotado? No necesariamente. El siguiente contraejemplo demuestra que el primal y el dual pueden ser no factibles al mismo tiempo (¡compruébelo gráficamente!):

Primal. Maximizar $z = \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 - x_2 \leq -1, -x_1 + x_2 \leq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$

Dual. Minimizar $w = \{-y_1 - y_2 \,|\, y_1 - y_2 \geq 1, -y_1 + y_2 \geq 1, y_1, y_2 \geq 0\}$

Teorema 7.5-2. *Dada la base primal* óptima **B** *y su vector asociado de coeficientes de objetivo* $\mathbf{C}_B$, *la solución óptima del problema dual es*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$$

Demostración. Esta demostración se basa en verificar dos puntos: que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ es una solución dual factible, y que $z = w$ según el teorema 7.5-1.

La factibilidad de $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ está garantizada por la optimalidad del primal $z_j - c_j \geq 0$ para toda j; esto es,

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{C} \geq \mathbf{0}$$

(véase la sección 7.2.1). Así, $\mathbf{YA} - \mathbf{C} \geq \mathbf{0}$ o $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$, lo que demuestra que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ es una solución dual factible.

A continuación demostraremos que la w asociada es $w = z$ observando que

$$w = \mathbf{Yb} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (1)$$

De igual modo, dada la solución primal $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, se obtiene

$$z = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (2)$$

De acuerdo con las ecuaciones (1) y (2) se concluye que $z = w$.

A veces se les llama *multiplicadores símplex* a las variables $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$. También se les llama *precios sombra*, nombre que se originó en la interpretación económica de las variables duales (véase la sección 4.3.1).

Dado que $\mathbf{P}_j$ es la j-ésima columna de $\mathbf{A}$, se observa, por el teorema 7.5-2, que

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j = \mathbf{YP}_j - c_j$$

representa la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales. El primal de maximización comienza con $z_j - c_j < 0$ para cuando menos una j, lo que quiere decir que la restricción dual correspondiente, $\mathbf{YP}_j \geq c_j$, no se satisface. Cuando se llega a la primal óptima se obtiene $z_j - c_j \geq 0$, para toda j, que quiere decir que la solución dual correspondiente $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ se vuelve factible. Se llega a la conclusión que mientras el primal busca la optimalidad, el dual busca automáticamente la factibilidad. Este punto es la base para desarrollar el *método dual símplex* (o *símplex dual*, sección 4.4) en el que las iteraciones comienzan mejores que la óptima, y son no factibles, y permanecen así hasta que en la última iteración se adquiere la factibilidad. Esto es un contraste con el método símplex (primal, capítulo 3), que sigue siendo peor que lo óptimo, pero factible, hasta que se llega a la iteración óptima.

Ejemplo 7.5-1

La base *óptima* para el siguiente problema lineal es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$. Escribir el dual y determinar su solución óptima usando la base primal óptima.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

El problema dual se plantea como

$$\text{Minimizar } w = 5y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$y_1 - y_2 \geq 3$$
$$2y_1 + 3y_2 \geq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

En este caso $\mathbf{X}_B = (x_1, x_4)^T$; en consecuencia $\mathbf{C}_B = (3, 0)$. La base óptima y su inversa son

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores primal y dual asociados son

$$(x_1, x_4)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (5, 7)^T$$
$$(y_1, y_2) = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} = (3, 0)$$

Ambas soluciones son factibles y $z = w = 15$ (¡compruébelo!). Así, las dos soluciones son óptimas.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.5B

1. Compruebe que el problema dual del ejemplo numérico que está al terminar el teorema 7.5-1 es correcto. A continuación verifique gráficamente que tanto el problema primal como el dual no tienen solución factible.

2. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 50x_1 + 30x_2 + 10x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$2x_2 = -5$$
$$4x_1 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Escriba el dual.

b) Demuestre, por inspección, que el primal es no factible.

c) Demuestre que el dual en a) no está acotado.

d) Partiendo de los problemas 1 y 2, deduzca una conclusión general acerca de la relación entre la no factibilidad y la no acotación en los problemas primal y dual.

3. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

a) Escriba el dual.

b) En cada uno de los casos siguientes, verifique primero que la base dada **B** sea factible para el primal. A continuación use $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$, para calcular los valores del dual asociado y compruebe si la solución primal es óptima o no.

i) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3)$ **iii)** $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$

ii) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ **iv)** $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$

4. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 + + x_4 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Escriba el problema dual.

b) Compruebe que $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ sea óptima calculando $z_j - c_j$ para toda $\mathbf{P}_j$ no básica.

c) Determine la solución dual óptima asociada.

5. Un modelo de programación lineal tiene dos variables, x_1 y x_2, y tres restricciones del tipo $\leq$. Las holguras asociadas son x_3, x_4 y x_5. Suponga que la base óptima es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, y que la inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las soluciones óptimas, primal y dual, son

$$\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, 6, 2)^T$$

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3) = (0, 3, 2)$$

Determine el valor óptimo de la función objetivo, con dos métodos, usando los problemas primal y dual.

6. Demuestre la siguiente relación entre las soluciones óptimas primal y dual:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} c_i(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_k)_i = \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ik}$$

donde $\mathbf{C}_B = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ y $\mathbf{P}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})^T$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, y $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_k)_i$ es el i-ésimo elemento de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_k$.

7. Escriba el dual de

$$\text{Maximizar } z = \{\mathbf{CX} \mid \mathbf{AX} = \mathbf{b},\ \mathbf{X} \text{ sin restricciones}\}$$

8. Demuestre que el dual de

$$\text{Maximizar } z = \{\mathbf{CX} \mid \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{0} < \mathbf{L} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}\}$$

siempre posee una solución factible.

7.6 PROGRAMACIÓN LINEAL PARAMÉTRICA

La programación lineal paramétrica es una extensión de los procedimientos de análisis de sensibilidad que se presentaron en la sección 4.5. Investiga el efecto de variaciones continuas

predeterminadas en los coeficientes de la función objetivo, y el lado derecho de las restricciones, sobre la solución óptima.

Supongamos que el problema lineal se define como

$$\text{Maximizar } z = \left\{ \mathbf{CX} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \right\}$$

En el análisis paramétrico se reemplazan la función objetivo **C** y los vectores del lado derecho **b** por las funciones parametrizadas **C**(t) y **b**(t), siendo t el parámetro de variación. Desde el punto de vista matemático, t puede tener cualquier valor positivo o negativo. Sin embargo, en la práctica t suele representar al tiempo, por lo que sólo asume valores no negativos. En esta explicación supondremos que $t \geq 0$.

La idea general del análisis paramétrico es iniciar con la solución óptima en $t = 0$. Después, usando las condiciones de optimalidad y factibilidad del método símplex se determina el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ para el cual la solución permanece óptima y factible en $t = 0$. En este caso, a t_1 se le llama **valor crítico**. El proceso continúa determinando valores críticos sucesivos y sus soluciones óptimas factibles correspondientes. Termina el proceso en $t = t_r$ cuando hay indicación ya sea de que la última solución permanece sin cambio para $t > t_r$ o que no existe solución factible más allá de ese valor crítico.

7.6.1 Cambios paramétricos en C

Sean $\mathbf{X}_{B_i}, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_{B_i}(t)$ los elementos que definen la solución óptima asociada con t_i crítico (los cálculos se inician en $t_0 = 0$ con $\mathbf{B}_0$ como su base óptima). A continuación se determina el valor t_{i+1} y su base óptima, si existe. Como los cambios en **C** sólo pueden afectar la optimalidad del problema, la solución actual $\mathbf{X}_{B_i} = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{b}$ permanecerá óptima para alguna $t \geq t_i$ siempre que se satisfaga la siguiente condición de optimalidad:

$$z_j(t) - c_j(t) = \mathbf{C}_{B_i}(t)\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t) \geq 0, \text{ para toda } j$$

El valor de t_{i+1} es igual a la $t > t_i$ máxima que satisface todas las condiciones de optimalidad.

Observe que *nada* en las desigualdades pide que **C**(t) sea lineal en t. Es aceptable toda función **C**(t), lineal o no lineal. Sin embargo, con la no linealidad la manipulación numérica de las desigualdades resultantes puede ser tediosa (véase una ilustración del caso no lineal en el problema 5, conjunto de problemas 7.6a).

Ejemplo 7.6-1

$$\text{Maximizar } z = (3 - 6t)x_1 + (2 - 2t)x_2 + (5 + 5t)x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 60 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\mathbf{C}(t) = (3 - 6t, 2 - 2t, 5 + 5t), t \geq 0$$

Las variables x_4, x_5 y x_6 son holguras.

Solución óptima en $t = t_0 = 0$

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	160
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	2	0	0	-2	1	1	10

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T = (5, 30, 10)^T$$
$$\mathbf{C}_{B_0}(t) = (2 - 2t, 5 + 5t, 0)$$
$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de optimalidad para los vectores no básicos $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ actuales son

$$\{\mathbf{C}_{B_0}(t)\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t)\}_{j=1,4,5} = (4 + 14t, 1 - t, 2 + 3t) \geq \mathbf{0}$$

Así, $\mathbf{X}_{B_0}$ permanece óptima siempre que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$4 + 14t \geq 0$$
$$1 - t \geq 0$$
$$2 + 3t \geq 0$$

Como $t \geq 0$, la segunda desigualdad estipula que $t \leq 1$ y las otras dos desigualdades se satisfacen para toda $t \geq 0$. Entonces se tiene que $t_1 = 1$, y eso significa que $\mathbf{X}_{B_0}$ permanece óptima (y factible) para $0 \leq t \leq 1$.

En $t = 1$, $z_4(t) - c_4(t) = 1 - t$ es igual a cero y se vuelve negativo para $t > 1$. Así, $\mathbf{P}_4$ debe entrar a la base para $t > 1$. En este caso, $\mathbf{P}_2$ debe salir de la base (véase el cuadro óptimo en $t = 0$). La nueva solución básica $\mathbf{X}_{B_1}$ es la solución alternativa obtenida en $t = 1$ haciendo que $\mathbf{P}_4$ entre a la base; esto es, $\mathbf{X}_{B_1} = (x_4, x_3, x_6)^T$ y $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_6)$.

Base óptima alternativa en $t = t_1 = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_4, x_3, x_6)^T = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = (10, 30, 30)^T$$
$$\mathbf{C}_{B_1}(t) = (0, 5 + 5t, 0)$$

Los vectores no básicos asociados son $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_5$, y entonces

$$\{\mathbf{C}_{B_1}(t)\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t)\}_{j=1,2,5} = \left(\tfrac{9 + 27t}{2}, -2 + 2t, \tfrac{5 + 5t}{2}\right) \geq \mathbf{0}$$

De acuerdo con estas condiciones, la solución básica $\mathbf{X}_{B_1}$ permanece óptima para toda $t \geq 1$. Observe que la condición de optimalidad $-2 + 2t \geq 0$, "recuerda" automáticamente que

$\mathbf{X}_{B_1}$ es óptima para un intervalo de t que comienza en el último valor crítico $t_1 = 1$. Éste siempre será el caso en los cálculos de programación paramétrica.

La solución óptima para todo el intervalo de t se resume a continuación. El valor de z se calcula por sustitución directa.

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \le t \le 1$	0	5	30	$160 + 140t$
$t \ge 1$	0	0	30	$150 + 150t$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.6A

1. En el ejemplo 7.6-1, suponga que t tiene signo no restringido. Determine el intervalo de t para el cual $\mathbf{X}_{B_0}$ permanece óptima.

2. Resuelva el ejemplo 7.6-1, suponiendo que la función objetivo es la siguiente:

a) Maximizar $z = (3 + 3t)x_1 + 2x_2 + (5 - 6t)x_3$

b) Maximizar $z = (3 - 2t)x_1 + (2 + t)x_2 + (5 + 2t)x_3$

c) Maximizar $z = (3 + t)x_1 + (2 + 2t)x_2 + (5 - t)x_3$

3. Estudie la variación de la solución óptima en la programación lineal parametrizado, cuando $t \ge 0$.

$$\text{Minimizar } z = (4 - t)x_1 + (1 - 3t)x_2 + (2 - 2t)x_3$$

sujeta a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

4. El análisis de esta sección supuso que la solución óptima del programa lineal en $t = 0$ se obtiene con el método símplex (primal). En algunos problemas podrá convenir más obtener la solución óptima con el método símplex dual (Sección 4.4). Demuestre cómo se puede hacer el análisis paramétrico en este caso, y a continuación analice el programa lineal del ejemplo 4.4-1, suponiendo que la función objetivo es

$$\text{Minimizar } z = (3 + t)x_1 + (2 + 4t)x_2, \quad t \ge 0$$

5. En el ejemplo 7.6-1 suponga que la función objetivo es no lineal en $t (t \ge 0)$ y que se define así:

$$\text{Maximizar } z = (3 + 2t^2)x_1 + (2 + 2t^2)x_2 + (5 - t)x_3$$

Determine el primer valor crítico t_1.

7.6.2 Cambios paramétricos en b

El lado derecho $\mathbf{b}(t)$ parametrizado sólo puede afectar la factibilidad del problema. Los valores críticos de t se determinan entonces a partir de la siguiente condición:

$$\mathbf{X}_B(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t) \ge \mathbf{0}$$

Ejemplo 7.6-2

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 - t \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 60 + 2t \\ x_1 + 4x_2 &\leq 30 - 7t \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

suponiendo que $t \geq 0$.

En $t = t_0 = 0$, el problema es idéntico con el del ejemplo 7.6-1. Entonces se tiene

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T = (5, 30, 10)^T$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar el primer valor crítico t_1, se aplica la condición $\mathbf{X}_{B_0}(t) = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}(t) \geq 0$ con lo que se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estas desigualdades se satisfacen para $t \leq \frac{10}{3}$, lo que significa que $t_1 = \frac{10}{3}$ y que la base $\mathbf{B}_0$ permanece factible en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{10}{3}$. Sin embargo, los valores de las variables básicas cambian en función de t, como se describió arriba.

El valor de la variable básica x_6 $(=10 - 3t)$ será igual a cero en $t = t_1 = \frac{10}{3}$ y se volverá negativo para $t > \frac{10}{3}$. Así, en $t = \frac{10}{3}$, se puede determinar la base alternativa $\mathbf{B}_1$ aplicando el método símplex dual modificado (véanse los detalles en el problema 5, conjunto 7.2b). La variable saliente es x_6.

Base alternativa en $t = t_1 = \frac{10}{3}$

Dado que x_6 es la variable saliente, se determinará como sigue la variable entrante:

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T, \mathbf{C}_{B_0} = (2, 5, 0)$$

Así,

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,4,5} = \{\mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\}_{j=1,4,5} = (4, 1, 2)$$

A continuación, para $x_j, j = 1, 4, 5$, no básica, se calcula

$$\begin{aligned} (\text{Renglón de } \mathbf{B}_0^{-1} \text{ asociada con } x_6)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) &= (\text{Tercer renglón de } \mathbf{B}_0^{-1})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) \\ &= (-2, 1, 1)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) \\ &= (2, -2, 1) \end{aligned}$$

Así, la variable entrante está asociada con

$$\theta = \text{mín}\left\{-, \left|\frac{1}{-2}\right|, -\right\} = \frac{1}{2}$$

Entonces, el vector entrante es $\mathbf{P}_4$.

La base alternativa es

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La nueva $\mathbf{X}_{B_1} = (x_2, x_3, x_4)^T$.

El siguiente valor crítico t_2 se determina con la condición $\mathbf{X}_{B_1}(t) = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}(t) \geq \mathbf{0}$, con lo que se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30 - 7t}{4} \\ 30 + t \\ \frac{-10 + 3t}{2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estas condiciones indican que $\mathbf{B}_1$ permanece factible cuando $\frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7}$.

En $t = t_2 = \frac{30}{7}$, se puede obtener una base alternativa con el método símplex dual modificado. La variable saliente es x_2, porque corresponde a la condición que produce el valor crítico t_2.

Base alternativa en $t = t_2 = \frac{30}{7}$

Ya que x_2 es la variable saliente, se determina la variable entrante como sigue:

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_2, x_3, x_4)^T, \mathbf{C}_{B_1} = (2, 5, 0)$$

Así,

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,5,6} = \{\mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\}_{j=1,5,6} = (5, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2})$$

A continuación, para no básica, x_j, $j = 1, 5, 6$, se calcula

$$\begin{aligned}(\text{Renglón de } \mathbf{B}_1^{-1} \text{asociado con } x_2)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) &= (\text{Primer renglón de } \mathbf{B}_1^{-1})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) \\ &= (0, 0, \tfrac{1}{4})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) \\ &= (\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4})\end{aligned}$$

Como todos los elementos del denominador, $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$, son ≥ 0, el problema no tiene solución factible para $t > \frac{30}{7}$ y el análisis paramétrico termina en $t = t_2 = \frac{30}{7}$.

La solución óptima se resume como sigue:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq \frac{10}{3}$	0	$5 - t$	$30 + t$	$160 + 3t$
$\frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7}$	0	$\frac{30 - 7t}{4}$	$30 + t$	$165 + \frac{3}{2}t$
$t > \frac{30}{7}$	(No existe solución factible)			

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.6B

1. En el ejemplo 7.6-2 determine t_1, el primer valor crítico, y defina los vectores de $\mathbf{B}_1$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $\mathbf{b}(t) = (40 + 2t, 60 - 3t, 30 + 6t)^T$

b) $\mathbf{b}(t) = (40 - t, 60 + 2t, 30 - 5t)^T$

2. Estudie la variación de la solución óptima del programa lineal parametrizado siguiente, para $t \geq 0$.

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$3x_1 + x_1 + 2x_3 = 3 + 3t$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6 + 2t$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 4 - t$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. En el análisis de esta sección se supuso que la solución óptima de la programación lineal en $t = 0$ se obtiene con el método símplex (primal). En algunos problemas podrá convenir más obtener la solución óptima con el método símplex dual (Sección 4.4). Indique cómo se puede hacer el análisis paramétrico en este caso, y a continuación analice el programa lineal del ejemplo 4.4-1, suponiendo que el vector del lado derecho es

$$\mathbf{b}(t) = (3 + 2t, 6 - t, 3 - 4t)^T$$

Suponga que $t \geq 0$.

4. Resuelva el problema 3, suponiendo que se cambia el lado derecho a

$$\mathbf{b}(t) = (3 + 3t^2, 6 + 2t^2, 4 - t^2)^T$$

Además suponga que t puede ser positivo, cero o negativo.

7.7 MÉTODO DEL PUNTO INTERIOR DE KARMARKAR

Con el método símplex se obtiene una solución óptima siguiendo una ruta de puntos extremos adyacentes, a lo largo de las orillas del espacio de soluciones. Aunque en la práctica el método símplex ha funcionado bien para resolver problemas grandes, la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la solución óptima puede crecer en forma exponencial, teóricamente. De hecho, los investigadores han construido una clase de programas lineales en los que todos los puntos extremos factibles se visitan antes de llegar al óptimo.

N. Karmarkar desarrolló en 1984 un algoritmo polinomial en el tiempo, que cruza el interior del espacio de soluciones. Este algoritmo es eficaz para programas lineales extremadamente grandes.

Comenzaremos presentando la idea principal del método de Karmarkar, para después describir los detalles de cómputo del algoritmo.

7.7.1 Idea básica del algoritmo del punto interior

Considérese el siguiente ejemplo (trivial):

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeta a

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

Si se usa x_2 como variable auxiliar, se puede reexpresar el problema como sigue:

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 7.6 ilustra el problema. El espacio de soluciones se define por el segmento de recta *AB*. La dirección de aumento de z es la dirección positiva de x_1.

Comencemos con cualquier punto *interior* (no extremo) *C* en el espacio factible (línea *AB*). El **gradiente** de la función objetivo (maximizar $z = x_1$) en *C* es la del aumento más rápido de z. Si se ubica un punto arbitrario a lo largo del gradiente y a continuación se proyecta perpendicularmente sobre el espacio factible (línea *AB*), se obtiene el nuevo punto *D*, con mejor valor objetivo z. Esa mejora se obtiene moviéndose en la dirección del **gradiente proyectado** *CD*. Si se repite el procedimiento en *D*, se determinará un nuevo punto *E* más cercano al óptimo. Se puede uno imaginar que si se mueve uno (con cuidado) en la dirección del gradiente proyectado, se "tropezará" con el punto óptimo *B*. Si se está minimizando a z (en lugar de maximizarla), el gradiente proyectado nos *alejará* del punto *B* hacia el mínimo, en el punto $A\ (x_1 = 0)$.

Los pasos que se dieron difícilmente definen un algoritmo en el sentido normal, pero ¡la idea es intrigante! Se necesitan ciertas modificaciones que garanticen que 1) los pasos generados a lo largo del gradiente no "se pasen" del punto óptimo en B, y 2) en el caso general n dimensional, la dirección definida por el gradiente proyectado no cause un "empantanamiento" del

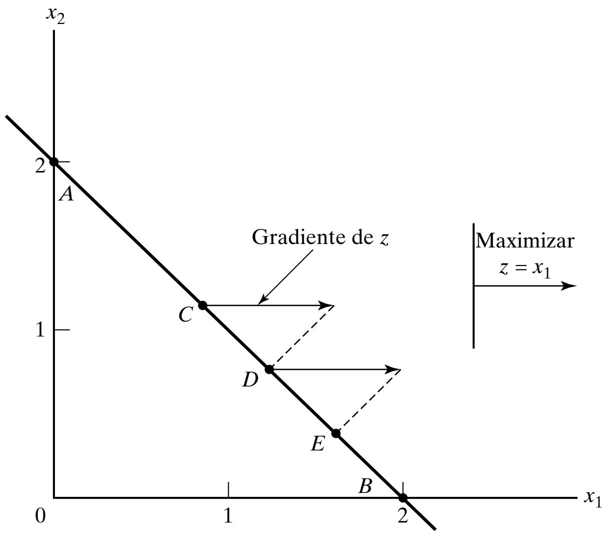


FIGURA 7.6

Ilustración del concepto general del algoritmo de Karmarkar

algoritmo en un punto no óptimo. Esto es, básicamente, lo que se logra con el algoritmo del punto interior de Karmarkar.

7.7.2 Algoritmo del punto interior

En las publicaciones se pueden encontrar algunas variantes del algoritmo de Karmarkar. Nuestra explicación se apega al algoritmo original. Karmarkar supone que la programación lineal es

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{CX}$$

sujeta a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1X} = 1$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Todas las restricciones son ecuaciones homogéneas, a excepción de la restricción $\mathbf{1X} = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, que define un símplex n dimensional. La validez del algoritmo de Karmarkar descansa en satisfacer dos condiciones:

1. $\mathbf{X} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ satisface $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$
2. mín $z = 0$

Karmarkar proporciona modificaciones que permiten resolver el problema cuando no se satisface la segunda condición. No presentaremos aquí esas modificaciones.

En el siguiente ejemplo se ilustra cómo se puede poner una programación lineal general en la forma homogénea $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{1X} = 1$, con lo cual también se tiene a $\mathbf{X} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ como solución factible (condición 1). En un segundo ejemplo se muestra cómo se puede hacer que la transformación satisfaga las dos condiciones, aunque los cálculos son tediosos.

Ejemplo 7.7-1

Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } z = y_1 + y_2$$

sujeta a

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

La restricción $y_1 + 2y_2 \leq 2$ se convierte en una ecuación aumentando una variable de holgura $y_3 \geq 0$ y se tiene

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 2$$

Ahora se define

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq U$$

donde U es suficientemente grande para no eliminar algunos puntos factibles en el espacio original de soluciones. En nuestro ejemplo $U = 5$ será adecuado, lo que se puede determinar con la ecuación $y_1 + 2y_2 + y_3 = 2$. Suponiendo una variable de holgura $y_4 \geq 0$, se obtiene

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

Se puede homogenizar la restricción $y_1 + 2y_2 + y_3 = 2$ multiplicando el lado derecho por $\frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{5}$ porque esta fracción es igual a 1. Esto lleva, después de la simplificación, a

$$3y_1 + 8y_2 + 3y_3 - 2y_4 = 0$$

Para convertir $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$ en un símplex, se define la nueva variable $x_i = \frac{y_i}{5}$, $i = 1, 2, 3, 4$, para obtener

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4$$

Por último se puede asegurar que el centro $\mathbf{X} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ del símplex es un punto factible para ecuaciones homogéneas, restando, del lado izquierdo de cada ecuación, una variable artificial cuyo coeficiente sea igual a la suma algebraica de todos los coeficientes de restricción en el lado izquierdo; esto es, $3 + 8 + 3 - 2 = 12$. A continuación se suman las variables artificiales a la ecuación símplex y se penalizan en forma adecuada en la función objetivo. En nuestro ejemplo, se aumenta la variable artificial x_5 como sigue:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 5x_2 - Mx_5$$

sujeta a

$$3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 12x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5$$

Para este sistema de ecuaciones, el nuevo centro símplex $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{5})$ es factible para la ecuación homogénea. El valor M en la función objetivo se elige suficientemente grande para forzar a x_5 al nivel cero (compárese con el método M, sección 3.4.1).

Ejemplo 7.7-2

En este ejemplo se demuestra que cualquier programación lineal puede satisfacer las condiciones 1) y 2) que se requieren en el algoritmo de Karmarkar. Las transformaciones son tediosas y, por tanto, no se recomiendan en la práctica. En lugar de ello se aconseja usar una variación del algoritmo que no requiere la condición 2).

Se tiene la misma programación lineal del ejemplo 7.8-1, que es

$$\text{Maximizar } z = y_1 + y_2$$

sujeta a

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Se comienza definiendo los problemas primal y dual de la programación lineal:

Primal	Dual
Maximizar $y_0 = y_1 + y_2$ sujeta a	Minimizar $w_0 = 2w_1$ sujeta a
$y_1 + 2y_2 \leq 2$	$\left.\begin{matrix} w_1 \geq 1 \\ 2w_1 \geq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow w_1 \geq 1$
$y_1, y_2 \geq 0$	$w_1, w_2 \geq 0$

Las restricciones primal y dual se pueden poner en forma de ecuación como sigue:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 2, y_3 \geq 0 \tag{1}$$
$$w_1 - w_2 = 1, w_2 \geq 0$$

En el óptimo $y_0 = w_0$, que produce

$$y_1 + y_2 - 2w_1 = 0 \tag{2}$$

Se selecciona M suficientemente grande, y se obtiene

$$y_1 + y_2 + y_3 + w_1 + w_2 \leq M \tag{3}$$

Ahora se convierte (3) en una ecuación, y se obtiene

$$y_1 + y_2 + y_3 + w_1 + w_2 + s_1 = M,\ s_1 \geq 0 \tag{4}$$

A continuación se define una nueva variable s_2. De acuerdo con (4), las dos ecuaciones siguientes son válidas si, y sólo si la condición $s_2 = 1$ es válida:

$$y_1 + y_2 + y_3 + w_1 + w_2 + s_1 - Ms_2 = 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + w_1 + w_2 + s_1 + s_2 = M + 1 \tag{5}$$

Entonces, dado que $s_2 = 1$ como se estipuló en (5), las ecuaciones primal y dual (1) se pueden escribir en la siguiente forma:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 - 2s_2 = 0$$
$$w_1 - w_2 - 1s_2 = 0 \tag{6}$$

Ahora se definen

$$y_j = (M + 1)x_j,\ j = 1,2,3$$
$$w_{j-3} = (M + 1)x_j,\ j = 4,5$$
$$s_1 = (M + 1)x_6$$
$$s_2 = (M + 1)x_7$$

La sustitución en las ecuaciones (2), (5) y (6) producirá las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - Mx_7 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_7 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_4 - x_5 \qquad - \quad x_7 = 0$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 7$$

En el paso final se debe aumentar la variable artificial y_8 en el lado izquierdo de cada ecuación; la nueva función objetivo pedirá minimizar y_8, cuyo valor mínimo debe ser cero (suponiendo que el primal es factible). Sin embargo, nótese que en el algoritmo de Karmarkar se requiere que la solución

$$\mathbf{X} = \left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}\right)^T$$

sea factible para $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Eso será cierto para las ecuaciones homogéneas (con lado derecho cero) si el coeficiente asociado de x_8 artificial es igual a la suma (algebraica) de todos los coeficientes en el lado izquierdo. Así, se ve que el programa lineal transformado es:

$$\text{Minimizar } z = x_8$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_4 \qquad\qquad\qquad\qquad - 0x_8 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - Mx_7 - (6 - M)x_8 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad - 2x_7 - 2x_8 &= 0 \\
x_4 - x_5 \qquad - x_7 + x_8 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 1 \\
x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 8 &
\end{aligned}$$

Nótese que la solución de este problema produce soluciones óptimas de los problemas primal y dual, en forma automática, por sustitución.

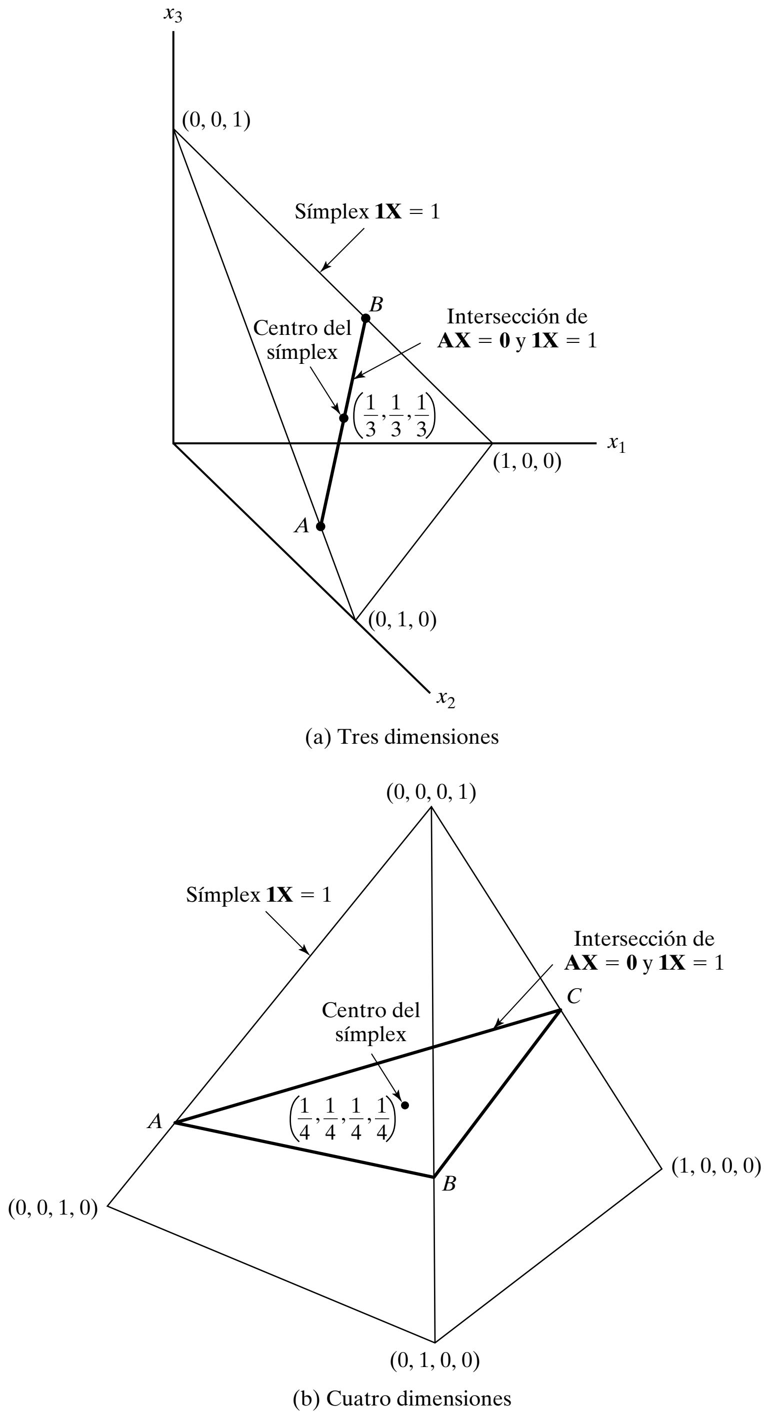
Ahora presentaremos los pasos principales del algoritmo. La figura 7.7(a) muestra una ilustración típica del espacio de soluciones en tres dimensiones, donde el conjunto homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ formado sólo por una ecuación. Por definición, el espacio de soluciones formado por el segmento de recta *AB* queda enteramente en el símplex bidimensional $\mathbf{1X} = 1$ y pasa por el punto interior factible $\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$. De forma parecida, la figura 7.7(b) muestra una ilustración del espacio de soluciones *ABC* en cuatro dimensiones, con el conjunto homogéneo formado de nuevo sólo por una restricción. En este caso, el centro del símplex tridimensional es $\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right)$.

El algoritmo de Karmarkar se inicia en un punto interior representado por el centro del símplex y a continuación avanza en la dirección del *gradiente proyectado* para determinar un nuevo punto de solución. Este nuevo punto debe ser estrictamente interior, lo que quiere decir que todas sus coordenadas deben ser positivas. La validez del algoritmo se basa en esta condición.

Para que el nuevo punto de solución sea estrictamente interior, no debe estar en los límites del símplex. (En términos de la figura 7.7, se deben excluir los puntos *A* y *B* en tres dimensiones, y las rectas *AB*, *BC* y *AC* en cuatro dimensiones.) Para garantizar este resultado se inscribe una esfera con su centro coincidente con el del símplex, en forma justa, dentro del símplex. En el caso n dimensional, el radio r de esta esfera es igual a $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Una esfera menor con radio $\alpha r\ (0 < \alpha < 1)$ será un subconjunto de la esfera, y cualquier punto en la intersección de la esfera menor con el sistema homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ será un punto interior, con coordenadas estrictamente positivas. Entonces, se puede uno mover todo lo posible en este espacio restringido

FIGURA 7.7

Ilustraciones del símplex $\mathbf{1X} = 1$



(intersección de $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ con la esfera αr) a lo largo del gradiente proyectado, para determinar el nuevo punto de solución, que por necesidad estará mejorado.

El nuevo punto de solución ya no estará en el centro del símplex. Para que el procedimiento sea iterativo se necesita llevar al *nuevo* punto de solución al centro de un símplex. Karmarkar satisface este requisito al proponer la siguiente e intrigante idea, llamada **transformación proyectiva**. Sea

$$y_i = \frac{\frac{x_i}{x_{ki}}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_{kj}}}, i = 1, 2, \ldots, n$$

donde x_{ki} es el i-ésimo elemento del actual punto de solución $\mathbf{X}_k$. La transformación es válida, porque todas las $x_{ki} > 0$ por diseño. También el lector notará que $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$, o $\mathbf{1Y} = 1$, por definición. Esta transformación equivale a

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{X}}{\mathbf{1D}_k^{-1}\mathbf{X}}$$

donde $\mathbf{D}_k$ es una matriz diagonal cuyos i-ésimos elementos diagonales son iguales a x_{ki}. La transformación aplica el espacio X en el espacio Y en forma única, porque se puede demostrar en forma directa que la última ecuación produce

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{D}_k\mathbf{Y}}{\mathbf{1D}_k\mathbf{Y}}$$

Por definición, mín $\mathbf{CX} = 0$. Como $\mathbf{1D}_k\mathbf{Y}$ siempre es positivo, la programación lineal original equivale a

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{CD}_k\mathbf{Y}$$

sujeta a

$$\mathbf{AD}_k\mathbf{Y} = 0$$

$$\mathbf{1Y} = 1$$

$$\mathbf{Y} \geq 0$$

El problema transformado tiene el mismo formato que el problema original. Entonces se puede comenzar con el centro del símplex $\mathbf{Y} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ y repetir el paso iterativo. Después de cada iteración se pueden calcular los valores de las variables originales $\mathbf{X}$ a partir de la solución.

Ahora se indicará cómo se puede determinar el nuevo punto de solución para el problema transformado. En cualquier iteración k, el problema es

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{CD}_k\mathbf{Y}$$

sujeta a

$$\mathbf{AD}_k\mathbf{Y} = 0$$

$$\mathbf{Y} \text{ está en la esfera } \alpha r$$

Como la esfera αr es un conjunto del espacio de las restricciones $\mathbf{1X} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, se pueden pasar por alto las dos. En consecuencia, la solución óptima del problema anterior está a lo largo de la proyección negativa del gradiente $\mathbf{c}_p$ (minimización) es

$$\mathbf{Y}_{\text{nueva}} = \mathbf{Y}_0 - \alpha r \frac{c_p}{\|c_p\|}$$

donde $\mathbf{Y}_0 = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^T$ y $\mathbf{c}_p$ es el gradiente proyectado, que se puede demostrar como

$$\mathbf{c}_p = [\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{PP}^T)^{-1}\mathbf{P}](\mathbf{CD}_k)^T$$

siendo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{AD}_k \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La selección de α es crucial para ampliar la eficiencia del algoritmo. En el caso normal se selecciona α tan grande como sea posible, para ir hacia la solución en grandes saltos. Sin embargo, si se escoge α demasiado grande, se puede uno acercar demasiado a los límites prohibidos del símplex. No hay respuesta general a este problema, pero Karmarkar sugiere usar $\alpha = \frac{n-1}{3n}$.

Los pasos del algoritmo de Karmarkar son

Paso 0. Iniciar con el punto de solución $\mathbf{X}_0 = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ y después calcular $r = \frac{1}{n\sqrt{(n-1)}}$ y $\alpha = \frac{(n-1)}{3n}$.

Paso general k. Definir

$$\mathbf{D}_k = \text{diag}\,\{x_{k1}, \ldots, x_{kn}\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{AD}_k \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

y calcular

$$\mathbf{Y}_{\text{nueva}} = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)^{\mathrm{T}} - \alpha r \frac{c_p}{\|c_p\|}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \frac{\mathbf{D}_k \mathbf{Y}_{\text{nueva}}}{\mathbf{1D}_k \mathbf{Y}_{\text{nueva}}}$$

en donde

$$\mathbf{c}_p = [\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{PP}^T)^{-1}\mathbf{P}](\mathbf{cD}_k)^T$$

Ejemplo 7.7-3

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

sujeta a

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

El problema satisface las dos condiciones impuestas por el algoritmo de punto interior, es decir,

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})^T$$

satisface ambas restricciones; y la solución óptima

$$\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T = (0, .6, .4)^T$$

da como resultado $z = 0$.

Iteración 0.

$$\mathbf{c} = (2,\ 2,\ -3), \mathbf{A} = (-1, -2, 3)$$

$$\mathbf{X}_0 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})^T, z_0 = \tfrac{1}{3}, r = \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \alpha = \tfrac{2}{9}$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se aplica la transformación proyectiva para obtener

$$\mathbf{Y}_0 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})^T$$

Iteración 1.

$$\mathbf{cD}_0 = (2, 2, -3)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -1)$$

$$\mathbf{AD}_0 = (-1, -2, 3)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1)$$

$$(\mathbf{PP}^T)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{PP}^T)^{-1}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 25 & -20 & -5 \\ -20 & 16 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{c}_p = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{PP}^T)^{-1}\mathbf{P})(\mathbf{cD}_0)^T = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 25 & -20 & -5 \\ -20 & 16 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{126}\begin{pmatrix} 25 \\ -20 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\|\mathbf{c}_p\| = \sqrt{\frac{25^2 + (-20)^2 + (-5)^2}{126^2}} = .257172$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\text{nueva}} &= (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})^T - \tfrac{2}{9} \times \tfrac{1}{\sqrt{6}} \times \tfrac{1}{.257172} \times \tfrac{1}{126}(25,-20,-5)^T \\ &= (.263340, .389328, .347332)^T\end{aligned}$$

A continuación

$$\mathbf{1D}_0\mathbf{Y}_{\text{nueva}} = \tfrac{1}{3}(1,1,1)(.263340, .389328, .347332)^T = \tfrac{1}{3}$$

Ahora,

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\mathbf{D}_0\mathbf{Y}_{\text{nueva}}}{\mathbf{1D}_0\mathbf{Y}_{\text{nueva}}} = \frac{\tfrac{1}{3}\mathbf{Y}_{\text{nueva}}}{\tfrac{1}{3}} = \mathbf{Y}_{\text{nueva}} = (.263340, .389328, .347332)^T$$

$$z_1 = .26334$$

Iteración 2.

$$\mathbf{cD}_1 = (2,2,-3)\begin{pmatrix} .263340 & 0 & 0 \\ 0 & .389328 & 0 \\ 0 & 0 & .347332 \end{pmatrix} = (.526680, .778656, -1.041996)$$

$$\mathbf{AD}_1 = (-1,-2,3)\begin{pmatrix} .263340 & 0 & 0 \\ 0 & .389328 & 0 \\ 0 & 0 & .347332 \end{pmatrix} = (-.263340, -.778656, 1.041996)$$

$$(\mathbf{PP}^T)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -.26334 & -.778656 & 1.041996 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -.263340 & 1 \\ -.778656 & 1 \\ 1.041996 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} .567727 & 0 \\ 0 & .333333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{PP}^T)^{-1}\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -.263340 & 1 \\ -.778656 & 1 \\ 1.041996 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .567727 & 0 \\ 0 & .333333 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} -.263340 & -.778656 & 1.041996 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} .627296 & -.449746 & -.177550 \\ -.449746 & .322451 & .127295 \\ -.177550 & .127295 & .050254 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_p = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T(\mathbf{PP}^T)^{-1}\mathbf{P})(\mathbf{cD}_1)^T &= \begin{pmatrix} .627296 & -.449746 & -.177550 \\ -.449746 & .322451 & .127295 \\ -.177550 & .127295 & .050254 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .526680 \\ .778656 \\ -1.041996 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} .165193 \\ -.118435 \\ -.046757 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|\mathbf{c}_p\| = \sqrt{.165193^2 + (-.118435)^2 + (-.046757)^2} = .208571$$

Así,

$$\mathbf{Y}_{\text{nueva}} = \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)^T - \tfrac{2}{9} \times \tfrac{1}{\sqrt{6}} \times \tfrac{1}{.208571}(.165193, -.118435, -.046757)^T$$
$$= (.261479, .384849, .353671)^T$$

A continuación

$$\mathbf{D}_1\mathbf{Y}_{\text{nueva}} = \begin{pmatrix} .263340 & 0 & 0 \\ 0 & .389328 & 0 \\ 0 & 0 & .347332 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .261479 \\ .384849 \\ .353671 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .068858 \\ .149832 \\ .122841 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1D}_1\mathbf{Y}_{\text{nueva}} = .341531$$

Ahora,

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\mathbf{D}_1\mathbf{Y}_{\text{nueva}}}{\mathbf{1D}_1\mathbf{Y}_{\text{nueva}}} = \begin{pmatrix} .201616 \\ .438707 \\ .359677 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = .201615$$

La aplicación repetida del algoritmo moverá la solución acercándola al punto óptimo (0, 0.6, 0.4). Karmarkar describe un paso adicional para redondear la solución óptima hacia el punto extremo óptimo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.7A

1. Use TORA para demostrar que la solución del programa lineal transformado al final del ejemplo 7.7-2 proporciona las soluciones primal y dual óptimas del problema original. (*Sugerencia:* use $M = 10$ y asegúrese de que el resultado de TORA muestre al menos una exactitud de 5 decimales.)

2. Transforme la siguiente programación lineal al formato de Karmarkar.

$$\text{Maximizar } z = y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$y_1 - y_2 \leq 2$$
$$2y_1 + y_2 \leq 4$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

3. Haga una iteración adicional en el ejemplo 7.7-3 y demuestre que la solución se mueve hacia $z = 0$ óptima.

4. Haga tres iteraciones del algoritmo de Karmarkar para el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + x_3 + x_4$$

sujeta a

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(*Sugerencia:* primero se debe convertir el problema al formato de Karmarkar.)

5. Haga tres iteraciones con el algoritmo de Karmarkar para la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(*Sugerencia*: primero se debe convertir el problema al formato de Karmarkar.)

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., J. Jarvis y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2a ed., Wiley, Nueva York, 1990.

Hooker, J., "Karmarkar's Linear Programming Algorithm", *Interfaces*, vol. 16, núm. 4, págs. 75-90, 1986.

Nering, E. y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.

PROBLEMAS INTEGRALES

7.1 Suponga que se le presentan los puntos

$$A = (6, 4, 6, -2),\ B = (4, 12, -4, 8),\ C = (-4, 0, 8, 4)$$

Desarrolle un procedimiento sistemático que permita determinar si cada uno de los puntos siguientes se puede expresar como una combinación convexa de *A*, *B* y *C*:

a) $(3, 5, 4, 2)$

b) $(5, 8, 4, 9)$

7.2 Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar: } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Determine la tabla símplex óptima (use TORA, por comodidad) y a continuación use en forma directa la información de esa tabla para determinar la *segunda* mejor solución de punto extremo (comparada con el óptimo "absoluto") para el problema. Compruebe la respuesta resolviendo el problema en forma gráfica. (*Sugerencia:* consulte los puntos extremos *adyacentes* a la solución óptima.)

7.3 *Programación de intervalo*. Se tiene la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = \{\mathbf{CX} \mid \mathbf{L} \leq \mathbf{AX} \leq \mathbf{U}, \mathbf{X} \geq 0\}$$

donde **L** y **U** son vectores columna constantes. Defina el vector de holguras de modo que $\mathbf{AX} + \mathbf{Y} = \mathbf{U}$. Demuestre que este problema lineal es equivalente a

$$\text{Maximizar } z = \{\mathbf{CX} | \mathbf{AX} + \mathbf{Y} = \mathbf{U}, 0 \le \mathbf{Y} \le \mathbf{U} - \mathbf{L}, \mathbf{X} \ge 0\}$$

Use el procedimiento propuesto para resolver la siguiente programación lineal:

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3$$

sujeta a

$$20 \le x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 46$$

$$10 \le 3x_1 - x_2 + x_3 \le 20$$

$$18 \le 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 35$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

7.4 Se tiene la siguiente programación lineal entero 0-1:

$$\text{Minimizar } z = \{\mathbf{CX} | \mathbf{AX} \le \mathbf{b}, \mathbf{X} = (0,1)\}$$

Suponga que $z_{\text{mín}}$ es una cota superior conocida de z. Defina la restricción

$$\min_{\mu \ge 0} \max_{x=(0,1)} \{\mu(\mathbf{b} - \mathbf{AX}) + (z_{\text{mín}} - \mathbf{CX})\} \ge 0$$

donde $\mu \ge 0$. Esta restricción no viola ninguna de las restricciones del problema original 0-1. El problema mín-máx es una forma de identificar la restricción más “estricta” de ellas, a través de una selección adecuada de $\mu(\ge 0)$. Demuestre que la definición mixta 0-1 propuesta, para determinar μ en realidad se reduce a resolver un programa lineal ordinario. (*Sugerencia:* la restricción entera $\mathbf{X} = [0, 1]$ equivale al intervalo continuo $0 \le \mathbf{X} \le 1$. Use el problema dual para definir la programación lineal deseada.)

7.5 La solución óptima de la programación lineal del problema 7-2 es $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$ y $z = \frac{38}{3}$. Grafique el cambio de z óptima en función de θ si $x_1 = \frac{10}{3} + \theta$, donde θ no tiene restricción de signo. Nótese que $x_1 = \frac{10}{3} + \theta$ rastrea a x_1 arriba y abajo de su valor óptimo.

7.6 Suponga que el programa lineal óptimo se representa como sigue:

$$\text{Maximizar } z = c_0 - \sum_{j \varepsilon NB} (z_j - c_j) x_j$$

sujeta a

$$x_i = x_i^* - \sum_{j \varepsilon NB} \alpha_{ij} x_j, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\text{toda } x_i \text{ y } x_j \ge 0$$

donde NB es el conjunto de variables no básicas. Suponga que para una variable básica actual $x_i = x_i^*$ se impone la restricción $x_i \ge d_i$, siendo d_i el menor entero mayor que x_i^*. Estime una cota superior del valor óptimo de z después de agregar la restricción al problema. Repita el mismo procedimiento, suponiendo que la restricción impuesta es $x_i \le e_i$, donde e_i es el mayor entero menor que x_i^*.

7.7 Se tiene la siguiente programación lineal de minimización:

$$\text{Minimizar } z = (10t - 4)x_1 + (4t - 8)x_2$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 8 \\
4x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 6 - 2t \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

donde $-\infty \leq t \leq \infty$. El análisis paramétrico del problema da los siguientes resultados:

$-\infty \leq t \leq -5$: La base óptima es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$

$-5 \leq t \leq -1$: La base óptima es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$

$-1 \leq t \leq 2$: La base óptima es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$

Determine todos los valores críticos de t que puedan existir para $t \geq 2$.

C A P Í T U L O 8

Programación de metas

Los modelos de programación lineal que se presentaron en los capítulos anteriores se basan en la optimización de *una sola* función objetivo. Hay casos en donde lo más adecuado es tener varios objetivos (posiblemente opuestos). Por ejemplo, los políticos aspirantes pueden prometer reducir la deuda nacional y, al mismo tiempo, ofrecer rebajas de impuesto sobre la renta. En tales casos podrá ser imposible encontrar una solución única que optimice los objetivos contrapuestos. En lugar de ello se podrá buscar una solución *intermedia*, o *de compromiso* basada en la importancia relativa de cada objetivo.

Este capítulo presenta la técnica de programación de metas para resolver modelos con varios objetivos. La idea principal es convertir los diversos objetivos originales en una sola meta. El modelo resultante produce lo que se suele llamar **solución eficiente**, porque podrá no ser óptima con respecto a *todos* los objetivos contrapuestos del problema.

8.1 UNA FORMULACIÓN DE PROGRAMACIÓN DE METAS

Ilustraremos con un ejemplo la idea de la programación de metas.

Ejemplo 8.1-1

Fairville es una ciudad pequeña con unos 20,000 habitantes. El consejo de la ciudad está en vías de desarrollar una tabla equitativa de impuestos urbanos. La base impositiva anual para la propiedad catastral es $550 millones. La bases impositivas anuales para alimentos y medicinas es $35 millones, y para ventas en general es $55 millones. El consumo local anual de gasolina se estima en 7.5 millones de galones. El consejo ciudadano desea establecer las tasas de impuesto basándose en cuatro metas principales.

1. Los ingresos impositivos deben ser $16 millones, cuando menos, para satisfacer los compromisos financieros municipales.
2. Los impuestos en alimentos y medicinas no pueden ser mayores que el 10% de todos los impuestos recabados.

3. Los impuestos por ventas en general no pueden ser mayores que el 20% de todos los impuestos recabados.
4. El impuesto a la gasolina no puede ser mayor que 2 centavos por galón.

Sean las variables x_p, x_f y x_s las tasas impositivas (expresadas como proporciones de las bases impositivas) para el catastro, alimento y medicinas y ventas en general; se define la variable x_g como el impuesto a la gasolina, en centavos por galón. Las metas del consejo municipal se expresan entonces como sigue:

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g \geq 16 \quad \text{(Impuestos recabados)}$$
$$35x_f \leq 0.1(550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g) \quad \text{(Impuestos a alimentos y medicinas)}$$
$$55x_s \leq 0.2(550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g) \quad \text{(Impuestos a ventas en general)}$$
$$x_g \leq 2 \quad \text{(Impuestos a la gasolina)}$$
$$x_p, x_f, x_s, x_g \geq 0$$

A continuación se simplifican las tres restricciones como sigue:

$$\begin{aligned}
550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g &\geq 16 \\
55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + 0.0075x_g &\geq 0 \\
110x_p + 7x_f - 44x_s + 0.015x_g &\geq 0 \\
x_g &\leq 2 \\
x_p, x_f, x_s, x_g &\geq 0
\end{aligned}$$

Cada una de las desigualdades del modelo representa una meta que el consejo municipal desea satisfacer. Sin embargo, lo más que se puede hacer es buscar una solución de compromiso entre estos planes contrapuestos.

La forma en que la programación de metas determina una solución de compromiso es convirtiendo cada desigualdad en una meta flexible, en la que la restricción correspondiente puede violarse si es necesario. En el modelo de Fairville, las metas flexibles se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}
550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g + s_1^+ - s_1^- &= 16 \\
55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + 0.0075x_g + s_2^+ - s_2^- &= 0 \\
110x_p + 7x_f - 44x_s + 0.015x_g + s_3^+ - s_3^- &= 0 \\
x_g + s_4^+ - s_4^- &= 2 \\
x_p, x_f, x_s, x_g &\geq 0 \\
s_i^+, s_i^- \geq 0, \ i &= 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

Las variables no negativas s_i^+ y s_i^-, $i = 1, 2, 3, 4$, se llaman **variables de desviación**, porque representan las desviaciones arriba y abajo respecto al lado derecho de la restricción *i*.

Por definición, las variables s_i^+ y s_i^- son dependientes y en consecuencia no pueden ser al mismo tiempo variables básicas. Esto quiere decir que en cualquier iteración símplex, cuando menos *una* de las dos variables de desviación puede asumir un valor positivo. Si la *i*-ésima desigualdad original es del tipo $\leq$ y su $s_i^+ > 0$, entonces se satisfará la *i*-ésima meta; en caso contrario, si $s_i^- > 0$, la meta *i* no se satisfará. En esencia, la definición de s_i^+ y s_i^- permite satisfa-

cer o violar la *i*-ésima meta cuando se desee. Ésta es la clase de flexibilidad que caracteriza a la programación de metas cuando busca una solución de compromiso. Naturalmente, una buena solución de compromiso trata de minimizar la cantidad por la cual se viola cada meta.

En el modelo de Fairville, como las tres primeras restricciones son del tipo $\geq$ y la cuarta es $\leq$, las variables de desviación s_1^+, s_2^+, s_3^+ y s_4^- del problema representan las cantidades por las que se violan las metas respectivas. Así, la solución de compromiso trata de satisfacer todo lo posible los siguientes cuatro objetivos:

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^+$$
$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^+$$
$$\text{Minimizar } G_3 = s_3^+$$
$$\text{Minimizar } G_4 = s_4^-$$

Esas funciones se minimizan sujetas a las ecuaciones de restricción del modelo.

¿Cómo se puede optimizar un modelo con varios objetivos y metas quizá conflictivas? Para este fin se han desarrollado dos métodos: 1) el método de los factores de ponderación y 2) el método de jerarquías. Ambos se basan en convertir los diversos objetivos en una sola función, como se detallará en la sección 8.2.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 8.1A

1. Formule el problema sobre impuestos de Fairville, suponiendo que el consejo municipal especifica una meta adicional G_5, que indica que el impuesto a la gasolina sea cuando menos 10% de los impuestos totales.
2. El centro comercial NW Shopping Mall organiza eventos especiales para atraer clientes. Los dos eventos más populares que parecen atraer la atención de los adolescentes y a las personas jóvenes y adultas son los conciertos de bandas, y las exposiciones de artesanías. Los costos de la representación de las bandas son \$1500, y de las artesanías son \$300, respectivamente. El presupuesto total anual (estricto) asignado a los dos eventos es \$15,000. El gerente del centro estima que la asistencia a los eventos es la siguiente:

	Cantidad de asistentes a cada presentación		
Evento	*Adolescentes*	*Jóvenes*	*Adultos*
Concierto de banda	200	100	0
Exposición	0	400	250

   Se han establecido las metas anuales mínimas de asistencia de adolescentes, jóvenes y adultos como 1000, 1200 y 800, respectivamente. Formule el problema como modelo de programación de metas.
3. La oficina de ingreso a Ozark University está procesando las solicitudes para el año académico venidero. Las solicitudes caen dentro de tres categorías: locales, nacionales e internacionales. Las relaciones hombres-mujeres para los solicitantes locales y nacionales son 1:1 y 3:2, respectivamente. Para los estudiantes internacionales, esta relación es 8:1. Un factor importante para aceptar alumnos nuevos es la calificación de la prueba American College Test (ACT). Según las

estadísticas, la ACT promedio es 27, 26 y 23, para los alumnos locales, nacionales e internacionales, respectivamente. El comité de admisión ha establecido las siguientes metas deseables para la nueva generación:

a) La nueva generación está formada cuando menos por 1200 de primer ingreso.

b) La calificación ACT promedio para todos los alumnos que ingresan es 25, como mínimo.

c) Los alumnos internacionales forman al menos 10% de los nuevos ingresos.

d) La relación hombres-mujeres es 3:4, como mínimo.

e) Los alumnos nacionales forman al menos el 20% de los nuevos ingresos.

Formule el problema como modelo de programación de metas.

4. Las granjas Circle K consumen diariamente 3 toneladas de alimento especial. Ese alimento es una mezcla de caliza, maíz y soya, y debe satisfacer los siguientes requisitos dietéticos:

Calcio. Cuando menos 0.8%, pero no más de 1.2%

Proteína. Al menos 22%

Fibra. 5% cuando mucho

La tabla siguiente muestra el contenido nutricional de los ingredientes del alimento.

	Libras por cada libra de ingrediente		
Ingrediente	*Calcio*	*Proteína*	*Fibra*
Caliza	0.380	0.00	0.00
Maíz	0.001	0.09	0.02
Soya	0.002	0.50	0.08

Formule el problema como modelo de programación de metas, y exprese su opinión acerca de la aplicabilidad de la programación de metas a este caso.

5. Mantel produce un carro de juguete, cuyo ensamble final debe tener cuatro ruedas y dos asientos. La fábrica que produce las partes funciona durante 3 turnos diarios. La tabla siguiente muestra las cantidades producidas de cada parte, durante los tres turnos.

	Unidades producidas por corrida	
Turno	*Ruedas*	*Asientos*
1	500	300
2	600	280
3	640	360

En el caso ideal, la cantidad de ruedas producidas es exactamente el doble de la cantidad de asientos. Sin embargo, como las tasas de producción varían de un turno a otro, podría no alcanzarse la proporción exacta. A Mantel le interesa determinar la cantidad de corridas de producción en cada turno, que minimice el desbalanceo de producción de las partes. Las limitaciones de capacidad restringen la cantidad de corridas entre 4 y 5 en el turno 1, entre 10 y 20 en el turno 2 y entre 3 y 5 en el turno 3. Formule el problema como modelo de programación de metas.

6. Camyo Manufacturing produce cuatro partes que requieren usar un torno y un taladro vertical. Las dos máquinas funcionan 10 horas por día. La tabla siguiente muestra el tiempo, en minutos, que se requiere en cada parte.

	Tiempo de producción, minutos	
Parte	*Torno*	*Taladro vertical*
1	5	3
2	6	2
3	4	6
4	7	4

Se desea balancear las dos máquinas, limitando la diferencia entre sus tiempos totales de funcionamiento cuando mucho a 30 minutos. La demanda de mercado para cada parte es 10 unidades como mínimo. Además, la cantidad de unidades de la parte 1 no debe ser mayor que la de la parte 2. Formule el problema como modelo de programación de metas.

7. Se fabrican dos productos en dos máquinas consecutivas. La siguiente tabla muestra los tiempos de maquinado, en minutos por unidad, para cada producto.

	Tiempo de maquinado, minutos	
Máquina	*Producto 1*	*Producto 2*
1	5	3
2	6	2

Las cuotas diarias de producción para los dos artículos son 80 y 60 unidades, respectivamente. Cada máquina trabaja 8 horas por día. Se puede recurrir al tiempo extra, aunque no es deseable, si es necesario, para llenar la cuota de producción. Formule el problema como modelo de programación de metas.

8. El Vista City Hospital planea la asignación de camas de corta estancia (las que no estén ya ocupadas) con 4 días de anticipación. Durante el periodo de planeación, más o menos 30, 25 y 20 pacientes van a requerir estancias de 1, 2 o 3 días, respectivamente. Se estima que las camas sobrantes durante el mismo periodo sean 20, 30, 30 y 30. Use programación de metas para resolver el problema de sobreadmisión y subadmisión del hospital.

9. La familia Von Trapp está mudándose a una nueva ciudad donde se ha aceptado a ambos padres para desempeñar nuevos puestos. Para tratar de encontrar un lugar ideal para su nuevo hogar, los Von Trapp hacen la siguiente lista de metas:

a) Debe estar lo más cerca posible al lugar de trabajo de la señora Von Trapp (a menos de $\frac{1}{4}$ de milla).

b) Debe estar lo más lejos posible (al menos 10 millas) del ruido del aeropuerto.

c) Debe estar razonablemente cerca de algún centro comercial (a menos de 1 milla).

Los señores Von Trapp usan un punto de referencia en la ciudad para definir las coordenadas *x-y* del trabajo, aeropuerto y centro comercial, que son (1, 1), (20, 15) y (4, 7), respectivamente (todas las distancias en millas). Formule el problema como modelo de programación de metas. (*Nota:* las restricciones que resulten no necesariamente son lineales.)

10. *Análisis de regresión.* En un experimento de laboratorio, suponga que y_i es el i-ésimo rendimiento (independiente) observado asociado con las mediciones (dependientes) de observación x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Se desea determinar un ajuste por regresión con estos datos. Dados b_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, los coeficientes de regresión, todos los b_j se determinan de tal modo que se minimice la suma de las desviaciones absolutas entre cada rendimiento observado y el estimado. Formule el problema como modelo de programación de metas.

11. *Problema de Chebyshev*. Una meta alternativa para el modelo de regresión en el problema 10 es minimizar, respecto a b_j, el máximo de las desviaciones absolutas. Formule el problema como modelo de programación de metas.

8.2 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN DE METAS

Esta sección presenta dos algoritmos para resolver la programación de metas. Ambos métodos convierten las metas múltiples en una sola función objetivo. En el **método de los factores de ponderación** la función objetiva única es la suma ponderada de las funciones que representan las metas del problema. El **método de jerarquías** comienza dando prioridades a las metas en orden de importancia. A continuación se optimiza el modelo usando una meta cada vez, de tal modo que el valor óptimo de una meta con mayor prioridad nunca se degrade debido a una meta con menor prioridad.

En general, los dos métodos propuestos no producen la misma solución. Sin embargo, ninguno de ellos es mejor que el otro, porque cada técnica tiene por objeto satisfacer ciertas preferencias en la toma de decisiones.

8.2.1 El método de factores de ponderación

Supongamos que el modelo de programación de metas tiene *n* metas, y que la *i*-ésima meta se expresa como sigue:

$$\text{Minimizar } G_i,\ i = 1, 2, ..., n$$

La función objetivo combinada que se usa en este método se define como sigue:

$$\text{Minimizar } z = w_1G_1 + w_2G_2 + \dots + w_nG_n$$

El parámetro w_i, $i = 1, 2, \dots, n$, representa factores de ponderación positivos que reflejan las preferencias de quien toma las decisiones, respecto a la importancia relativa de cada meta. Por ejemplo, $w_i = 1$, para toda *i* significa que todas las metas tienen el mismo factor de ponderación. La determinación de los valores específicos de esos factores es subjetiva. En realidad, los procedimientos analíticos que se han publicado, aparentemente complicados (véase por ejemplo Cohon, 1978) se siguen basando en evaluaciones subjetivas.

Ejemplo 8.2-1

TopAd es una nueva agencia de publicidad, con 10 empleados; ha recibido un contrato para promover un producto nuevo. La agencia puede anunciarlo por radio y por TV. La tabla siguiente contiene datos sobre la cantidad de personas a las que llega cada tipo de anuncio, y sus requisitos de costo y mano de obra.

	Datos/min de anuncio	
	Radio	*Televisión*
Exposición (millones de personas)	4	8
Costo (miles de dólares)	8	24
Empleados asignados	1	2

El contrato prohíbe a TopAd que use más de 6 minutos en anuncios por radio. Además, los anuncios por radio y TV deben llegar cuando menos a 45 millones de personas. Top Ad ha es-

tablecido para el proyecto una meta de presupuesto de $100,000. ¿Cuántos minutos de anuncios en radio y TV debe programar TopAd?

Sean x_1 y x_2 los minutos asignados a los anuncios por radio y por TV. La formulación de programación de metas para el problema es

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^+ \text{ (Satisfacer la meta de exposición)}$$
$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^- \text{ (Satisfacer la meta de presupuesto)}$$

sujetas a

$$\begin{array}{llr}
4x_1 + 8x_2 + s_1^+ - s_1^- & = 45 & \text{(Meta de exposición)} \\
8x_1 + 24x_2 + s_2^+ - s_2^- & = 100 & \text{(Meta de presupuesto)} \\
x_1 + 2x_2 & \leq 10 & \text{(Límite de personal)} \\
x_1 & \leq 6 & \text{(Límite de radio)} \\
\end{array}$$
$$x_1, x_2, s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, \geq 0$$

La gerencia de TopAd supone que la meta de exposición tiene dos veces la importancia de la meta de presupuesto. Entonces, la función objetivo combinada se convierte en

$$\text{Minimizar } z = 2G_1 + G_2 = 2s_1^+ + s_2^-$$

La solución óptima (obtenida con TORA) es

$$z = 10$$
$$x_1 = 5 \text{ minutos}, x_2 = 2.5 \text{ minutos}, s_1^+ = 5 \text{ millones de personas}$$

Todas las variables restantes son iguales a cero.

El hecho que el valor óptimo de z no sea cero indica que no se cumple con al menos una meta. En forma específica, $s_1^+ = 5$ indica que la meta de exposición (de un mínimo de 45 millones de personas) no se cumple por 5 millones de individuos. Al revés, la meta de presupuesto (no excederse de $10,000) no se viola, porque $s_2^- = 0$.

La programación de metas sólo produce una solución *eficiente* del problema, que no necesariamente es la óptima. Por ejemplo, la solución $x_1 = 6$ y $x_2 = 2$ produce la misma exposición ($4 \times 6 + 8 \times 2 = 40$ millones de personas), pero cuesta menos ($8 \times 6 + 24 \times 2 =$ $96,000). En esencia, lo que hace la programación de metas es determinar una solución que *satisfaga* sólo las metas del modelo, sin considerar la optimización. Esa "deficiencia" de encontrar una solución óptima causa dudas sobre la viabilidad de la programación de metas como técnica de optimización (véase mayor descripción en el ejemplo 8.2-3).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 8.2A

1. Acerca del problema 1, conjunto de problemas 8.1a, sobre el caso de impuestos en Fairville, resuélvalo, suponiendo que las cinco metas tienen el mismo factor de ponderación. ¿Satisface la solución todas las metas?
2. En el problema 2, conjunto de problemas 8.1a, suponga que la meta de atraer personas jóvenes tiene doble importancia que cualquiera de las otras dos categorías (adolescentes y adultos). Determine la solución asociada y compruebe si se cumplieron todas las metas.
3. En el caso de admisión a la Universidad Ozark del problema 3, conjunto de problemas 8.1a, suponga que se debe cumplir con el límite de cantidad de nuevo ingreso, pero que se puede consi-

derar que los otros requisitos son metas flexibles. Suponga, además que la calificación del examen ACT tiene doble importancia que cualquiera de las metas restantes.

a) Resuelva el problema y especifique si se satisfacen o no todas las metas.

b) Si además se puede considerar que la cantidad de nuevo ingreso es una meta flexible, doblemente importante que la meta de ACT, ¿cómo se afectaría la solución?

4. En el modelo Círculo K del problema 4, conjunto de problemas 8.1a, ¿es posible satisfacer todas las necesidades dietéticas?

5. En el problema 5, conjunto de problemas 8.1a, determine la solución y especifique si se puede balancear la producción diaria de ruedas y asientos.

6. En el problema 6, conjunto de problemas 8.1a, suponga que la meta de la demanda de mercado tiene importancia doble respecto a la de balancear las dos máquinas, y que no se permite tiempo extra. Resuelva el problema y determine si se cumplen las metas.

7. En el problema 7, conjunto de problemas 8.1a, suponga que la cuota de producción de los dos artículos debe cumplirse, con tiempo extra si es necesario. Determine una solución del problema y especifique la cantidad de tiempo extra, si es que es necesario, para cumplir con la cuota de producción.

8. En el Vista City Hospital del problema 8, conjunto de problemas 8.1a, suponga que sólo los límites de cama representan metas flexibles, y que todas las metas tienen pesos iguales. ¿Se puede cumplir con todas las metas?

9. Malco Company ha compilado la tabla siguiente de los archivos de cinco de sus empleados, para estudiar la relación entre ingresos y edad, educación (cantidad de años terminados) y experiencia (años en el negocio).

Edad (años)	Educación (años)	Experiencia (años)	Ingreso anual ($)
30	4	5	40,000
39	5	10	48,000
44	2	14	38,000
48	0	18	36,000
37	3	9	41,000

Use la formulación de programación de metas del problema 10, conjunto de problemas 8.1a, para ajustar los datos a la ecuación lineal $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

10. Resuelva el problema 9 con el método de Chebyshev, propuesto en el problema 11, conjunto de problemas 8.1a.

8.2.2 El método de jerarquías

En el método de jerarquías, quien toma las decisiones debe clasificar las metas del problema por orden de importancia. Dado un caso de n metas, los objetivos del problema se escriben como sigue:

$$\text{Minimizar } G_1 = \rho_1 \text{ (Máxima prioridad)}$$
$$\vdots$$
$$\text{Minimizar } G_n = \rho_n \text{ (Mínima prioridad)}$$

La variable ρ_i es s_i^+ o s_i^- representando la meta i. Por ejemplo, en el modelo TopAd (ejemplo 8.2-1), $\rho_1 = s_1^+$ y $\rho_2 = s_2^-$.

El procedimiento de solución considera una meta cada vez, comenzando con la máxima prioridad G_1 y terminando con la mínima, G_n. *El proceso se hace de tal modo que la*

solución obtenida con una meta de menor prioridad nunca degrade a alguna solución de mayor prioridad.

Las publicaciones sobre programación de metas presentan un método símplex "especial" que garantiza la no degradación de las soluciones de mayor prioridad. En él se usa la **regla de eliminación de columna** que requiere eliminar una variable x_j *no básica* con $z_j - c_j \neq 0$ de la tabla óptima de la meta G_k, antes de resolver el problema de la meta G_{k+1}. La regla reconoce que esas variables no básicas, si se elevan respecto a cero en la optimización de las metas siguientes, pueden degradar (pero nunca pueden mejorar) la calidad de una meta de mayor prioridad. En el proceso se requiere modificar la tabla símplex, para que contenga las funciones objetivo de todas las metas del modelo.

La modificación propuesta de eliminación de columna complica la programación de metas sin necesidad. En esta presentación demostraremos que se puede llegar a los mismos resultados en una forma más directa, con los siguientes pasos:

Paso 0. Identificar las metas del modelo y clasificarlas en orden de prioridad:

$$G_1 = \rho_1 \succ G_2 = \rho_2 \succ \ldots \succ G_n = \rho_n$$

Igualar $i = 1$.

Paso i. Resolver el programa lineal i que minimice a G_i, y hacer que $\rho_i = \rho_i^*$ defina el valor óptimo correspondiente de la variable de desviación ρ_i. Si $i = n$, detenerse; el programa lineal n resuelve el problema de n metas. En caso contrario, aumentar la restricción $\rho_i = \rho_i^*$ a las restricciones del problema G_i, para asegurar que no se degrade el valor de ρ_i en los problemas futuros. Igualar $i = i + 1$, y repetir el paso i.

La adición sucesiva de las restricciones especiales $\rho_i = \rho_i^*$ teóricamente podrá no ser tan "elegante" como la *regla de eliminación de columna*. Sin embargo, logra exactamente el mismo resultado. Lo más importante es que es más fácil de comprender.

Habrá quienes digan que la regla de eliminación de columna tiene ventajas computacionales. En esencia, la regla hace el problema más pequeño en forma sucesiva, eliminando variables, mientras que nuestro procedimiento agranda el problema agregándole nuevas restricciones. Sin embargo, tomando en cuenta la naturaleza de las restricciones adicionales ($\rho_i = \rho_i^*$), se debe poder modificar el algoritmo símplex para implementar en forma implícita la restricción adicional, por sustitución directa de la variable ρ_i. Esta sustitución sólo afecta la restricción donde aparece ρ_i y, de hecho, reduce la cantidad de variables cuando pasa uno de una meta a la siguiente. En forma alternativa, se puede usar el método símplex acotado de la sección 7.3, reemplazando $\rho_i = \rho_i^*$ por $\rho_i \leq \rho_i^*$, en cuyo caso las restricciones adicionales se toman en cuenta en forma implícita. A este respecto, la regla de eliminación de columna, aparte de su atractivo teórico, parece no tener ventaja computacional en particular. Sin embargo, para fines de completar la presentación, en el ejemplo 8.2-3 indicaremos cómo trabaja la regla de eliminación de columna.

Ejemplo 8.2-2

Se resolverá el problema del ejemplo 8.2-1 con el método de jerarquías. Supongamos que la meta de exposición tiene mayor prioridad.

Paso 0. $G_1 > G_2$

G_1: Minimizar s_1^+ (Satisfacer la meta de exposición)

G_2: Minimizar s_2^- (Satisfacer la meta de presupuesto)

Paso 1. Resolver el programa lineal 1.

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^+$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 + s_1^+ - s_1^- &= 45 \quad \text{(Meta de exposición)}\\
8x_1 + 24x_2 + s_2^+ - s_2^- &= 100 \quad \text{(Meta de presupuesto)}\\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \quad \text{(Límite de personal)}\\
x_1 &\leq 6 \quad \text{(Límite de radio)}\\
x_1, x_2, s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^- &\geq 0
\end{aligned}$$

La solución óptima (determinada con TORA) es $x_1 = 5$ minutos, $x_2 = 2.5$ minutos, $s_1^+ = 5$ millones de personas y las variables restantes son iguales a cero. La solución indica que la meta de exposición, G_1, se viola con 5 millones de personas.

En el programa lineal 1 se tiene $\rho_1 = s_1^+$. Así, la restricción adicional que se usará con el problema G_2 es $s_1^+ = 5$.

Paso 2. Se debe resolver el problema lineal 2, cuya función objetivo es

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^-$$

sujeto al mismo conjunto de restricciones que en el paso 1, más la restricción adicional $s_1^+ = 5$. El problema nuevo se puede resolver con la opción MODIFY (modificar) de TORA, para agregar la restricción $s_1^+ = 5$.

También se puede tener en cuenta la restricción adicional $s_1^+ = 5$ eliminando a s_1^+ por sustitución en la primera restricción. El resultado es que el lado derecho de la restricción de la meta de exposición cambiará de 45 a 40, y así el programa lineal 2 se reduce a

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^-$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 - s_1^- &= 40 \quad \text{(Meta de exposición)}\\
8x_1 + 24x_2 + s_2^+ - s_2^- &= 100 \quad \text{(Meta de presupuesto)}\\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \quad \text{(Límite de personal)}\\
x_1 &\leq 6 \quad \text{(Límite de radio)}\\
x_1, x_2, s_1^-, s_2^+, s_2^- &\geq 0
\end{aligned}$$

La nueva formulación tiene una variable menos que la del problema lineal 1; es la idea general con la regla de eliminación de columna.

En realidad, la optimización del programa lineal 2 no es necesaria en este ejemplo, porque la solución óptima al problema G_1 ya obtiene $s_2^- = 0$. Por consiguiente, la solución del programa lineal 1 es óptima automáticamente también para el programa lineal 2 (el lector puede comprobarlo resolviendo con TORA el programa lineal 2).

A continuación indicaremos con un ejemplo cómo se puede obtener una solución mejor del problema del ejemplo 8.2-2, si se usa el método de jerarquías para *optimizar* los objetivos más que para *satisfacer* las metas. Este ejemplo también sirve para demostrar la *regla de eliminación de columna* para resolver problemas de meta.

Ejemplo 8.2-3

Las metas del ejemplo 8.2-2 se pueden replantear como sigue:

Prioridad 1: maximizar exposición (P_1)

Prioridad 2: minimizar costo (P_2)

Los dos objetivos se enuncian matemáticamente como sigue:

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2 \quad \text{(Exposición)}$$
$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24\,x_2 \quad \text{(Costo)}$$

Los límites específicos de meta para exposición y costo, que son 45 y 100, se eliminan, porque el método símplex los determinará en forma óptima.

Así, el nuevo problema se puede plantear como sigue:

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2 \quad \text{(Exposición)}$$
$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24\,x_2 \quad \text{(Costo)}$$

sujetas a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Primero se resolverá el problema con el procedimiento presentado en el ejemplo 8.2-2.

Paso 1. Resolver el programa lineal 1.

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima (obtenida con TORA) es $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, con $P_1 = 40$, que muestra que la máxima exposición que se puede alcanzar es 40 millones de personas.

Paso 2. Se agrega la restricción $4x_1 + 8x_2 \geq 40$ para asegurar que no se degrade la meta G_1. Entonces se resuelve el programa lineal 2 como sigue:

$$\text{Maximizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2$$

sujeta a

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
x_1 \qquad &\leq 6 \\
4x_1 + 8x_2 &\geq 40 \quad \text{(Restricción adicional)} \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

La solución óptima del programa lineal 2, obtenida con TORA, es $P_2 = \$96{,}000$, $x_1 = 6$ minutos y $x_2 = 2$ minutos. Obtiene la misma exposición ($P_1 = 40$ millones de personas) pero a un costo menor que el del ejemplo 8.2-2, donde el objetivo principal es satisfacer las metas, más que optimizarlas.

Se resolverá ahora el mismo problema usando la regla de eliminación de columnas. Esta regla indica conservar los renglones objetivo asociadas con las metas en el cuadro símplex.

Programa lineal 1 (maximización de la exposición): La tabla símplex del programa lineal 1 tiene los dos renglones objetivo, P_1 y P_2. La condición de optimalidad se aplica sólo al renglón del objetivo P_1. El renglón de P_2 desempeña un papel pasivo en el programa lineal 1, pero debe actualizarse con el resto del cuadro símplex, para prepararlo para la optimización en el programa lineal 2.

El programa lineal 1 se resuelve en dos iteraciones como sigue:

Iteración	Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución
1	P_1	−4	−8	0	0	0
	P_2	−8	−24	0	0	0
	s_1	1	2	1	0	10
	s_2	1	0	0	1	6
2	P_1	0	0	4	0	40
	P_2	4	0	12	0	120
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	5
	s_2	1	0	0	1	6

Esta última tabla muestra la solución óptima $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ y $P_1 = 40$.

La *regla de eliminación de columna* establece la eliminación de toda variable x_j *no básica,* con $z_j - c_j \neq 0$ del cuadro óptimo del programa lineal 1, antes de optimizar el programa lineal 2. La razón de hacerlo es que esas variables, si se dejan sin control, podrían volverse positivas en los problemas de optimización de prioridades inferiores, lo cual degradaría la calidad de las soluciones de mayor prioridad.

Programa lineal 2 (minimización de costo): Con la regla de eliminación de columna se elimina s_1 (que tiene $z_j - c_j = 4$). Se puede ver, en el renglón de P_2 que si no se elimina s_1 será la variable entrante al comenzar las iteraciones de P_2 y producirá la solución óptima $x_1 = x_2 = 0$, que degradará el valor objetivo óptimo del programa 1 de $P_1 = 40$ a $P_1 = 0$ (¡haga la prueba!).

El problema lineal 2 es del tipo de minimización. Después de la eliminación de s_1, la variable x_1 que tenga $z_j - c_j = 4\ (>0)$ puede mejorar el valor de P_2. La tabla siguiente muestra las iteraciones del programa lineal 2. Los elementos del renglón de P_1 se han eliminado, porque ese renglón ya no sirve para la optimización del programa lineal 2.

Iteración	Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución
1	P_1					40
	P_2	4	0		0	120
	x_2	$\frac{1}{2}$	1		0	5
	s_2	1	0		1	6
2	P_1					40
	P_2	0	0		−4	96
	x_2	0	1		$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0		1	6

La solución óptima $(x_1 = 6, x_2 = 2)$ con una exposición total de $P_1 = 40$ y un costo total de $P_2 = 96$ es igual que la que se obtuvo más arriba.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 8.2B

1. En el ejemplo 8.2-2, suponga que la meta del presupuesto aumenta a $110,000. La meta de exposición queda igual en 45 millones de personas. Muestre cómo se llega a la solución con el método de jerarquías.

2. Resuelva el problema 1, conjunto de problemas 8.1a (modelo sobre impuestos de Fairville) usando el siguiente orden de prioridades de las metas: $G_1 \succ G_2 \succ G_3 \succ G_4 \succ G_5$.

3. En el problema 8.1a, acerca de la presentación de conciertos de bandas y exposiciones de artesanías en el NW Shopping Mall, suponga que las metas establecidas para los adolescentes, jóvenes y adultos, se representan por G_1, G_2 y G_3, respectivamente. Resuelva el problema para cada uno de los siguientes órdenes de prioridad:

a) $G_1 \succ G_2 \succ G_3$

b) $G_3 \succ G_2 \succ G_1$

Demuestre que la satisfacción (o la falta de satisfacción) de las metas puede ser una función del orden de prioridades.

4. Resuelva el modelo de Ozark University (problema 3, conjunto de problemas 8.1a) usando el método de jerarquías y suponiendo que las prioridades de las metas tienen el orden que se menciona en el problema.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Cohon, T. L., *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press, Nueva York, 1978.

Ignizio, J. P. y T. M. Cavalier, *Linear Programming*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1994.

Steuer, R. E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations and Application*, Wiley, Nueva York, 1986.

PROBLEMAS INTEGRALES

8.1[1] La Warehouzer Company administra tres bosques para producir madera y reforestar, cuyas áreas son 100,000, 180,000 y 200,000 acres, respectivamente. Los tres productos madereros principa-

[1]Basado en K. P. Rustagi, *Forest Management Planning for Timber Production*: *A Goal Programming Approach*, Boletín núm. 89, Yale University Press, New Haven, CT, 1976.

les son de tres categorías: madera para pulpa, madera terciada y madera en rollo. Hay disponibles varias alternativas de reforestación para cada sitio, cada una con su costo, cantidad de años de rotación (es decir, cantidad de años desde la plantación hasta el derribo), sus utilidades y su cantidad producida. En la siguiente tabla se resume esta información.

		$/acre, anual			m^3/acre, anual		
Sitio	*Alternativa*	*Costo*	*Renta*	*Rotación, años*	*Pulpa*	*Terciada*	*Rollo*
1	A1	1000	160	20	12	0	0
	A2	800	117	25	10	0	0
	A3	1500	140	40	5	6	0
	A4	1200	195	15	4	7	0
	A5	1300	182	40	3	0	7
	A6	1200	180	40	2	0	6
	A7	1500	135	50	3	0	5
2	A1	1000	102	20	9	0	0
	A2	800	55	25	8	0	0
	A3	1500	95	40	2	5	0
	A4	1200	120	15	3	4	0
	A5	1300	100	40	2	0	5
	A6	1200	90	40	2	0	4
3	A1	1000	60	20	7	0	0
	A2	800	48	25	6	4	0
	A3	1500	60	40	2	0	4
	A4	1200	65	15	2	0	3
	A5	1300	35	40	1	0	5

Para garantizar una producción estable en el futuro, cada acre de reforestación en cada alternativa necesita que se le asignen tantos acres como años de rotación. La columna de renta representa el valor por acre arbolado (es decir, terreno + madera en pie).

Las metas de Warehouzer son las siguientes:

1. Producciones anuales de madera para pulpa, madera terciada y rollizo de 200,000, 150,000 y 350,000 metros cúbicos, respectivamente.

2. Presupuesto anual de reforestación es $2.5 millones.

3. Ingreso anual por renta de terreno es $100 por acre.

¿Cuánto terreno debe asignarse a cada alternativa en cada sitio?

8.2 Una organización caritativa administra un refugio infantil. La organización se basa en servicio voluntario de las 8:00 A.M. a las 2:00 P.M. Los voluntarios pueden comenzar a trabajar en cualquier hora entre las 8:00 A.M. y las 11:00 A.M. Un voluntario trabaja un máximo de 6 horas y un mínimo de 2 horas, y no trabajan durante la hora del almuerzo, entre las 12:00 del medio día y la 1:00 P.M. La asociación ha estimado su meta de voluntarios en el día (de las 8:00 A.M. a las 2:00 P.M., excluyendo la hora del almuerzo), como sigue: 15, 16, 18, 20 y 16, respectivamente. El objetivo es definir la cantidad de voluntarios que deban comenzar en cada hora (8:00, 9:00, 10:00, 11:00 y 1:00) de tal modo que se cumplan las metas hasta donde sea posible.

C A P Í T U L O 9

Programación lineal entera

Los programas lineales enteros son aquellos en los que algunas o todas las variables están restringidas a tener valores enteros (o discretos). La programación lineal entera tiene aplicaciones prácticas importantes. Desafortunadamente, a pesar de décadas de extensas investigaciones, la experiencia en cómputo con programas lineales enteros ha sido menos que satisfactoria. Hasta esta fecha no existe un programa de cómputo para programas lineales enteros que pueda resolverlos en forma consistente.

9.1 APLICACIONES ILUSTRATIVAS

Las aplicaciones de la programación lineal entera de esta sección se inician con formulaciones sencillas, pasando a otras más complejas en forma gradual. Por comodidad definiremos un problema entero **puro** como aquel en el que todas las variables son enteras. En caso contrario, es un programa entero **mixto**.

Ejemplo 9.1-1 (Presupuesto de capital)

Se están evaluando cinco proyectos durante un horizonte de planeación de 3 años. La tabla siguiente muestra los ingresos esperados para cada uno, y sus gastos anuales correspondientes.

	Gastos (millones $)/año			
Proyecto	*1*	*2*	*3*	*Ingresos (millones $)*
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos disponibles (millones $)	25	25	25	

¿Cuáles proyectos se deben seleccionar para el horizonte de 3 años?

El problema se reduce a tomar una decisión "sí-no" para cada proyecto. Se define la variable binaria x_j como sigue:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si se selecciona el proyecto } j \\ 0, & \text{si no se selecciona el proyecto } j \end{cases}$$

Entonces, el programa lineal entero es

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

sujeta a

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

La solución lineal entera (obtenida con TORA[1]) es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$, con $z = 95$ (millones de \$). Esta solución indica que se deben seleccionar todos los proyectos, menos el 5.

Es interesante comparar la solución obtenida con programación lineal continua y con programación entera. El programa lineal óptimo, obtenido reemplazando $x_j = (0, 1)$ con $0 \leq x_j \leq 1$ para toda j, da como resultado $x_1 = 0.5789$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0.7368$ y $z = 108.68$ (millones de \$). Esta solución no tiene sentido, porque dos de las variables asumen valores fraccionarios. Se puede *redondear* la solución a los valores enteros más cercanos, con lo cual se obtienen $x_1 = x_5 = 1$. Sin embargo, la solución resultante no es factible, porque se violan las restricciones. Lo más importante es que no se debe aplicar el concepto de *redondeo*, porque x_j representa una decisión "sí-no" para la cual no tienen sentido los valores fraccionarios.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1A[2]

1. En el modelo de presupuesto de capital del ejemplo 9.1-1, suponga que se debe seleccionar el proyecto 5 si se selecciona alguno de los proyectos 1 o 3. Modifique el modelo para incluir la nueva restricción y determine la solución óptima con TORA.

2. Se deben cargar cinco artículos en un barco. A continuación se muestra el peso w_i, el volumen v_i y el valor unitario r_i de cada artículo i.

Artículo i	Peso unitario, w_i (ton)	Volumen unitario, v_i (yd^3)	Valor unitario, r_i (100 \$)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

El peso y el volumen máximo de la carga son 112 toneladas y 109 yardas cúbicas, respectivamente. Formule el modelo de programa lineal entero y determine la carga más valiosa, usando TORA.

[1]Para usar TORA, seleccione `Integer Programming` (Programación entera) en el `Main Menu` (Menú principal). Después de capturar el problema (archivo Ch9ToraCapitalBudgetEx9-1-1.txt), vaya a la pantalla de resultados y seleccione `Automated B&B` (ramificación y acotamiento automático) para obtener la solución óptima.

[2]Los problemas 3 a 6 se adaptaron de Malba Tahan, *El hombre que calculaba*, Editorial Limusa, México, D. F., 1994, págs. 39-182.

3. Suponga que tiene 7 botellas de vino llenas, 7 medio llenas y 7 vacías. Quisiera dividir las 21 botellas entre tres individuos, para que cada uno reciba exactamente 7. Además, cada individuo debe recibir la misma cantidad de vino. Exprese el problema como ecuaciones de restricción de programa lineal entero, y determine una solución con TORA. (*Sugerencia:* use una función objetivo ficticia en la que todos los coeficientes objetivo sean cero.)
4. Un sheikh excéntrico dejó un testamento para distribuir un hato de camellos entre sus tres hijos: Tarek recibe al menos la mitad del hato. Sharif recibe al menos un tercio y Maisa recibe al menos un noveno, y el resto va a una institución de beneficencia. El testamento no especifica el tamaño del hato, y sólo dice que es una cantidad impar de camellos, y que la institución mencionada reciba exactamente un camello. ¿Cuántos camellos dejó el sheikh en su testamento, y cuántos recibió cada hijo?
5. Una pareja de campesinos manda a sus tres hijos al mercado, para vender 90 manzanas, con el propósito de que vayan aprendiendo los asuntos relacionados con el dinero y los números. Karen, la mayor, lleva 50 manzanas, Bill, el intermedio, lleva 30 y John, el menor, sólo lleva 10. Los padres estipularon cinco reglas: a) El precio de venta es de $1 por 7 manzanas o $3 por 1 manzana, o una combinación de los dos precios; b) cada niño puede optar por una o ambas opciones del precio de venta; c) cada niño debe regresar exactamente con la misma cantidad de dinero; d) el ingreso de cada niño debe ser en ($) enteros (no se permiten centavos), y e) la cantidad que reciba cada niño debe ser la mayor posible, bajo las condiciones estipuladas. Como los tres niños deben vender todo lo que tienen, ¿cómo pueden satisfacer las condiciones de los padres?
6. Había una vez un capitán de barco mercante que deseaba recompensar a tres miembros de su tripulación por sus valientes esfuerzos para salvar la carga durante una inesperada tormenta en alta mar. El capitán apartó cierta cantidad de dinero en la oficina del pagador, y le dijo al primer oficial que la distribuyera por igual entre los tres marineros, una vez que el barco hubiera llegado a tierra. Una noche, uno de los marineros, desconocido para los otros, entró a la oficina del pagador y decidió pedir por adelantado la tercera parte del dinero. Después de dividir el dinero en tres partes iguales, quedó una moneda adicional, que decidió conservar el marinero (además de su tercera parte). La siguiente noche, el segundo marinero fue con la misma petición y repitió la misma división en tres, de lo que quedaba, terminando también con una moneda adicional. La tercera noche el tercer marinero también tomó la tercera parte de lo que quedaba, quedando una moneda que no se pudo repartir. Cuando el barco llegó a tierra, el primer oficial dividió lo que quedaba por igual, entre los tres marinero, y quedó también una moneda adicional. Para simplificar las cosas, el primer oficial apartó la moneda adicional y dio partes iguales a los tres marineros. ¿Cuánto dinero había en la caja al principio? Formule el problema como programa lineal entero y determine la solución con TORA. (*Sugerencia:* el problema tiene una cantidad infinita contable de soluciones enteras. Por comodidad suponga que lo que interesa es determinar la cantidad total de dinero que satisfaga el problema. Después, aumente 1 a la solución que resulte y auméntela como cota inferior, y obtenga la siguiente solución más pequeña. Si continúa de esta manera notará que surge una pauta de solución general.)
7. Tiene usted las siguientes palabras de tres letras: AFT, FAR, TVA, ADV, JOE, FIN, OSF y KEN. Suponga que se asignan valores numéricos al alfabeto, comenzando con $A = 1$ y terminando con $Z = 26$. Se califica cada palabra sumando las claves numéricas de sus tres letras. Por ejemplo, la calificación de AFT es $1 + 6 + 20 = 27$. Debe usted seleccionar cinco de las ocho palabras que obtengan la máxima calificación total. Al mismo tiempo, las cinco palabras seleccionadas deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{pmatrix}\text{suma de las califica-}\\ \text{ciones de la letra 1}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{suma de las califica-}\\ \text{ciones de la letra 2}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{suma de las califica-}\\ \text{ciones de la letra 3}\end{pmatrix}$$

Formule el problema como programa lineal entero y determine la solución óptima con TORA.

8. La empresa Record-a-Song Company ha contratado una estrella en ascenso para grabar ocho canciones. La duración de esas canciones es de 8, 3, 5, 5, 9, 6, 7 y 12 minutos, respectivamente. Record-a-Song usa cinta de ida y vuelta para la grabación. Cada lado tiene 30 minutos de capacidad. La empresa desea distribuir las canciones en los dos lados, en forma equilibrada. Eso quiere decir que la duración de las canciones en cada lado debe ser más o menos la misma, hasta donde sea posible. Formule el problema como programa lineal entero, y determine la solución óptima.

9. En el problema 8, suponga que la naturaleza de las melodías es tal que no se pueden grabar las canciones 3 y 4 en el mismo lado. Formule el problema como programa lineal entero. ¿Es posible usar una cinta de 25 minutos en cada lado para grabar las 8 canciones? Si no es posible, use programación lineal entera para determinar la capacidad mínima de cinta para hacer la grabación.

Ejemplo 9.1-2 (Problema de cargo fijo)

Tres empresas telefónicas pidieron que me suscribiera a su servicio de larga distancia dentro del país. MaBell cobra $16 fijos por mes, más $0.25 por minuto. PaBell cobra $25 por mes, pero el costo por minuto se reduce a $0.21. Y con BabyBell, la tarifa fija es $18 mensual, y la proporcional es $0.22 por minuto. Suelo hacer un promedio de 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no pague el cargo fijo si no hago llamadas, y que puedo repartir a voluntad mis llamadas entre las tres empresas, ¿cómo debo repartir las llamadas entre las tres empresas para minimizar mi recibo telefónico mensual?

Este problema se puede resolver con facilidad sin programación lineal entera. Sin embargo, es ilustrativo formularlo como programa entero.

Se definen

$$x_1 = \text{Minutos de larga distancia por mes con MaBell}$$

$$x_2 = \text{Minutos de larga distancia por mes con PaBell}$$

$$x_3 = \text{Minutos de larga distancia por mes con BabyBell}$$

$$y_1 = 1 \text{ si } x_1 > 0 \text{ y } 0 \text{ si } x_1 = 0$$

$$y_2 = 1 \text{ si } x_2 > 0 \text{ y } 0 \text{ si } x_2 = 0$$

$$y_3 = 1 \text{ si } x_3 > 0 \text{ y } 0 \text{ si } x_3 = 0$$

Se puede asegurar que y_j sea igual a 1 si x_j es positiva usando la restricción

$$x_j \leq My_j, j = 1, 2, 3$$

Se debe seleccionar el valor de M lo suficientemente grande como para no restringir en forma artificial a las variables x_j. Como hago aproximadamente 200 minutos de llamadas por mes, entonces $x_j \leq 200$ para toda j, y se puede seleccionar $M = 200$ con seguridad.

El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = 0.25x_1 + 0.21x_2 + 0.22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 200 \\ x_1 \qquad &\leq 200y_1 \\ x_2 \qquad &\leq 200y_2 \end{aligned}$$

$$x_3 \leq 200y_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$y_1, y_2, y_3 = (0, 1)$$

Esta formulación indica que la tarifa fija del j-ésimo mes será parte de la función objetivo z sólo si $y_j = 1$, lo cual sólo puede suceder si $x_j > 0$ (de acuerdo con las últimas tres restricciones del modelo). Si $x_j = 0$ en el óptimo, entonces la minimización de z, junto con el hecho de que el coeficiente objetivo de y_j es estrictamente positivo, obligará a que y_j sea igual a cero, que es lo que se quería.

La solución óptima (archivo Ch9ToraFixedChargeEx9-1-2.txt) es $x_3 = 200$, $y_3 = 1$ y todas las demás variables iguales a cero, y eso quiere decir que debo seleccionar a BabyBell para mi servicio de larga distancia. Nótese que la información que aporta $y_3 = 1$ es redundante, porque el mismo resultado se implica en $x_3 > 0$ $(= 200)$. En realidad, la razón principal de usar y_1, y_2 y y_3 es para tener en cuenta la tarifa fija mensual. De hecho, las tres variables binarias convierten un modelo de mal comportamiento (no lineal) en una formulación manejable analíticamente. La conversión ha causado la introducción de las variables (binarias) enteras en un problema que hubiera sido continuo.

El concepto de "cargo fijo" es característico de lo que en las publicaciones se llama **problema del cargo fijo**.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1B

1. Jobco planea producir al menos 2000 piezas en tres máquinas. El tamaño mínimo de lote en cualquier máquina es 500 piezas. La siguiente tabla contiene los datos pertinentes del caso.

Máquina	Costo de preparación	Costo de producción/unidad	Capacidad (unidades)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Formule el problema como programa lineal entero y determine su solución óptima con TORA.

2. Oilco está considerando dos sitios potenciales de perforación para alcanzar cuatro objetivos (quizá sean pozos petroleros). La siguiente tabla muestra los costos de preparación en cada uno de los dos sitios, y el costo de perforación del sitio i hasta el objetivo j ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$).

	Costo de perforación (millones de $) hasta el yacimiento				
Sitio	*1*	*2*	*3*	*4*	*Costo de preparación (millones de $)*
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Formule el problema como programa lineal entero y determine su solución óptima con TORA.

3. Se están estudiando tres parques industriales para ubicar plantas de manufactura. Las plantas mandan sus productos a tres clientes. El suministro en las plantas y la demanda de los clientes

se ven en la siguiente tabla, junto con los costos unitarios de transporte desde las plantas hasta los clientes.

	1	2	3	Oferta
1	\$10	\$15	\$12	**1800**
2	\$17	\$14	\$20	**1400**
3	\$15	\$10	\$11	**1300**
Demanda	**1200**	**1700**	**1600**	

Además de los costos de transporte, también hay costos fijos de \$12,000, \$11,000 y \$12,000 para las plantas 1, 2 y 3, respectivamente. Formule el problema como programa lineal entero y determine su solución óptima con TORA.

4. Repita el problema 3 suponiendo que las demandas de los clientes 2 y 3 se cambian a 800 cada uno.

Ejemplo 9.1-3 (Problema de cobertura de conjunto)

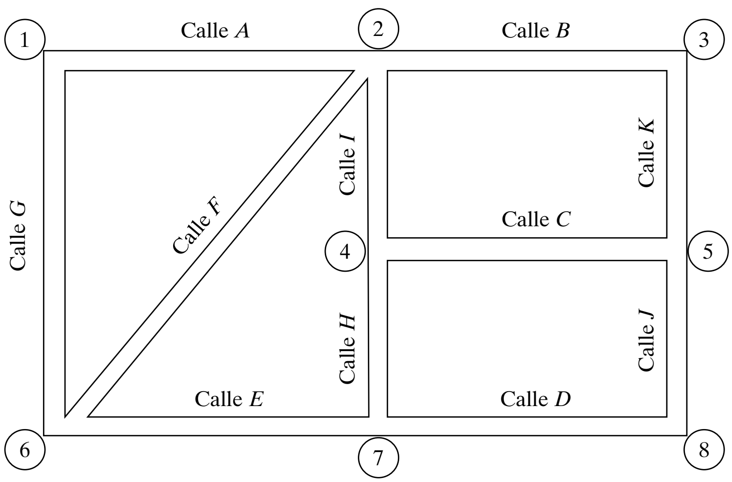
Para promover la seguridad en la universidad, el Departamento de Seguridad de la U de A está en proceso de instalar teléfonos de emergencia en lugares seleccionados. Dicho departamento desea instalar la cantidad mínima de teléfonos, para que cada una de las calles principales de la universidad tenga al menos un teléfono. La figura 9.1 es un mapa de las calles principales (A a K) de la universidad.

Es lógico poner los teléfonos en los cruces de las calles, para que cada uno dé servicio cuando menos a dos calles. En la figura 9.1 se ve que la distribución de las calles requiere un máximo de ocho ubicaciones de teléfono.

Se definirá

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si un teléfono está en el lugar } j \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

FIGURA 9.1
Mapa de las calles de la U de A



Para cumplir con las restricciones del problema se requiere instalar al menos un teléfono en cada una de las 11 calles (A a K). Así, el modelo viene a ser

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 1 \quad \text{(Calle } A\text{)}\\
x_2 + x_3 &\geq 1 \quad \text{(Calle } B\text{)}\\
x_4 + x_5 &\geq 1 \quad \text{(Calle } C\text{)}\\
x_7 + x_8 &\geq 1 \quad \text{(Calle } D\text{)}\\
x_6 + x_7 &\geq 1 \quad \text{(Calle } E\text{)}\\
x_2 + x_6 &\geq 1 \quad \text{(Calle } F\text{)}\\
x_1 + x_6 &\geq 1 \quad \text{(Calle } G\text{)}\\
x_4 + x_7 &\geq 1 \quad \text{(Calle } H\text{)}\\
x_2 + x_4 &\geq 1 \quad \text{(Calle } I\text{)}\\
x_5 + x_8 &\geq 1 \quad \text{(Calle } J\text{)}\\
x_3 + x_5 &\geq 1 \quad \text{(Calle } K\text{)}\\
x_j = (0, 1),\ j &= 1, 2, \ldots, 8
\end{aligned}$$

La solución óptima del problema (obtenida con TORA, archivo Ch9ToraSetCoverEx9-1-3.txt) requiere instalar cuatro teléfonos, en los cruceros 1, 2, 5 y 7. El problema tiene óptimos alternativos.

El modelo anterior es característico de lo que se conoce en forma genérica como **problema de cobertura de conjunto**. En este modelo, todas las variables son binarias. Para cada restricción, todos los coeficientes del lado izquierdo son 0 o 1, y el lado derecho tiene la forma (≥ 1). La función objetivo minimiza siempre $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, donde $c_j > 0$ para toda $j = 1, 2, \ldots, n$. En este ejemplo, $c_j = 1$ para toda j. Sin embargo, si c_j representa el costo de instalación en el lugar j, esos coeficientes pueden asumir valores distintos de 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1C

1. ABC es una empresa de transportes por carretera que entrega cargas diariamente a cinco clientes. La siguiente tabla muestra los clientes correspondientes a cada ruta.

Ruta	Clientes
1	1, 2, 3, 4
2	4, 3, 5
3	1, 2, 5
4	2, 3, 5
5	1, 4, 2
6	1, 3, 5

La capacidad del camión que entrega las cargas es la que determina los segmentos de cada ruta. Por ejemplo, en la ruta 1, la capacidad del camión sólo es suficiente para transportar las cargas a los clientes 1, 2, 3 y 4. La siguiente tabla muestra las distancias en millas de la terminal de los camiones (ABC) y los cinco clientes.

	ABC	1	2	3	4	5
ABC	0	10	12	16	9	8
1	10	0	32	8	17	10
2	12	32	0	14	21	20
3	16	8	14	0	15	18
4	9	17	21	15	0	11
5	8	10	20	18	11	0

El objetivo es determinar la distancia mínima necesaria para hacer las entregas diarias a los cinco clientes. Aunque la solución indique que a un cliente se le dé servicio en más de una ruta, en la fase de implementación sólo se usará una de ellas. Formule el problema como programa lineal entero, y resuélvalo con TORA.

2. La U de A está en proceso de formar un comité para manejar las quejas de los alumnos. La directriz que se recibe de la administración es incluir al menos una mujer, un hombre, un alumno, un administrador y un maestro. Se han nominado 10 personas (que para simplificar se identifican con las letras *a* a *j*). La proporción de ellos en las distintas categorías es la siguiente:

Categoría	Individuos
Mujeres	*a, b, c, d, e*
Hombres	*f, g, h, i, j*
Alumnos	*a, b, c, j*
Administradores	*e, f*
Maestros	*d, g, h, i*

La U de A desea formar el comité más pequeño que tenga representación de cada una de las cinco categorías. Formule el problema como programa lineal entero y determine la solución óptima con TORA.

3. El condado de Washington abarca seis pueblos que necesitan servicio de ambulancia de emergencia. Debido a la proximidad de algunos de los pueblos, una sola estación puede dar servicio a más de una comunidad. Se estipula que la estación debe estar a menos de 15 minutos por carretera de los pueblos a los que proporciona servicio. La siguiente tabla muestra los tiempos de conducción por carretera, en minutos, entre los seis pueblos.

	1	2	3	4	5	6
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Formule un programa lineal entero cuya solución dé como resultado la cantidad mínima de estaciones, y sus ubicaciones. Calcule la solución con TORA.

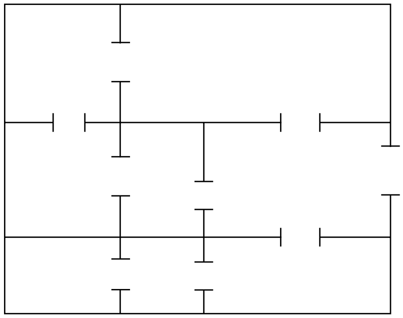


FIGURA 9.2

Plano del museo para el problema 4, conjunto de problemas 9.1c

4. En un museo de Nueva Orleáns se exhiben los tesoros del Rey Tut. La distribución del museo se ve en la figura 9.2, con las puertas abiertas que unen los diversos recintos. Un guardia parado en una puerta puede vigilar los dos recintos vecinos. El museo desea asegurar la presencia de la guardia en cada recinto, usando la mínima cantidad posible de ellos. Formule el problema como programa lineal entero y determine la solución óptima con TORA.

Ejemplo 9.1-4 (Restricciones "o bien")

Jobco usa una sola máquina para procesar tres trabajos. El tiempo de procesamiento y la fecha de entrega (en días) para cada trabajo se ven en la siguiente tabla. Las fechas de entrega se miden a partir de la referencia cero, que es el tiempo supuesto de inicio del primer trabajo.

Trabajo	Tiempo de procesamiento (días)	Fecha de entrega (días)	Multa por retardo, $/día
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

El objetivo del problema es determinar la secuencia mínima de penalización por retraso al procesar los tres trabajos.

Definiremos a

$$x_j = \text{Fecha de inicio del trabajo } j \text{ (en días a partir de la referencia cero)}$$

El problema tiene dos clases de restricciones: las de no interferencia (para que los trabajos no se procesen al mismo tiempo) y las restricciones de fecha de vencimiento. Primero se examinarán las restricciones de no interferencia.

Dos trabajos, i y j, con tiempos de procesamiento p_i y p_j, no se procesarán al mismo tiempo si $x_i \geq x_j + p_j$ o si $x_j \geq x_i + p_i$, dependiendo de si el trabajo j es anterior al i, o viceversa. Como todos los programas matemáticos manejan sólo restricciones *simultáneas*, se transformarán las restricciones "o bien" (también se llaman "uno u otro") a las siguientes restricciones *simultáneas*

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ es anterior a } j \\ 0, & \text{si } j \text{ es anterior a } i \end{cases}$$

Para M suficientemente largo, la restricción "o bien" se convierte a las restricciones *simultáneas* siguientes

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ y } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i$$

Esta conversión garantiza que sólo puede estar vigente una de las dos restricciones en cualquier momento. Si $y_{ij} = 0$, la primera restricción es activa y la segunda es redundante (porque en su lado izquierdo estará M, que es mucho mayor que p_i). Si $y_{ij} = 1$, la primera restricción es redundante y la segunda es activa.

A continuación se examina la restricción de la fecha de vencimiento. Como d_j es la fecha de vencimiento para el trabajo j, sea s_j la variable no restringida. Entonces, la restricción correspondiente es

$$x_j + p_j + s_j = d_j$$

Si $s_j \geq 0$, se cumple con la fecha de entrega, y si $s_j < 0$, se incurre en una penalización por retraso. Si se usa la sustitución

$$s_j = s_j^+ - s_j^-, \; s_j^+, s_j^- \geq 0$$

la restricción se vuelve

$$x_j + s_j^+ - s_j^- = d_j - p_j$$

El costo de penalización por retraso es proporcional a s_j^-.

El modelo para este problema es

$$\text{Minimizar } z = 19s_1^- + 12s_2^- + 34s_3^-$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + My_{12} &\geq 20\\
-x_1 + x_2 - My_{12} &\geq 5 - M\\
x_1 - x_3 + My_{13} &\geq 15\\
-x_1 + x_3 - My_{13} &\geq 5 - M\\
x_2 - x_3 + My_{23} &\geq 15\\
- x_2 + x_3 - My_{23} &\geq 20 - M\\
x_1 + s_1^+ - s_1^- &= 25 - 5\\
x_2 + s_2^+ - s_2^- &= 22 - 20\\
x_3 + s_3^+ - s_3^- &= 35 - 15
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1^+, s_1^-, s_2^+, s_2^-, s_3^+, s_3^- \geq 0$$

$$y_{12}, y_{13}, y_{23} = (0, 1)$$

Las variables enteras, y_{12}, y_{13} y y_{23}, se introducen para convertir las restricciones de uno u otro en restricciones simultáneas. El modelo que resulta es un programa lineal entero *mixto*.

Para resolverlo, se escoge $M = 1000$, valor que es mayor que los tiempos de procesamiento de las tres actividades.

La solución óptima (obtenida con TORA, archivo Ch9ToraEitherOrEx9-1-4.txt[3]) es $x_1 = 20$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 25$. Eso quiere decir que el trabajo 2 comienza en el tiempo 0, el trabajo 1 comienza en el tiempo 20 y el trabajo 3 comienza en 25, por lo que la secuencia óptima de procesamiento es $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$. Esta solución indica terminar el trabajo 2 en el tiempo $0 + 20 = 20$, el trabajo 1 en el tiempo $20 + 5 = 25$ y el trabajo 3 en $25 + 55 = 40$ días. El trabajo 3 se demora $40 - 35 = 5$ días de su fecha de entrega, a un costo de $5 \times \$34 = \$170$.

[3]Como TORA no acepta un lado izquierdo negativo, la variable lado derecho (RHS-) cuyo valor siempre es 1, asume el papel del lado derecho de las restricciones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1D

1. Un juego de sobremesa consiste en nueve cuadros iguales. Se debe llenar cada cuadro con un número entre 1 y 9, de tal modo que la suma de los números en cada renglón, cada columna y cada diagonal sea de 15. Use programación lineal entera para determinar el número que se debe poner en cada cuadro, de tal modo que no haya dos números adyacentes iguales en cualquier renglón, columna o diagonal. Resuélvalo con TORA.
2. Para producir dos artículos intercambiables se usa una máquina. Su capacidad diaria es cuando mucho de 20 unidades del artículo 1 y 10 unidades del artículo 2. También, esa máquina se puede ajustar para producir cuando mucho 12 unidades del artículo 1 y 22 del producto 2, diariamente. El análisis del mercado indica que la demanda máxima diaria combinada de los dos artículos es de 35 unidades. Las utilidades unitarias para los dos artículos son $10 y $12 (1 y 2, respectivamente), ¿cuál de los dos ajustes de máquina se debe seleccionar? Formule el problema como programa lineal entero y determine su óptimo usando TORA. (*Nota:* este problema bidimensional se puede resolver inspeccionando el espacio gráfico de soluciones. No es así cuando el problema es de n dimensiones.)
3. Gapco fabrica tres productos, cuyos requisitos diarios de mano de obra y de materia prima aparecen en la siguiente tabla.

Producto	Mano de obra diaria requerida (hr/unidad)	Materia prima diaria requerida (lb/unidad)
1	3	4
2	4	3
3	5	6

Las utilidades por unidad de los tres productos son $25, $30 y $22, respectivamente. Gapco tiene dos opciones para ubicar su planta. Esas dos opciones difieren principalmente por la disponibilidad de mano de obra y de materia prima, como se ve en la siguiente tabla:

Lugar	Mano de obra diaria disponible (hr)	Materia prima diaria disponible (lb)
1	100	100
2	90	120

Formule el problema como programa lineal entero y use TORA para determinar el lugar óptimo para la planta.

4. Se tiene el problema de programación del taller, donde se fabrican dos productos usando una sola máquina. Las relaciones de precedencia entre las ocho operaciones se resumen en la figura 9.3. Sea p_j el tiempo de procesamiento para la operación j $(=1, 2, \ldots, n)$. Las fechas de vencimiento, a partir de la referencia cero, para los productos 1 y 2, son d_1 y d_2, respectivamente. Cuando se inicia una operación se debe terminar antes de que comience otra. Formule el problema como programa lineal entero mixto.

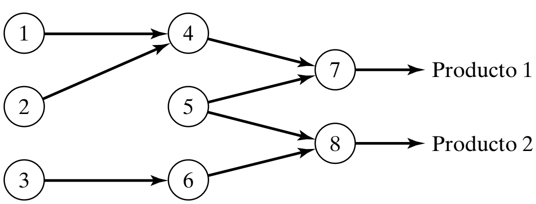


FIGURA 9.3
Relaciones de precedencia para el caso del taller del problema 4, conjunto de problemas 9.1d

5. Jaco posee una planta donde se fabrican tres productos. Los requisitos de mano de obra y materias primas de cada uno se ven en la siguiente tabla.

Producto	Mano de obra diaria disponible (hr)	Materia prima diaria disponible (lb)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Disponibilidad diaria	100	100

Las utilidades por unidad de los productos son \$25, \$30 y \$45, respectivamente. Si se ha de fabricar el producto 3, su nivel de producción mínimo debe ser 5 unidades diarias. Formule el problema como programa lineal entero mixto y determine la mezcla óptima con TORA.

6. Indique cómo se pueden representar los espacios no convexos de soluciones de la figura 9.4 por un conjunto de restricciones simultáneas. A continuación use TORA para determinar la solución óptima que maximice $z = 2x_1 + 3x_2$ sujeta al espacio de soluciones (a).

7. Suponga que se requiere que k restricciones *cualesquiera* de las m siguientes restricciones debe estar vigente:

$$g_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Indique cómo se puede representar esa condición.

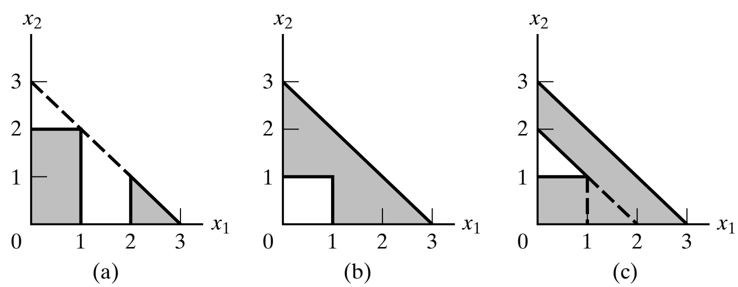
8. En la siguiente restricción, el lado derecho puede asumir uno de los valores $b_1, b_2, \ldots,$ y b_m.

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1, b_2, \ldots, \text{ o } b_m$$

Indique cómo se representa esta condición.

FIGURA 9.4

Espacios de soluciones para el problema 6, conjunto de problemas 9.1d



9.2 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Los algoritmos de programación lineal entera se basan en el aprovechamiento del gran éxito computacional de la programación lineal. En la estrategia de esos algoritmos intervienen tres pasos.

Paso 1. Relajar el espacio de soluciones del programa lineal entero omitiendo la restricción entera en todas las variables enteras, y sustituyéndola con cualquier variable binaria y que tenga el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del relajamiento es un programa lineal normal.

Paso 2. Resolver el programa lineal e identificar su óptimo continuo.

Paso 3. Iniciar en el punto óptimo continuo e ir agregando restricciones especiales que modifiquen en forma iterativa el espacio de soluciones del programa lineal, en una forma que al final produzca un punto extremo que satisfaga los requisitos enteros.

Se han desarrollado dos métodos generales para obtener las restricciones especiales del paso 3.

1. Método de ramificación y acotamiento (B&B, de *branch-and-bound*).
2. Método del plano cortante.

Aunque ninguno de ellos es efectivo computacionalmente en forma consistente, de acuerdo con la experiencia el método B&B es mucho mejor que el del plano cortante. Después en este capítulo describiremos este punto.

9.2.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B)

El primer algoritmo B&B fue desarrollado por A. Land y G. Doig en 1960, para el problema general de programación lineal entera mixta y pura. Después, en 1965, E. Balas desarrolló el **algoritmo aditivo** para resolver problemas de programa lineal entero con variables binarias (cero o uno) puras. Los cálculos del algoritmo aditivo eran tan sencillos (principalmente suma y resta) que se le aclamó como un gran avance en la solución del programa lineal entero.[4] Desafortunadamente, el algoritmo no pudo materializar las ventajas computacionales. Además se demostró que el algoritmo, que al principio pareció no estar relacionado con la técnica B&B, no es más que un caso especial del algoritmo general de Land y Doig.

En esta sección se presentará sólo el algoritmo general B&B de Land y Doig. Para explicar sus detalles usaremos un ejemplo numérico.

Ejemplo 9.2-1

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \text{ es entero no negativo}$$

Los puntos de red de la figura 9.5 definen el espacio de soluciones del programa lineal entero. El problema lineal asociado, el “0”, se define eliminando las restricciones enteras. Su solución óptima es $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.25$ y $z = 23.75$.

Como la solución óptima del programa lineal 0 no satisface los requisitos enteros, el algoritmo de ramificación y acotamiento modifica el espacio de soluciones de tal manera que al final se identifica el programa lineal entero óptimo. Primero se selecciona una de las variables enteras,

---

[4]Un programa lineal entero se puede expresar en términos de variables binarias (0-1) como sigue. Dada una variable entera x con una cota superior u finita (es decir, $0 \leq x \leq u$),

$$x = 2^0y_0 + 2^1y_1 + 2^2y_2 + \dots + 2^ky_k$$

Las variables $y_0, y_1, \dots,$ y y_k son binarias, y el índice k es el mínimo entero que satisface $2^{k+1} - 1 \geq u$.

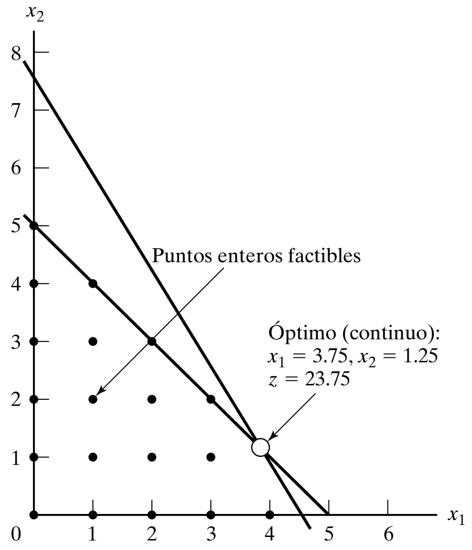


FIGURA 9.5

Espacio de soluciones de programa lineal entero del ejemplo 9.2-1

cuyo valor óptimo en el programa 0 no sea entero. Si se selecciona x_1 (= 3.75) en forma arbitraria, la región $3 < x_1 < 4$ del espacio de soluciones del programa 0 no contiene valores enteros de x_1 y se puede eliminar como poco prometedor. Eso equivale a reemplazar el programa lineal 0 original con dos nuevos programas lineales, el 1 y el 2 (PL1 y PL2), que se definen como sigue:

$$\text{Espacio de PL1} = \text{Espacio de PL0} + (x_1 \leq 3)$$

$$\text{Espacio de PL2} = \text{Espacio de PL0} + (x_1 \geq 4)$$

La figura 9.6 muestra los espacios PL1 y PL2. Los dos contienen los mismos puntos enteros factibles del programa lineal entero original, lo que significa que, desde el punto de vista de la solución entera, manejar PL1 y PL2 es lo mismo que manejar el PL0 original.

Si se continúa *en forma inteligente* eliminando las regiones que no incluyan a soluciones enteras, imponiendo las restricciones adecuadas (como $3 < x_1 < 4$ en PL0), al final se producirán programa lineales cuyos puntos extremos óptimos satisfacen las restricciones enteras. De hecho, se resolverá el programa lineal entero manejando una sucesión de programas lineales continuos.

Las nuevas restricciones, $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$, son mutuamente excluyentes, por lo que PL1 y PL2 se deben manejar como programas lineales separados, como se ve en la figura 9.7. Esta dicotomización da lugar al concepto de **ramificación** en el algoritmo de ramificación y acotamiento, y x_1 es la **variable de ramificación**.

El programa lineal entero óptimo está en PL1 o en PL2. Por consiguiente, se deben examinar ambos subproblemas. En forma arbitraria se examinará primero PL1 (asociado con $x_1 \leq 3$).

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

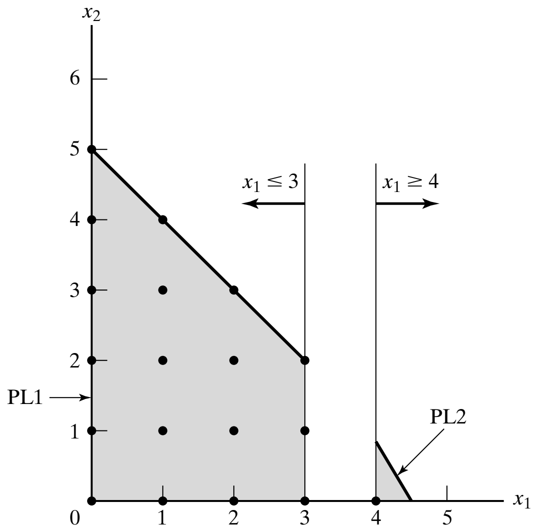


FIGURA 9.6

Espacios de soluciones de PL1 y PL2, para el ejemplo 9.2-1

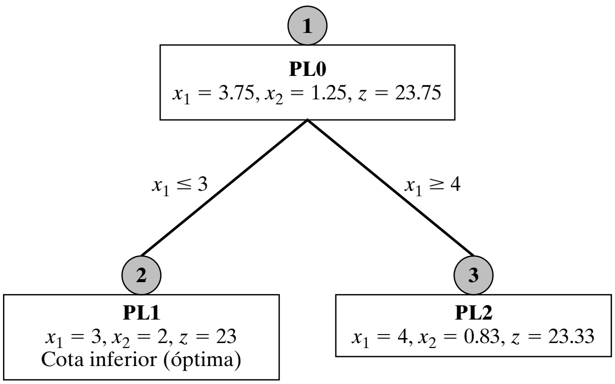


FIGURA 9.7

Uso de la variable de ramificación x1 para crear PL1 y PL2, en el ejemplo 9.2-1

La solución óptima de PL1 (que se puede encontrar en forma eficiente con el algoritmo de cota superior en la sección 7.3) es la siguiente:

$$x_1 = 3, x_2 = 2 \text{ y } z = 23$$

Esta solución satisface los requisitos de ser entero para x_1 y x_2. Por consiguiente, se dice que PL1 está **agotado**. Eso quiere decir que ya no se necesita investigar más el PL1, porque no puede producir una solución *mejor* del programa lineal entero.

En este punto no se puede decir que la solución entera obtenida con el programa 1 sea la óptima para el problema original, porque el programa 2 puede tener una solución entera mejor (con mayor valor de z). Todo lo que se puede decir es que $z = 23$ es una **cota inferior** del valor objetivo óptimo (máximo) del programa lineal entero original. Eso quiere decir que todo subproblema que no se haya examinado que no pueda dar un valor objetivo mejor que la cota inferior debe descartarse como no prometedor. Si un subproblema no examinado produce una solución entera mejor, se debe actualizar la cota inferior en consecuencia.

Dada la cota inferior $z = 23$, se examina el programa lineal 2 (el único subproblema que queda no examinado). Como la z óptima es $= 23.75$ en el programa 0 *y sucede que todos los*

coeficientes de la función objetivo son enteros, es imposible que el PL2 (que es más restrictivo que el programa 0) produzca una mejor solución entera. En consecuencia se descarta al PL2 y se llega a la conclusión que se ha *agotado*.

Ahora ya está completo el algoritmo B&B o de ramificación y acotamiento, porque se han examinado los programas lineales 1 y 2, y se han agotado (el primero, por producir una solución entera y el segundo por demostrar que no puede producir una solución entera mejor). Así se llega a la conclusión que la solución óptima del programa lineal entero es la que se asocia con la cota inferior: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $z = 23$.

Acerca de este procedimiento hay dos preguntas que quedan sin contestar:

1. En el programa lineal 0, ¿se pudo haber seleccionado x_2 como la *variable de ramificación* en lugar de x_1?

2. Al seleccionar el siguiente subproblema a examinar, ¿se habría podido resolver el PL2 primero, en lugar del PL1?

Las respuestas de ambas preguntas son "sí". Sin embargo, los cálculos siguientes podrían diferir mucho entre sí. Esto se ve en la figura 9.8, donde se examina primero PL2. La solución óptima de PL2 es $x_1 = 4$, $x_2 = 0.83$ y $z = 23.33$ (compruébelo usando el módulo LP de TORA). Como x_2 (= 0.83) no es entera, se sigue investigando el PL2, creando los subproblemas PL3 y PL4, con las ramas $x_2 \leq 0$ y $x_2 \geq 1$, respectivamente. Eso quiere decir que

$$\begin{aligned}\text{Espacio de PL3} &= \text{Espacio de PL2} + (x_2 \leq 0)\\ &= \text{Espacio de PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0)\\ \text{Espacio de PL4} &= \text{Espacio de PL2} + (x_2 \geq 1)\\ &= \text{Espacio de PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \geq 1)\end{aligned}$$

Tenemos tres subproblemas pendientes que hay que examinar: PL1, PL3 y PL4. Supongamos que en forma arbitraria examináramos PL4 primero. PL4 no tiene solución y en consecuencia está agotado. A continuación examinemos el PL3. La solución óptima es $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$ y $z = 22.5$. El valor no entero de x_1 (= 4.5) lleva a las dos ramas $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$, y a la creación de los subproblemas PL5 y PL6, a partir del PL3:

$$\text{Espacio de PL5} = \text{Espacio de PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \leq 4) \equiv \text{Espacio de PL0} + (x_1 = 4) + (x_2 \leq 0)$$

$$\text{Espacio de PL6} = \text{Espacio de PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \geq 5) \equiv \text{Espacio de PL0} + (x_1 \geq 5) + (x_2 \leq 0)$$

Ahora quedan sin examinar los subproblemas PL1, PL5 y PL6. El PL6 está agotado, porque no tiene solución factible. A continuación, PL5 tiene la solución entera ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 20$) y en consecuencia produce una cota inferior ($z = 20$) para la solución óptima del programa lineal entero. Nos queda el subproblema PL1, cuya solución produce un entero mejor ($x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 23$). Así, se actualiza la cota inferior a $z = 23$. Como se han agotado *todos* los subproblemas, la solución óptima corresponde a la cota inferior más actualizada, que es $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $z = 23$.

La secuencia de soluciones de la figura 9.8 (LP0 $\rightarrow$ LP2 $\rightarrow$ LP4 $\rightarrow$ LP3 $\rightarrow$ LP6 $\rightarrow$ LP5 $\rightarrow$ LP1) es un escenario del peor de los casos que, sin embargo, se puede presentar en la práctica. El ejemplo resalta uno de los principales puntos débiles del algoritmo de ramificación y acotamiento: ¿cómo se selecciona el siguiente subproblema a examinar, y cómo se escoge su variable de ramificación?

En la figura 9.7 pudimos "tropezar" con una buena cota inferior desde el primer subproblema, PL1, y con ello pudimos agotar a PL2 sin más cálculos, terminando la búsqueda B&B. En esencia completamos el procedimiento resolviendo sólo un subproblema. En la figura 9.8

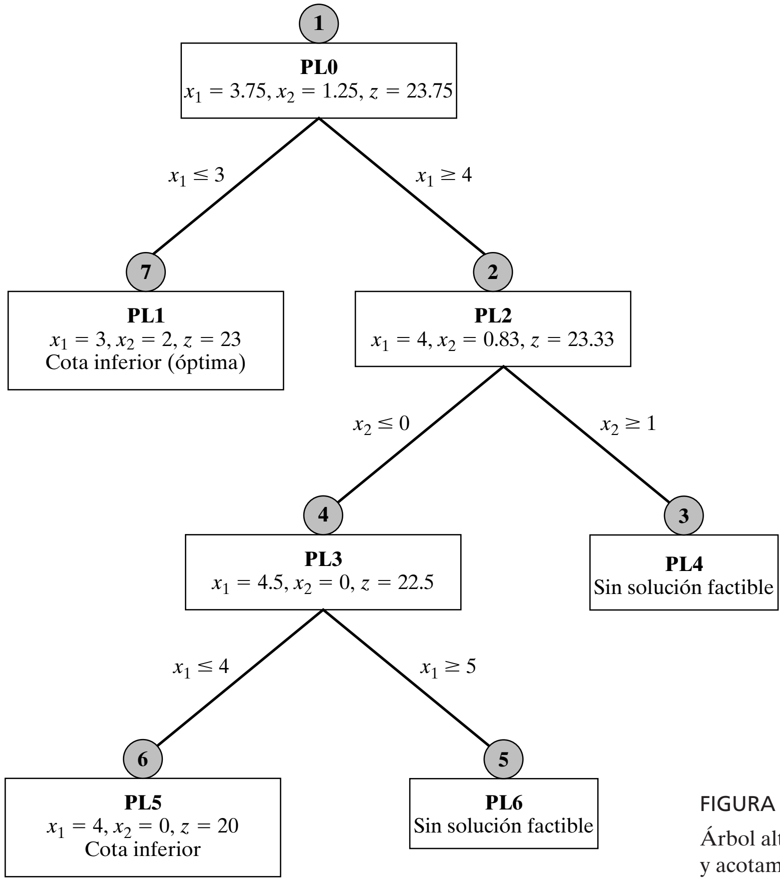


FIGURA 9.8
Árbol alternativo de ramificación y acotamiento para el ejemplo 9.2-1

tuvimos que examinar siete subproblemas para poder terminar el algoritmo de ramificación y acotamiento. Aunque hay técnicas heurísticas para aumentar la capacidad de "adivinar" de B&B cuál rama puede conducir a una mejor solución de programa lineal entero (véase Taha, 1975, págs. 154-171), no hay una teoría firme que siempre produzca resultados consistentes, y aquí reside la dificultad que aqueja los cálculos en programación lineal entera. En realidad, en la sección 9.2.2, problema 1, conjunto de problemas 9.2b, se demuestra, con ayuda de TORA, el extraño comportamiento del algoritmo de ramificación y acotamiento, hasta para un problema pequeño de 16 variables y con 1 restricción, donde se llega al óptimo en 9 iteraciones (subproblemas) pero se requieren más de 25,000 iteraciones para comprobar la optimalidad. No es de extrañar que en la actualidad, y después de cuatro décadas de investigación, los programas de cómputo disponibles (comerciales, igual que académicos) carezcan de consistencia (como el método símplex) para resolver problemas lineales enteros.

Resumiremos ahora el algoritmo de ramificación y acotamiento. Suponiendo un problema de maximización, se establece una cota inferior inicial $z = -\infty$ del valor objetivo óptimo del programa lineal entero. Se iguala $i = 0$.

Paso 1. (Agotamiento/acotamiento). Se selecciona PLi, el siguiente subproblema a examinar. Se resuelve PLi y se trata de agotarlo, usando una de las tres siguientes condiciones.

a) El valor de z óptimo del PLi no puede producir un valor objetivo mejor que la cota inferior actual.

b) PLi produce una solución entera factible mejor, que la cota inferior actual.

c) PLi no tiene solución factible.

Se presentarán dos casos:

a) Si PLi está agotado y se encuentra una solución mejor, actualizar la cota inferior. Si *todos* los subproblemas se han agotado, detenerse; el programa lineal entero óptimo corresponde a la cota inferior actual, si la hay. En caso contrario, igualar $= i + 1$ y repetir el paso 1.

b) Si PLi no está agotado, seguir en el paso 2, para ramificar.

Paso 2. (Ramificación.) Seleccionar uno de los valores enteros, x_j, cuyo valor óptimo x_j^* en la solución del PLi no sea entero. Eliminar la región

$$[x_j^*] < x_j < [x_j^*] + 1$$

(en la que $[v]$ define el mayor entero $\leq v$) creando dos subproblemas lineales que corresponden a

$$x_j \leq [x_j^*] \text{ y } x_j \geq [x_j^*] + 1$$

Igualar $i = i + 1$ e ir al paso 1.

Estos pasos se aplican a problemas de maximización. Para minimización se sustituye la cota inferior con una cota superior (cuyo valor inicial es $z = +\infty$).

El algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B) se puede ampliar en forma directa a problemas mixtos (en los que sólo algunas de las variables son enteras). Si una variable es continua nunca se selecciona como variable de ramificación. Un subproblema factible proporciona una nueva cota al valor objetivo si los valores de las variables discretas son enteros, y el valor objetivo mejora con relación a la cota actual.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.2A

1. Resuelva el programa lineal entero del ejemplo 9.2-1 con el algoritmo B&B, comenzando con x_2 como variable de ramificación. Resuelva los subproblemas con TORA usando la opción MODIFY (modificar) para las cotas superiores e inferiores. Inicie el procedimiento resolviendo el subproblema asociado con $x_2 \leq [x_2^*]$.

2. Forme el árbol de ramificación y acotamiento para cada uno de los problemas siguientes. Por comodidad seleccione siempre a x_1 como la variable de ramificación en el nodo 0.

a) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$

sujeta a

$$2x_1 + 5x_2 \leq 9$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

b) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeta a

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35$$
$$4x_1 + 9x_2 \leq 36$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

c) Maximizar $z = x_1 + x_2$
sujeta a

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16$$
$$6x_1 + 5x_2 \leq 27$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

d) Minimizar $z = 5x_1 + 4x_2$
sujeta a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

e) Maximizar $z = 5x_1 + 7x_2$
sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 13$$
$$5x_1 + 9x_2 \leq 41$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

3. Repita el problema 2, suponiendo que x_1 es continua.

4. Demuestre gráficamente que el siguiente programa lineal entero no tiene solución factible, y a continuación compruebe el resultado usando ramificación y acotamiento.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$10x_1 + 10x_2 \leq 9$$
$$10x_1 + 5x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

5. Resuelva el siguiente problema con el algoritmo de ramificación y acotamiento.

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

sujeta a

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

9.2.2 Árbol de ramificación y acotamiento generado con TORA

El módulo de programación entera de TORA contiene una función para generar el algoritmo de ramificación y acotamiento en forma interactiva. Para usarla, seleccione `User-guided B&B`

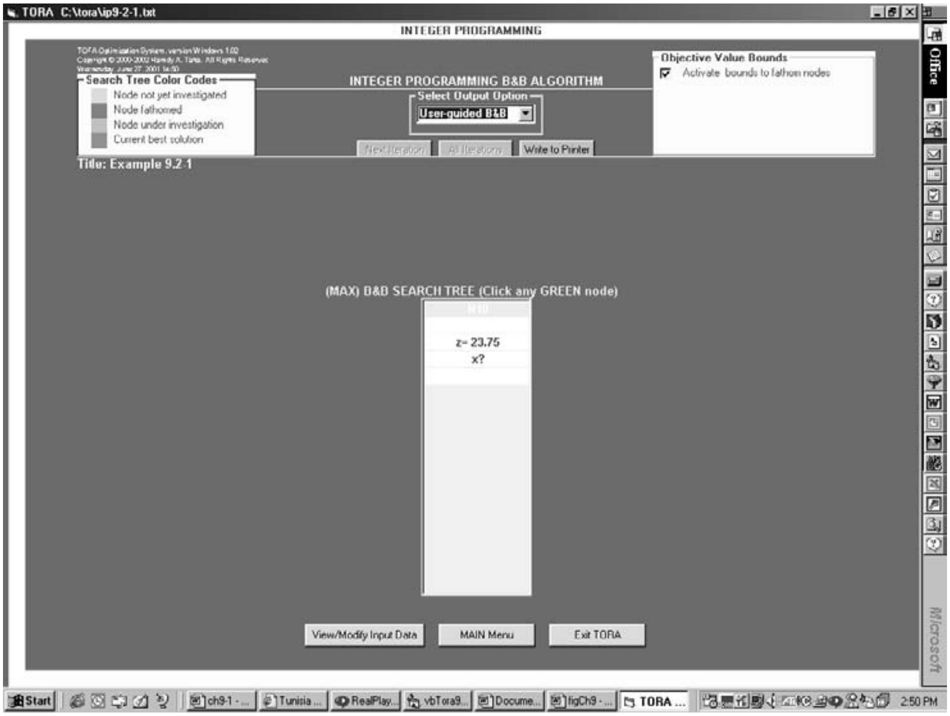


FIGURA 9.9
Solución de arranque para el árbol de ramificación y acotamiento del ejemplo 9.2-1

(ramificación y acotamiento guiada por el usuario) en la pantalla de resultados del módulo de programación entera. La pantalla que resulta contiene toda la información necesaria para crear el árbol de ramificación y acotamiento. La figura 9.9 muestra la distribución de la pantalla, que representa la raíz N10 del árbol de búsqueda, que corresponde al PL0 de la figura 9.6 (archivo ch9ToraB&BEx9-2-1.txt). Cada nodo se identifica con dos dígitos y la letra N de prefijo. El dígito de la izquierda identifica el renglón de la red donde está el nodo, y el dígito de la derecha es un valor numérico único dentro del mismo renglón. Así, N10 de la figura 9.9 muestra que el nodo 0 está situado en el renglón 1 (que es el único nodo en este renglón). TORA limita a 10 la cantidad de subproblemas por renglón. La lógica es que una vez alcanzado este límite, la naturaleza tutorial del procedimiento interactivo se vuelve difícil de manejar. Se emite un mensaje que indica que el algoritmo regresa al modo automático siempre que la cantidad de subprogramas por renglón es mayor que 10. Tenga en mente que en el modo automático no se establece límite alguno a la cantidad de subproblemas generados.

La pantalla se ajusta ahora para seleccionar la variable de ramificación, haciendo clic en cualquier nodo marcado con “x?”. Esos nodos se resaltan en verde. Si el lector hace clic en cualquier lugar de los elementos del nodo, aparece la solución correspondiente en la zona superior del árbol B&B, como se ve en la figura 9.10, donde la solución de N10 indica que $x_1 = 3.75$ y $x_2 = 1.25$. También indica cuáles variables se restringen a valores enteros. Al hacer clic en alguna de las variables se crean en forma automática dos subproblemas que corresponden

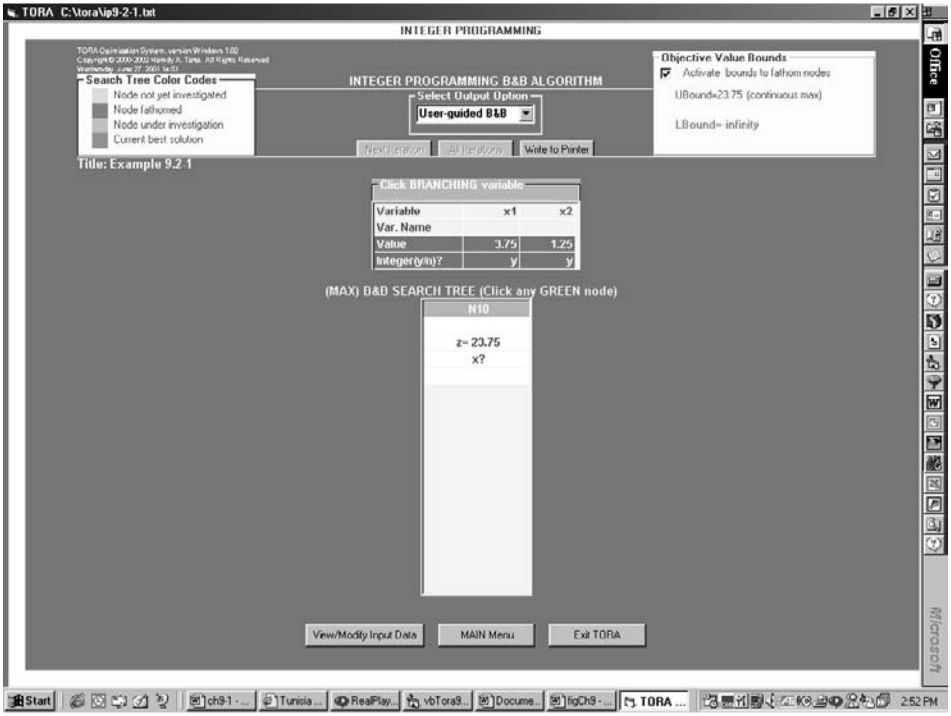


FIGURA 9.10
Selección de la variable de ramificación a partir de la solución de arranque del ejemplo 9.2-1

a la variable de ramificación seleccionada. La figura 9.11 muestra el resultado de seleccionar a x_1 como variable de ramificación en N10. Se agregan al árbol el nodo N20 (que corresponde a $x_1 \leq 3$) y N21 (que corresponde a $x_1 \geq 4$). El nodo N20 produce una solución entera, por lo que queda agotado. Un nodo agotado se marca en rojo o magenta. El color magenta se usa si el nodo agotado proporciona la mejor cota inferior actual, como en el caso del nodo N20. El nodo N21 todavía no se agota, y al hacer clic creará más nodos en el renglón 3 del árbol. El proceso continúa hasta que se hayan agotado todos los nodos (que estén marcados en rojo o en magenta).

El cuadro superior de la derecha, en la pantalla de resultados, rastrea en forma automática las cotas superiores e inferiores para el problema. La opción predeterminada activa las cotas para agotar los nodos. TORA descarta en forma automática los subproblemas cuyo valor objetivo viola las cotas actuales. Sin embargo, usted puede desactivar las cotas (es decir, desactivar la casilla de verificación) para crear todo el árbol de búsqueda. En este caso sólo se agota un nodo si produce una solución entera, o si es no factible.

Es importante observar que en la búsqueda, el programa automatizado de ramificación y acotamiento (B&B) de TORA genera y explora subproblemas en una base LIFO (último en entrar, primero en salir, *last-in, first-out*). Por esta razón, es muy probable que la búsqueda guiada por el usuario produzca un árbol de búsqueda más eficiente, principalmente porque el usuario invoca el buen criterio para seleccionar el siguiente nodo por investigar.

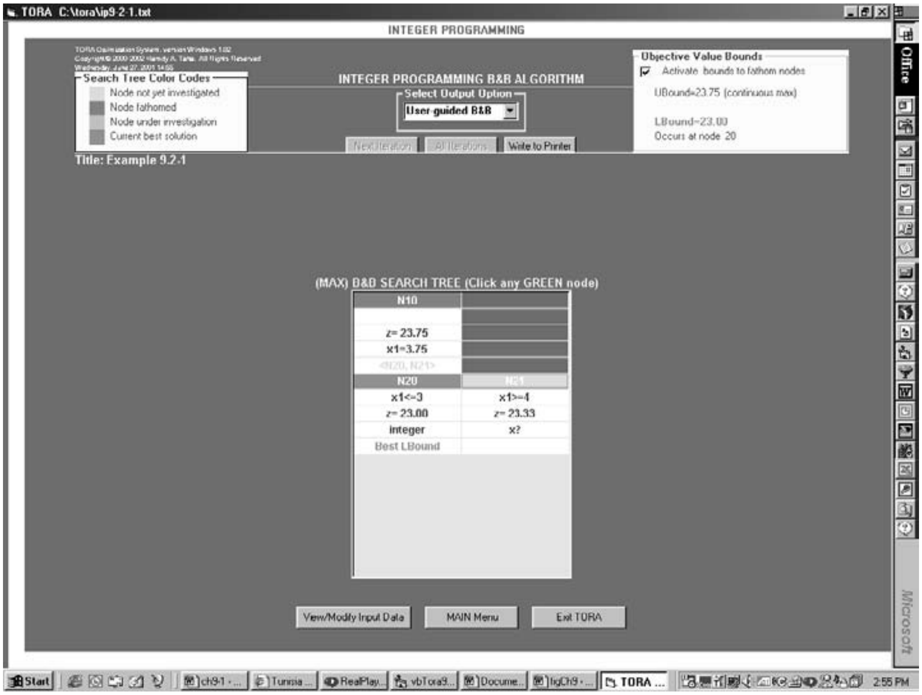


FIGURA 9.11

Creación de los dos primeros subproblemas en el árbol de ramificación y acotamiento del ejemplo 9.2-1

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.2B

1. El problema que sigue tiene por objeto mostrar el extraño comportamiento del algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B) hasta en problemas pequeños. En especial, nótese cuántos subproblemas se examinan antes de encontrar el óptimo, y cuántos se necesitan para comprobar la optimalidad.

$$\text{Minimizar } y$$

sujeta a

$$2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{15}) + y = 15$$

$$\text{Todas las variables son } (0, 1)$$

Use la opción automática de TORA para contestar lo siguiente:

a) ¿Cuántos subproblemas se resuelven antes de llegar a la solución óptima?

b) ¿Cuántos subproblemas se resuelven antes de comprobar la optimalidad de la solución encontrada en a)?

2. Se tiene el siguiente programa lineal entero:

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3$$

sujeta a

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 43$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ son enteros no negativos}$$

Use la opción B&B de TORA, guiada por el usuario, para generar el árbol de búsqueda con y sin activar la cota del valor objetivo. ¿Qué impacto tiene activar esa cota sobre la cantidad de subproblemas generados? Para guardar consistencia, seleccione siempre como variable de ramificación la que tenga el índice más bajo, e investigue todos los subproblemas en un renglón actual, de izquierda a derecha, antes de pasar al siguiente renglón.

3. Reconsidere el problema 2 anterior. Conviértalo en un programa lineal entero equivalente 0-1, y a continuación resuélvalo con la opción automática de TORA. Compare el tamaño de los árboles de búsqueda en los dos problemas.

4. En el siguiente programa lineal entero 0-1, use la opción guiada de TORA para generar el árbol correspondiente de búsqueda. En cada caso indique cómo se usa la cota de z para agotar los subproblemas.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 4 \\ 7x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 &\leq 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_4 - 3x_5 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &= (0, 1) \end{aligned}$$

5. Demuestre, usando la opción de TORA guiada por el usuario, que el siguiente problema no tiene solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 10x_1 + 10x_2 &\leq 9 \\ 10x_1 + 5x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &= (0, 1) \end{aligned}$$

6. Use la opción de TORA guiada por el usuario, para generar el árbol B&B asociado al siguiente problema lineal entero mixto y determine la solución óptima.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\text{ son enteros no negativos} \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Use TORA para general el árbol de ramificación y acotamiento del siguiente problema, suponiendo que sólo es válida una de las dos restricciones.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 20x_1 + 15x_2 - x_3 &\leq 10 \\ 12x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 13 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Convierta el siguiente problema en un programa lineal entero mixto y a continuación use TORA para generar su árbol de cota y rama. ¿Cuál es la solución óptima?

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$|-x_1 + 10x_2 - 3x_3| \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9.2.3 Algoritmo del plano cortante

Como en el algoritmo de ramificación y acotamiento, el del plano cortante también se inicia en la solución óptima del programa lineal continuo. Al espacio de soluciones se agregan restricciones especiales, llamadas **cortes**, en una forma que produzca un punto extremo entero. En el ejemplo 9.2-2 primero se demostrará cómo se usan los cortes en forma gráfica para producir una solución entera, para después implementar algebraicamente esta idea.

Ejemplo 9.2-2

Se tiene la siguiente programación lineal entero:

$$\text{Maximizar } z = 7x_1 + 10x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 35$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

El algoritmo del plano de corte modifica el espacio de soluciones agregando *cortes* que producen un punto extremo entero óptimo. La figura 9.12 muestra un ejemplo de dos cortes de esos. Se parte del óptimo del programa lineal continuo, $z = 66\frac{1}{2}$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$. A continuación se agrega el corte I, que produce la solución lineal óptima continua $z = 62$, $x_1 = 4\frac{4}{7}$, $x_2 = 3$. A continuación se agrega el corte II, que junto con el corte I y las restricciones origina-

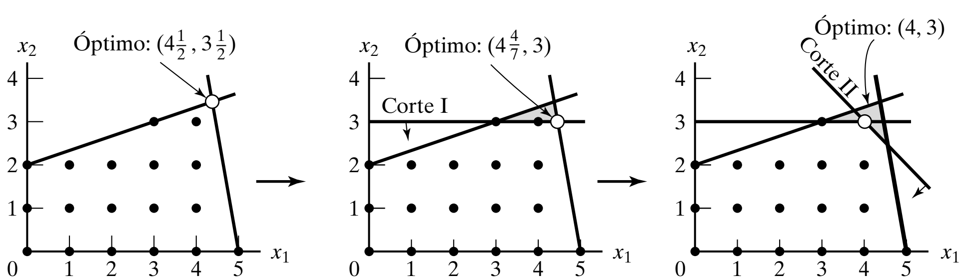


FIGURA 9.12

Ilustración del uso de cortes en programación lineal entera

les, llega al óptimo del programa lineal $z = 58$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. La última solución es entera, que era lo que se buscaba.

Los cortes agregados no eliminan alguno de los puntos enteros factibles originales, pero deben pasar por al menos un punto entero, factible o no factible. Éstos son los requisitos básicos de cualquier corte.

Sólo es por accidente que un problema con 2 variables necesitara de exactamente 2 cortes para llegar a la solución entera óptima. En general, la cantidad de cortes es independiente del tamaño del problema, aunque finita, en el sentido que un problema con una cantidad pequeña de variables y restricciones puede necesitar más cortes que un problema mayor.

Ahora se usará el mismo ejemplo para indicar cómo se determinan los cortes y se implementan algebraicamente.

Dadas las holguras x_3 y x_4 para las restricciones 1 y 2, el cuadro óptimo del problema lineal es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$4\frac{1}{2}$

La solución óptima continua es $z = 66\frac{1}{2}$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. El corte se establece suponiendo que *todas* las variables (incluyendo las holguras x_3 y x_4) son enteras. También observe que como todos los coeficientes objetivo originales son enteros en este ejemplo, el valor de z también es entero.

La información del cuadro óptimo se puede presentar en forma explícita como sigue:

$$z + \tfrac{63}{22}x_3 + \tfrac{31}{22}x_4 = 66\tfrac{1}{2} \quad \text{(Ecuación de } z\text{)}$$
$$x_2 + \tfrac{7}{22}x_3 + \tfrac{1}{22}x_4 = 3\tfrac{1}{2} \quad \text{(Ecuación de } x_2\text{)}$$
$$x_1 - \tfrac{1}{22}x_3 + \tfrac{3}{22}x_4 = 4\tfrac{1}{2} \quad \text{(Ecuación de } x_1\text{)}$$

Una ecuación de restricción se puede usar como **renglón de fuente** para generar un corte, siempre que su lado derecho sea fraccionario. También se ve que se puede usar la ecuación de z como renglón de fuente, porque en este ejemplo sucede que z es entera. Demostraremos cómo se genera un corte a partir de estos renglones de fuente, comenzando con la ecuación de z.

Primero se sacan todos los coeficientes de la ecuación como factor común, con un valor entero y un componente fraccionario, *siempre y cuando el componente fraccionario que resulte sea estrictamente positivo*. Por ejemplo,

$$\tfrac{5}{2} = (2 + \tfrac{1}{2})$$
$$-\tfrac{7}{3} = (-3 + \tfrac{2}{3})$$

La factorización de la ecuación de z da como resultado

$$z + (2 + \tfrac{19}{22})x_3 + (1 + \tfrac{9}{22})x_4 = (66 + \tfrac{1}{2})$$

Al pasar los componentes enteros al lado izquierdo, y todos los componentes fraccionarios al lado derecho, se llega a

$$z + 2x_3 + 1x_4 - 66 = -\tfrac{19}{22}x_3 - \tfrac{9}{22}x_4 + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

Como x_3 y x_4 son no negativas, y todas las fracciones originalmente son estrictamente positivas, el lado derecho debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$-\tfrac{19}{22}x_3 - \tfrac{9}{22}x_4 + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Ahora, como $z + 2x_3 + 1x_4 - 66$, el lado izquierdo de la ecuación (1), por construcción tiene valor entero, el lado derecho $-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2}$, también debe ser entero. Por consiguiente, se puede reemplazar la ecuación (2) por la desigualdad

$$-\tfrac{19}{22}x_3 - \tfrac{9}{22}x_4 + \tfrac{1}{2} \leq 0$$

Es el corte que se desea, y representa una condición necesaria para obtener una solución entera. También se le llama **corte fraccionario**, porque todos sus coeficientes son fracciones.

Como $x_3 = x_4 = 0$ en la tabla óptima del programa lineal anterior, el óptimo continuo actual viola el corte (porque da como resultado $\frac{1}{2} \leq 0$). Así, si se suma este corte al cuadro óptimo, el punto extremo óptimo resultante mueve la solución hacia la satisfacción de los requisitos enteros.

Antes de indicar cómo se implementa un corte en el cuadro óptimo, demostraremos cómo se pueden obtener los cortes también de las ecuaciones de restricción. Consideraremos el renglón de x_1:

$$x_1 - \tfrac{1}{22}x_3 + \tfrac{3}{22}x_4 = 4\tfrac{1}{2}$$

Al factorizar la ecuación se obtiene

$$x_1 + (-1 + \tfrac{21}{22})x_3 + (0 + \tfrac{3}{22})x_4 = (4 + \tfrac{1}{2})$$

El corte asociado es

$$-\tfrac{21}{22}x_2 - \tfrac{3}{22}x_4 + \tfrac{1}{2} \leq 0$$

De igual modo, la ecuación de x_2

$$x_2 + \tfrac{7}{22}x_3 + \tfrac{1}{22}x_4 = 3\tfrac{1}{2}$$

se factoriza como sigue:

$$x_2 + (0 + \tfrac{7}{22})x_3 + (0 + \tfrac{1}{22})x_4 = 3 + \tfrac{1}{2}$$

Por consiguiente, el corte asociado es

$$-\tfrac{7}{22}x_3 - \tfrac{1}{22}x_4 + \tfrac{1}{2} \leq 0$$

En la primera iteración del algoritmo del plano de corte se puede usar cualquiera de los tres cortes anteriores. En consecuencia, no es necesario generar todos antes de seleccionar uno.

Si en forma arbitraria se selecciona el corte generado a partir del renglón x_2, se puede escribir como sigue, en forma de ecuación:

$$-\tfrac{7}{22}x_3 - \tfrac{1}{22}x_4 + s_1 = -\tfrac{1}{2},\ s_1 \geq 0 \qquad \text{(Corte I)}$$

Esta restricción se agrega como restricción secundaria al cuadro óptimo del programa lineal, como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Solución
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	0	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$4\frac{1}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$-\frac{1}{2}$

La tabla es óptima, pero no factible. Se aplicará el método símplex dual (Sección 4.4) para recuperar la factibilidad, y así se obtiene

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Solución
z	0	0	0	1	9	62
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

La última solución todavía no es entera en x_1 y x_2. Se selecciona a x_1, en forma arbitraria, como el siguiente renglón de fuente; esto es

$$x_1 + (0 + \tfrac{1}{7})x_4 + (-1 + \tfrac{6}{7})s_1 = 4 + \tfrac{4}{7}$$

El corte asociado es

$$-\tfrac{1}{7}x_4 - \tfrac{6}{7}s_1 + s_2 = -\tfrac{4}{7},\ s_2 \geq 0 \qquad \text{(Corte II)}$$

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solución
z	0	0	0	1	9	0	62
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
s_2	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

Con el método símplex dual se obtiene el siguiente cuadro:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solución
z	0	0	0	0	3	7	58
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	−1	1	4
x_3	0	0	1	0	−4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	−7	4

La solución óptima es $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $z = 58$, y es totalmente entera. No es por accidente que todos los coeficientes de la última tabla sean enteros. Ésta es una propiedad característica de la implementación del corte fraccionario.

Es importante hacer notar que en el corte fraccionario se supone que *todas* las variables, *incluyendo las de holgura y las de exceso,* son enteras. Eso quiere decir que el corte maneja sólo problemas enteros puros. Ilustraremos la importancia de esta hipótesis con un ejemplo.

Se tiene la restricción

$$x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \leq \tfrac{13}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

Desde el punto de vista de la solución del programa lineal entero correspondiente, la restricción se maneja como ecuación, usando la holgura no negativa s_1, esto es

$$x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + s_1 = \tfrac{13}{2}$$

En la aplicación del corte fraccionario se supone que la restricción tiene una solución entera factible para toda x_1, x_2 y s_1. Sin embargo, la ecuación anterior tendrá una solución entera factible en x_1 y x_2 *sólo si* s_1 *no es entera*. Eso quiere decir que el algoritmo del plano de corte indicará que el problema no tiene solución entera factible, aunque las variables de interés, x_1 y x_2, puedan asumir valores enteros factibles.

Hay dos formas de remediar esta situación.

1. Multiplicar toda la restricción por una constante adecuada para eliminar todas las fracciones. Por ejemplo, si se multiplica por 6 la restricción anterior se obtiene

$$6x_1 + 2x_2 \leq 39$$

Toda solución entera de x_1 y x_2 produce una holgura entera, en forma automática. Sin embargo, esta clase de conversión sólo es adecuada para restricciones sencillas, porque las magnitudes de los coeficientes enteros pueden volverse demasiado grandes, en algunos casos.

2. Usar un corte especial, llamado **corte mixto**, que sólo permita que un subconjunto de las variables asuma valores enteros, permaneciendo todas las demás variables (incluyendo de holgura y de exceso) continuas. En este capítulo no se presentarán los detalles de este corte (véase Taha, 1975, págs. 198-202).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.2C

1. Indique gráficamente, en el ejemplo 9.2-2, si cada una de las siguientes restricciones puede formar un corte legítimo:
   a) $x_1 + 2x_2 \leq 10$
   b) $2x_1 + x_2 \leq 10$
   c) $3x_2 \leq 10$
   d) $3x_1 + x_2 \leq 15$

2. En el ejemplo 9.2-2, indique en forma gráfica cómo los siguientes dos cortes (legítimos) pueden llevar a una solución entera:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \text{(Corte I)}$$
$$3x_1 + x_2 \leq 15 \quad \text{(Corte II)}$$

3. Exprese los cortes I y II, del ejemplo 9.2-2, en función de x_1 y x_2, y demuestre que son los mismos que se usaron gráficamente en la figura 9.12.

4. En el ejemplo 9.2-2, deduzca el corte II a partir del renglón x_3 del cuadro obtenido con la aplicación del corte I. Use el nuevo corte para completar la solución del ejemplo.

5. Demuestre que, aun cuando el siguiente problema tiene una solución entera factible en x_1 y x_2, el corte fraccionario podría no producir una solución factible, a menos que se hayan eliminado todas las fracciones de la restricción.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \leq \tfrac{13}{4}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

6. Resuelva los problemas siguientes con el corte fraccionario, y compare la solución entera óptima verdadera con la que se obtiene redondeando el óptimo continuo.

a) Maximizar $z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 \quad\quad &\leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \quad\quad &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

b) Maximizar $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 4x_2 - 3x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

9.2.4 Consideraciones computacionales en programación lineal entera

Hasta la fecha y a pesar de más de 40 años de investigaciones, no existe un programa de cómputo que pueda resolver en forma consistente los problemas lineales enteros. Sin embargo, de los dos algoritmos de solución que se presentaron en este capítulo, el de ramificación y acotamiento es el más confiable. En realidad, casi todos los programas comerciales de programación lineal entera se basan en la ramificación y acotamiento. Los métodos de plano de corte son difíciles e inciertos, en general, y el error de redondeo es un problema serio. Aunque se ha intentado mejorar la eficacia computacional del plano de corte, los resultados finales no son alentadores. En la mayor parte de los casos se usa el método del plano de corte en segundo lugar, para mejorar la eficiencia de la ramificación y acotamiento en cada subproblema.

El factor más importante que afecta los cálculos en la programación entera es la cantidad de variables enteras y el intervalo factible dentro del que se aplican. Como los algoritmos disponibles no producen una solución numérica consistente de programa lineal entero, podría ser adecuado, desde el punto de vista de cómputo, reducir la cantidad de variables enteras en el modelo lineal entero tanto como sea posible. Las siguientes sugerencias pueden ser de utilidad:

1. Aproximar las variables enteras con las continuas, siempre que sea posible.
2. Para las variables enteras, restringir todo lo posible sus intervalos factibles.
3. Evitar el uso de no linealidades en el modelo.

Todavía no hay algoritmos fiables de solución que igualen la importancia práctica del problema entero. No es probable que se presente un gran avance teórico en el área de la programación entera. En su lugar, los avances tecnológicos en las computadoras (por ejemplo el procesamiento en paralelo) pueden ofrecer la mejor esperanza de mejora de eficiencia en los programas lineales enteros.

9.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL AGENTE VIAJERO

Es obvio que el problema del agente viajero tenga que ver con la determinación del viaje (cerrado) más corto en un caso con n ciudades, en el que cada ciudad se visita exactamente una vez. En esencia, el problema es un modelo de asignación con restricciones adicionales que garantizan la exclusión de subviajes en la solución óptima. En forma específica, en el caso con n ciudades, se define

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se llega de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si d_{ij} es la distancia de la ciudad i a la ciudad j, el modelo del agente viajero es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij},\ d_{ij} = \infty \ \text{ para } i = j$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

$$x_{ij} = (0, 1) \qquad (3)$$

$$\text{La solución forma un circuito} \qquad (4)$$

Las restricciones (1), (2) y (3) definen un modelo regular de asignación (Sección 5.4). En general, el problema de asignación producirá soluciones de subcircuito, más que un circuito completo que abarque todas las n ciudades. En la figura 9.13 se demuestra un problema con 5 ciudades. Los arcos representan rutas en dos sentidos. También se ve en la figura una solución de circuito y subcircuito del modelo de asignación asociado. Si las asignaciones forman una solución de circuito, el circuito es óptimo. En caso contrario se agregan más restricciones al modelo de asignación para eliminar los subcircuitos. Más adelante en esta sección se describirá el uso de esas restricciones.

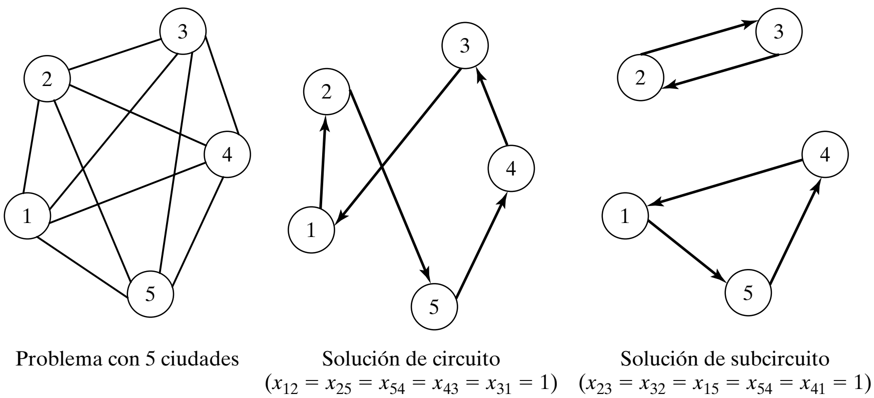


FIGURA 9.13

Ejemplo del agente viajero con 5 ciudades, con soluciones de circuito y subcircuito para el modelo de asignación correspondiente

Los métodos disponibles para resolver el problema del agente viajero tienen su base en las ideas de los algoritmos generales de ramificación y acotamiento o del plano de corte, presentados en la sección 9.2. Antes de presentar esos algoritmos, describiremos un ejemplo que demuestra la versatilidad del modelo del agente viajero, para representar otros casos prácticos (véase también el conjunto de problemas 9.3a).

Ejemplo 9.3-1

El programa de producción diaria de Rainbow Company incluye lotes de pinturas blanca (W), amarilla (Y), roja (R) y negra (B). Como Rainbow usa las mismas instalaciones en las cuatro clases de pintura, es necesario hacer una buena limpieza entre los lotes. La siguiente tabla resume el tiempo de limpieza, en minutos, donde al color del renglón sigue el color de la columna. Por ejemplo, cuando después de la pintura blanca sigue la amarilla, el tiempo de limpieza es 10 minutos. Como un color no puede seguir a sí mismo, a los elementos correspondientes se les asigna un tiempo de preparación infinito. Determinar la secuencia óptima para la producción diaria de los cuatro colores, que minimice el tiempo total de limpieza necesario.

	Minutos de limpieza si la siguiente pintura es			
Pintura actual	*Blanca*	*Amarilla*	*Negra*	*Roja*
Blanca	∞	10	17	15
Amarilla	20	∞	19	18
Negra	50	44	∞	25
Roja	45	40	20	∞

Se puede concebir que cada pintura es una “ciudad”, y que las “distancias” representan el tiempo de limpieza necesario para cambiar de un lote de pintura al siguiente. El caso se reduce así a determinar el *circuito más corto* que se inicie en un lote de pintura y pase exactamente una vez por cada uno de los tres lotes restantes, para regresar al punto de partida.

Este problema se puede resolver enumerando exhaustiva de los seis $[(4 - 1)! = 3! = 6]$ bucles posibles de la red. La siguiente tabla indica que $W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow W$ es el ciclo óptimo.

Ciclo de producción	Tiempo total de limpieza
$W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$	$10 + 19 + 25 + 45 = 99$
$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow W$	$10 + 18 + 20 + 50 = 98$
$W \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow W$	$17 + 44 + 18 + 45 = 124$
$W \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow Y \rightarrow W$	$17 + 25 + 40 + 20 = 102$
$W \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow W$	$15 + 20 + 44 + 20 = 99$
$W \rightarrow R \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow W$	$15 + 40 + 19 + 50 = 124$

En general, no es práctica la enumeración exhaustiva de los ciclos. Aun un problema de tamaño modesto, con 11 ciudades, requiere enumerar $10! = 3{,}628{,}800$ circuitos, una tarea verdaderamente imponente. Por esta razón se debe formular y resolver el problema en forma distinta, como indicaremos más adelante en esta sección.

Para desarrollar la formulación del problema de pinturas basada en asignación, se define a

$$x_{ij} = 1 \text{ si la pintura } j \text{ sigue a la pintura } i, \text{ y cero en caso contrario}$$

Sea M con un valor positivo suficientemente grande; se puede formular entonces el problema de Rainbow como sigue:

$$\text{Minimizar } z = Mx_{WW} + 10x_{WY} + 17x_{WB} + 15x_{WR} + 20x_{YW} + Mx_{YY} + 19x_{YB}$$

$$+ 18x_{YR} + 50x_{BW} + 44x_{BY} + Mx_{BB} + 25x_{BR} + 45x_{RW} + 40x_{RY} + 20x_{RB} + Mx_{RR}$$

sujeta a

$$x_{WW} + x_{WY} + x_{WB} + x_{WR} = 1$$

$$x_{YW} + x_{YY} + x_{YB} + x_{YR} = 1$$

$$x_{BW} + x_{BY} + x_{BB} + x_{BR} = 1$$

$$x_{RW} + x_{RY} + x_{RB} + x_{RR} = 1$$

$$x_{WW} + x_{YW} + x_{BW} + x_{RW} = 1$$

$$x_{WY} + x_{YY} + x_{BY} + x_{RY} = 1$$

$$x_{WB} + x_{YB} + x_{BB} + x_{RB} = 1$$

$$x_{WR} + x_{YR} + x_{BR} + x_{RR} = 1$$

$$x_{ij} = (0, 1) \qquad \text{para toda } i \text{ y } j$$

La solución es un ciclo

El uso de M en la función objetivo garantiza que un lote de cierta pintura no siga de otro de la misma pintura.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.3A

1. Un gerente tiene 10 empleados en total, que trabajan en seis proyectos. Hay traslapes entre las asignaciones, como se ve en la siguiente tabla:

		Proyecto					
		1	2	3	4	5	6
Empleado	1		x		x	x	
	2	x		x		x	
	3		x	x	x		x
	4			x	x	x	
	5	x	x	x			
	6	x	x	x	x		x
	7	x	x			x	x
	8	x		x	x		
	9					x	x
	10	x	x		x	x	x

El gerente debe reunirse con los 10 empleados una vez por semana, para conocer sus avances. En la actualidad, la reunión con cada empleado dura unos 20 minutos, esto es, un total de 3 horas y 20 minutos con los 10 empleados. Se sugiere reducir el tiempo efectuando reuniones de grupo, que dependan de los proyectos compartidos por los empleados. El gerente quiere programar

los proyectos de tal modo que se reduzca el tráfico (cantidad de empleados) que entran y salen de la sala de juntas. ¿Cómo se deben programar los proyectos?

2. Un vendedor de libros que vive en Basin debe visitar una vez cada mes a cuatro clientes que están en Wald, Bon, Mena y Kiln. La siguiente tabla muestra las distancias, en millas, entre las distintas ciudades.

	Basin	Wald	Bon	Mena	Kiln
Basin	0	120	220	150	210
Wald	120	0	80	110	130
Bon	220	110	0	160	185
Mena	150	110	160	0	190
Kiln	210	130	185	190	0

El objetivo es minimizar la distancia total que viaja el vendedor.
Formule el problema como programa lineal integral de asignación.

3. Las tarjetas de circuitos (como las que se usan en las computadoras personales) tienen agujeros para montar distintos componentes electrónicos. Estos agujeros se perforan con un taladro móvil. La siguiente tabla muestra las distancias, en centímetros, entre pares de 10 agujeros para una tarjeta de circuitos. El objetivo es determinar la secuencia óptima para perforar todos los agujeros.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} — & 1.2 & 0.5 & 2.6 & 4.1 & 3.2 \\ 1.2 & — & 3.4 & 4.6 & 2.9 & 5.2 \\ 0.5 & 3.4 & — & 3.5 & 4.6 & 6.2 \\ 2.6 & 4.6 & 3.5 & — & 3.8 & 0.9 \\ 4.1 & 2.9 & 4.6 & 3.8 & — & 1.9 \\ 3.2 & 5.2 & 6.2 & 0.9 & 1.9 & — \end{pmatrix}$$

Formule el problema como programación lineal integral de asignación.

9.3.1 Algoritmo de solución con ramificación y acotamiento

El concepto del algoritmo de ramificación y acotamiento es iniciar con la solución del problema de asignación correspondiente. Si la solución es un circuito, no hay más que hacer, y el problema termina. En caso contrario se deben introducir restricciones que eliminen los subcircuitos. Esto se puede lograr creando tantas ramas como cantidad de variables x_{ij} hay asociadas con uno de los subcircuitos. Cada una de las ramas corresponderá entonces a igualar a cero una de las variables del subcircuito (recuérdese que todas las variables asociadas con un subcircuito son iguales a 1). La solución del problema de asignación que resulta podrá producir o no un circuito. Si lo hace, se usa su valor objetivo como una cota superior de la longitud verdadera mínima del circuito. Si no lo hace, será necesario más ramificación, creando de nuevo tantas ramas como cantidad de variables haya en uno de los subcircuitos. El proceso continúa hasta que se hayan agotado todos los subproblemas no explorados, sea produciendo una cota superior mejor (menor) o porque haya evidencias de que el subproblema no puede producir una solución mejor. El circuito óptimo es el asociado con la mejor cota superior.

El ejemplo que sigue muestra los detalles del algoritmo de ramificación y acotamiento para el agente viajero.

Ejemplo 9.3-2

La siguiente matriz muestra las distancias en un problema de agente viajero por 5 ciudades.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & \infty & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

Comenzaremos resolviendo la asignación correspondiente, usando TORA, con lo que se obtiene la siguiente solución:

$$z = 15, (x_{13} = x_{31} = 1), (x_{25} = x_{54} = x_{42} = 1), \text{ todas las demás } = 0$$

Esta solución produce dos subcircuitos: (1-3-1) y (2-5-4-2), que se ven en el nodo 1 de la figura 9.14. La distancia total asociada es $z = 15$, que es una cota inferior de la longitud óptima del circuito por 5 ciudades.

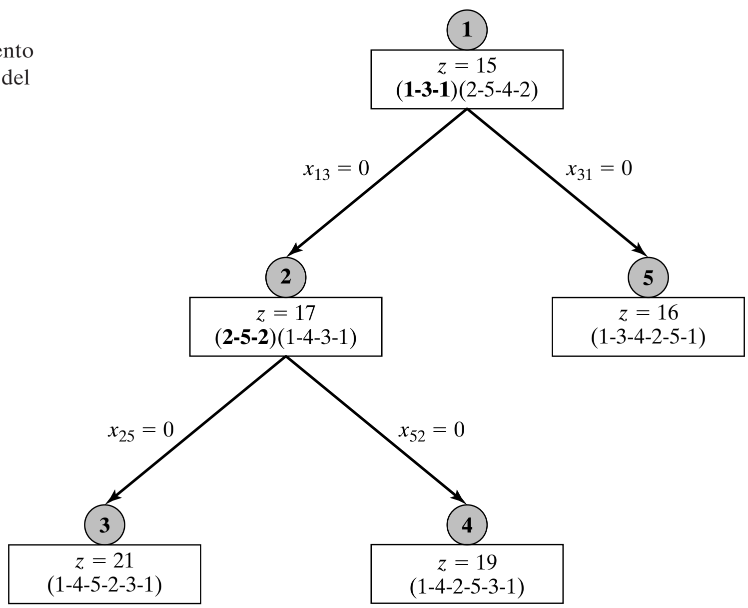
Una forma directa para determinar una cota superior es seleccionar cualquier circuito y sumar sus distancias respectivas, para obtener una estimación de la cota superior. Por ejemplo, el circuito 1-2-3-4-5 (seleccionado en forma totalmente arbitraria) tiene una longitud total de $10 + 5 + 7 + 4 + 3 = 29$. El lector podrá determinar una cota superior mejor por inspección. Recuerde que mientras menor sea la cota superior, la búsqueda de ramificación y acotamiento será más eficiente.

El cálculo de las cotas inferior y superior indica que la longitud óptima del circuito debe quedar en el intervalo (15, 29). Una solución que produzca una longitud de circuito mayor que 29 se descarta como no prometedora.

Para eliminar los subcircuitos en el nodo 1 hay que "romper" su circuito forzando a sus variables miembro x_{ij} al nivel cero. El subcircuito 1-3-1 se rompe si se hace que $x_{13} = 0$, o $x_{31} = 0$ (una por una) en el problema de asignación en el nodo 1. De igual forma, el subcircuito 2-5-4-2

FIGURA 9.14

Solución de ramificación y acotamiento para el problema del agente viajero del ejemplo 9.3-2



se elimina imponiendo una de las restricciones $x_{25} = 0$, $x_{54} = 0$ o $x_{42} = 0$. En términos del árbol de ramificación y acotamiento, cada una de esas restricciones da lugar a una rama y en consecuencia a un nuevo subproblema. Es importante notar que *no* es necesario ramificar *los dos* subcircuitos en el nodo 0. En su lugar sólo se necesita romper *un* subcircuito en cualquiera de los nodos. La idea es que una ruptura de un subcircuito altera en forma automática a las variables miembro del otro subcircuito, y en consecuencia produce condiciones que son favorables para crear un circuito. Con este argumento, desde el punto de vista computacional, se prefiere el subcircuito más corto, porque crea la cantidad mínima de ramas.

Pasando al subcircuito más corto (1-3-1), se crean dos ramas $x_{13} = 0$ y $x_{31} = 0$ en el nodo 1. Los problemas asociados de asignación se plantean eliminando el renglón y la columna correspondientes a la variable cero, con lo que el problema de asignación será menor. Otra forma de llegar al mismo resultado es dejar sin cambio el tamaño del problema de asignación, asignando sólo una distancia infinita a la variable de ramificación. Por ejemplo, el problema de asignación asociado con $x_{13} = 0$ requiere sustituir $d_{13} = \infty$ en el modelo de asignación en el nodo 0. De igual modo, para $x_{31} = 0$, se sustituye $d_{31} = \infty$.

En la figura 9.14 se escoge resolver el subproblema asociado con $x_{31} = 0$ en forma arbitraria. El nodo 2 da la solución $z = 17$ pero continúa produciendo los subcircuitos (2-5-2) y 1-4-3-1). Al repetir el procedimiento que se hizo en el nodo 1 se obtienen dos ramas: $x_{23} = 0$ y $x_{52} = 0$.

Ahora se tienen tres subproblemas inexplorados, uno desde el nodo 1 y dos desde el nodo 2, y llegados a este punto se puede investigar cualquiera de ellos. Al explorar en forma arbitraria el subproblema asociado con $x_{25} = 0$ desde el nodo 2, se iguala $d_{13} = \infty$ y $d_{25} = \infty$ en el problema original de asignación, y se obtiene la solución $z = 21$ y la solución del circuito 1-4-5-2-3-1 en el nodo 3. No se necesita investigar más el nodo 3, por lo que está agotado.

La solución en el nodo 3 proporciona una cota superior mejorada, $z = 21$, en la longitud óptima del circuito. Esto significa que cualquier subproblema inexplorado que puede mostrarse para una longitud de circuito mayor que (o igual a) 21 y debe desecharse como no prometedor.

Ahora se tienen dos subproblemas sin explorar. Al seleccionar el subproblema 4 para explorarlo se igualan $d_{13} = \infty$ y $d_{52} = \infty$ en la asignación original, con lo que se obtiene la solución de circuito 1-4-5-3-1 con $z = 19$. La nueva solución de circuito tiene mejor cota superior $z = 19$.

Sólo queda por explorar el subproblema 5. Si se sustituye $d_{31} = \infty$ en el problema original de asignación en el nodo 1 se obtiene la solución 1-3-4-2-5-1 con $z = 16$, en el nodo 5. De nuevo, es una solución mejor que la asociada con el nodo 3, por lo que requiere actualizar la cota superior a $z = 16$.

No hay más nodos que queden sin agotar, con lo que se completa el árbol de búsqueda. El circuito óptimo es el asociado con la actual cota superior: 1-3-4-2-5-1 con 16 millas de longitud.

Se debe hacer una observación. La secuencia de búsqueda $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ para explorar el nodo demuestra de nuevo una de las dificultades del algoritmo de ramificación y acotamiento. No hay forma de decir por adelantado cuál secuencia se debe seguir para explorar los subproblemas en el árbol de ramificación y acotamiento. Por ejemplo, si hubiéramos comenzado en el nodo 5, hubiéramos obtenido la cota superior $z = 16$, con lo que se agotaría en forma automática el subproblema 2 y en consecuencia se eliminaría la necesidad de crear los subproblemas 4 y 5.

Naturalmente, hay métodos heurísticos que pueden ser útiles para "prever" cuál secuencia podría conducir a un árbol más eficiente. Por ejemplo, después de especificar todas las ramas a partir de determinado nodo, se puede comenzar con la que corresponda a la d_{ij} *mayor* entre todas las que se crearon. Esta heurística indica explorar la rama $x_{31} = 0$. Si hubiéramos hecho eso, en el primer subproblema hubiéramos encontrado la cota superior $z = 16$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.3B

1. Resuelva el ejemplo 9.3-2 usando el subcircuito 2-5-4-2 para iniciar el proceso de ramificación, y las siguientes secuencias para explorar los nodos.
   a) Explore todos los subproblemas horizontalmente de izquierda a derecha en cada “renglón” antes de seguir al siguiente “renglón”.
   b) Siga cada ruta verticalmente, desde el nodo 0 hasta terminar agotando un nodo.
2. Resuelva el problema 1, conjunto 9.3a, con el algoritmo de ramificación y acotamiento.
3. Resuelva el problema 2, conjunto 9.3a, con el algoritmo de ramificación y acotamiento.
4. Resuelva el problema 3, conjunto 9.3a, con el algoritmo de ramificación y acotamiento.

9.3.2 Algoritmo del plano de corte

La idea del algoritmo del plano de corte es agregar un conjunto de restricciones que, cuando se añaden al problema de asignación garanticen evitar la formación de un subcircuito. Las restricciones adicionales se definen como sigue. Con n ciudades, asociar una variable continua $u_j (\geq 0)$ con las ciudades $2, 3, \ldots, n$. A continuación definir el conjunto requerido de restricciones adicionales así:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \; i = 2, 3, \ldots, n; \quad j = 2, 3, \ldots, n; \quad i \neq j$$

Estas restricciones, al añadirse al modelo de asignación, eliminarán todas las soluciones de subcircuito en forma automática, pero no eliminarán alguna solución de circuito.

Ejemplo 9.3-3

Se tiene la siguiente matriz de distancias en un problema de agente viajero con 4 ciudades.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 13 & 21 & 26 \\ 10 & \infty & 29 & 20 \\ 30 & 20 & \infty & 5 \\ 12 & 30 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

El programa lineal correspondiente consiste en las restricciones del modelo de asignación y además las siguientes restricciones adicionales, que evitan la formación de soluciones de subcircuito. Toda $x_{ij} = (0, 1)$ y toda $u_j \geq 0$. El problema se resuelve como programa lineal entero mixto.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	u_2	u_3	u_4	
						4										1	−1		≤3
							4									1		−1	≤3
									4							−1	1		≤3
											4						1	−1	≤3
													4			−1		1	≤3
														4			−1	1	≤3

La solución óptima, obtenida con el módulo ILP de TORA (archivo Ch9ToraTraveling-SalespersonEx9-3-3-txt) es

$$u_2 = 0, \; u_3 = 1, \; u_4 = 2, \; x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1, \; \text{longitud del circuito} = 59$$

Esto corresponde a la solución de circuito 1-2-3-4-1. La solución satisface todas las restricciones adicionales de u_j (¡compruébelo!).

Para demostrar que las soluciones de subcircuitos no satisfacen las restricciones adicionales, veamos la solución de circuito (1-2-1, 3-4-3). Esta solución corresponde a $x_{12} = x_{21} = 1$, $x_{34} = x_{43} = 1$. Ahora, pasemos a las restricciones 4 y 6 del cuadro anterior, que son:

$$4x_{34} + u_3 - u_4 \leq 3$$

$$4x_{43} - u_3 + u_4 \leq 3$$

Al sustituir $x_{34} = x_{43} = 1$, y sumar las dos desigualdades, se obtiene $8 \leq 6$, que es imposible y en consecuencia se impide la formación del subcircuito.

La principal desventaja del modelo del plano de corte es que su tamaño crece en forma exponencial al aumentar la cantidad de ciudades. Por esta razón el algoritmo de ramificación y acotamiento permite contar con método mejor para resolver el problema.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.3C

1. Resuelva el siguiente problema de agente viajero con el algoritmo del plano de corte.

a) $\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 43 & 21 & 20 \\ 10 & \infty & 9 & 22 \\ 20 & 10 & \infty & 5 \\ 42 & 50 & 27 & \infty \end{pmatrix}$

b) Resuelva el problema 2, conjunto de problemas 9.3a, con el algoritmo del plano de corte.

c) Resuelva el problema 3, conjunto de problemas 9.3a, con el algoritmo del plano de corte.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Nemhauser, G. y L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, Nueva York, 1988.

Salkin, H y K. Mathur, *Foundations of Integer Programming*, North Holland, Nueva York, 1989.

Taha, H., *Integer Programming: Theory, Applications and Computations*, Academic Press, Orlando, FL, 1975.

Wolsey, L., *Integer Programming*, Wiley, Nueva York, 1998.

PROBLEMAS INTEGRALES

9.1 Una empresa constructora posee 90 acres de terreno en una zona metropolitana en crecimiento, donde pretende construir edificios de oficinas y un centro comercial. Las propiedades construidas se rentan durante 7 años y después se venden. El precio de venta de cada construcción se estima como 10 veces su ingreso neto de operación en el último año de renta. La empresa estima que en el proyecto habrá un centro comercial de 4.5 millones de pies cuadrados. El plan maestro indica construir tres edificios altos y cuatro edificios de oficinas con jardines.

La empresa se encuentra con un problema de programación. Si una construcción se termina demasiado rápido, puede permanecer vacía; si se termina demasiado lento, los ocupantes potencia-

les pueden irse a otros desarrollos. La demanda de espacio de oficinas durante los 7 años próximos es, con base en los estudios correspondientes de mercado, la siguiente:

	Demanda (miles de pies^2)	
Año	*En edificio alto*	*En edificio con jardines*
1	200	100
2	220	110
3	242	121
4	266	133
5	293	146
6	322	161
7	354	177

La siguiente tabla muestra las capacidades propuestas de las siete construcciones:

Edificio con jardines	Capacidad (pies^2)	Edificio alto	Capacidad (pies^2)
1	60,000	1	350,000
2	60,000	2	450,000
3	75,000	3	350,000
4	75,000	—	—

Se estima que el ingreso bruto por alquiler es \$25 por pie cuadrado. Los costos de operación son \$5.75 y \$9.75 en los edificios con jardín y los edificios altos, respectivamente. Los costos asociados de construcción son \$70 y \$105 por pie cuadrado, respectivamente. Tanto el costo de construcción como los alquileres se estiman crecer más o menos a la tasa inflacionaria de 4 por ciento.

¿Cómo debe programar esa empresa la construcción de los siete edificios?

9.2[5] En un evento de la Asociación nacional atlética colegial, de gimnasia para damas, las competencias comprenden cuatro ramas: salto hípico, barras asimétricas, viga de equilibrio y manos libres. Cada equipo puede entrar a la competencia con seis gimnastas por evento. Una gimnasta es evaluada en una escala de 1 a 10. De acuerdo con las estadísticas del equipo de la U de A, se han obtenido las siguientes calificaciones:

	Calificaciones de las 6 gimnastas de la U de A					
Evento	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Caballo	6	9	8	8	4	10
Barras	7	9	7	8	9	5
Viga	9	8	10	9	9	8
Manos libres	6	6	5	9	10	9

La calificación total de un equipo se calcula sumando las cinco mejores calificaciones en cada evento. Un participante puede estar como especialista en un evento, o como un *all-rounder* en los cuatro eventos, pero no en ambos modos. Se permite que un especialista compita cuando mucho

[5]Basado en P. Ellis y R. Corn, "Using Bivalent Integer Programming to Select Teams of Intercollegiate Women's Gymnastic Competition", *Interfaces*, vol. 14, núm. 3, págs. 41-46, 1984.

en tres eventos, y al menos cuatro de los miembros del equipo deben ser *all-rounder*. Formule un modelo de programa lineal entero que se pueda aplicar en la selección del equipo de competencia, y determine la solución óptima con TORA.

9.3[6] En 1990, en Estados Unidos había unos 180,000 centros de telemercadeo que empleaban a 2 millones de personas. En el año 2000, más de 700,000 empresas empleaban unos 8 millones de personas para el telemercadeo de sus productos. La decisión de cuántos centros de telemercadeo se deben operar y dónde ubicarlos es de la mayor importancia.

La compañía ABC va a decidir qué cantidad de centros de telemercadeo tendrá, y sus ubicaciones. Un centro puede estar localizado en una de varias zonas candidato, seleccionadas por la empresa, y puede dar servicio (parcial o completo) a una o más áreas geográficas. Un área geográfica se suele definir con uno o más códigos (telefónicos) de área. El telemercadeo de ABC se concentra en ocho códigos de área: 501, 918, 316, 417, 314, 816, 502 y 606. La siguiente tabla muestra las ubicaciones candidato, las áreas a las que dan servicio y el costo de establecer el centro.

Ubicación del centro	Códigos de área atendidos	Costo ($)
Dallas, TX	501, 918, 316, 417	500,000
Atlanta, GA	314, 816, 502, 606	800,000
Louisville, KY	918, 316, 417, 314, 816	400,000
Denver, CO	501, 502, 606	900,000
Little Rock, AR	417, 314, 816, 502	300,000
Memphis, TN	606, 501, 316, 417	450,000
St. Louis, MO	816, 502, 606, 314	550,000

Los clientes en todos los códigos de área pueden entrar a cualesquiera de los centros las 24 horas del día.

Los costos de comunicación, por hora, entre los centros y los códigos de área se ven en la siguiente tabla:

	Desde el código de área							
Hasta	*501*	*918*	*316*	*417*	*314*	*816*	*502*	*606*
Dallas, TX	$14	$35	$29	$32	$25	$13	$14	$20
Atlanta, GA	$18	$18	$22	$18	$26	$23	$12	$15
Louisville, KY	$22	$25	$12	$19	$30	$17	$26	$25
Denver, CO	$24	$30	$19	$14	$12	$16	$18	$30
Little Rock, AR	$19	$20	$23	$16	$23	$11	$28	$12
Memphis, TN	$23	$21	$17	$21	$20	$23	$20	$10
St. Louis, MO	$17	$18	$12	$10	$19	$22	$16	$22

ABC le gustaría tener entre tres y cuatro centros. ¿Dónde deberían localizarse?

[6]Basado en T. Spencer, A. Brigandi, D. Dargon y M. Sheehan, "AT&T's Telemarketing Site Selection System Offers Customer Support", *Interfaces*, vol. 20, núm. 1, págs. 83-96, 1990.

9.4[7] Una empresa eléctrica proporciona servicio a una amplia zona rural y quiere determinar la cantidad y ubicación de los centros de servicio al cliente (CSL) que proporcionen un buen trabajo de reparación y conexión de las líneas eléctricas. La empresa reúne su base de clientes en cinco grupos, de acuerdo con los siguientes datos:

Grupo	1	2	3	4	5
Cantidad de clientes	400	500	300	600	700

La empresa ha seleccionado cinco lugares potenciales para sus centros CSL. La siguiente tabla resume la distancia promedio de viaje, en millas, desde los CSL hasta los diversos grupos. La velocidad promedio del vehículo de servicio es de 45 millas por hora, aproximadamente.

	Centro CSL				
Grupo	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	40	100	20	50	30
2	120	90	80	30	70
3	40	50	90	80	40
4	80	70	110	60	120
5	90	100	40	110	90

A la empresa le gustaría que el tiempo de respuesta a las solicitudes de los clientes fuera de unos 90 minutos. ¿Cuántos centros CSL deben establecerse?

[7]Basado en E. Erkut, T. Myrdon y K. Strangway, "Transatlanta Redesigns Its Service Delivery Network", *Interfaces*, vol. 30, núm. 2, págs. 54-69, 2000.

CAPÍTULO 10

Programación dinámica determinística

La programación dinámica encuentra la solución óptima de un problema con *n* variables descomponiéndolo en *n etapas*, siendo cada etapa un subproblema de una sola variable. Sin embargo, como la naturaleza de la *etapa* difiere de acuerdo con el problema de optimización, la programación dinámica no proporciona los detalles de cómputo para optimizar cada etapa.

10.1 NATURALEZA RECURSIVA DE LOS CÁLCULOS EN PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Los cálculos de programación dinámica se hacen en forma recursiva, ya que la solución óptima de un subproblema se usa como dato para el siguiente subproblema. Para cuando se resuelve el último subproblema queda a la mano la solución óptima de todo el problema. La forma en la que se hacen los cálculos recursivos dependen de cómo se descomponga el problema original. En particular, los subproblemas se vinculan normalmente mediante restricciones comunes. Al pasar de un subproblema al siguiente se debe mantener la factibilidad de esas restricciones comunes.

Ejemplo 10.1-1 (Problema de la ruta más corta)

Supongamos que se trata de seleccionar la ruta más corta entre dos ciudades. La red de la figura 10.1 muestra las rutas posibles entre el inicio en el nodo 1 y el destino en el nodo 7. Las rutas pasan por ciudades intermedias, representadas por los nodos 2 a 6.

Este problema se puede resolver enumerando en forma detallada todas las rutas entre los nodos 1 y 7 (hay cinco). Sin embargo, en una red grande, la enumeración exhaustiva no se puede manejar de manera computacional.

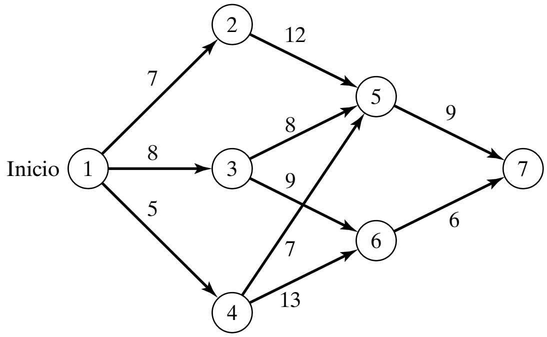


FIGURA 10.1

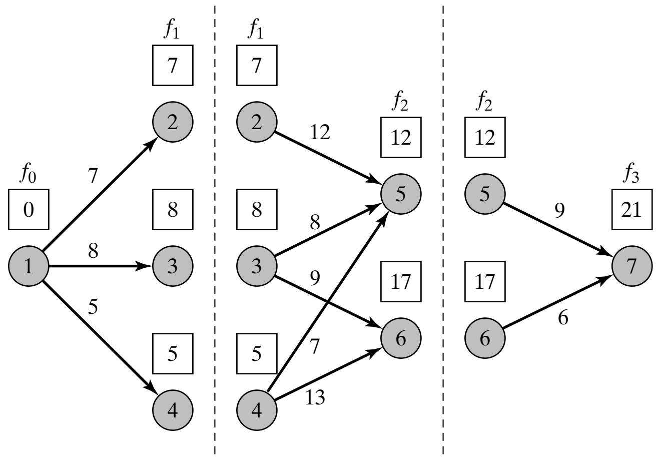
Red de ruta más corta para el ejemplo 10.1-1

Para resolver el problema con programación dinámica primero se descompone en **etapas**, delimitadas por las líneas verticales interrumpidas de la figura 10.2. A continuación se hacen los cálculos para cada etapa por separado.

El concepto general es calcular las distancias (acumuladas) más cortas a todos los nodos terminales de una etapa, para usarlas a continuación como datos de la etapa inmediata posterior. La etapa 1 tiene tres nodos finales, 2, 3 y 4, y sus cálculos son sencillos.

FIGURA 10.2

Descomposición del problema de la ruta más corta en etapas



Resumen de resultados de la etapa 1.

Distancia más corta al nodo 2 = 7 millas (*desde el nodo* 1)

Distancia más corta al nodo 3 = 8 millas (*desde el nodo* 1)

Distancia más corta al nodo 4 = 5 millas (*desde el nodo* 1)

A continuación, la etapa 2 tiene dos nodos extremos, el 5 y el 6. Si se considera primero el nodo 5, se ve en la figura 10.2 que hay tres rutas posibles para llegar a él, que son (2, 5), (3, 5) y (4, 5). Esta información, junto con las distancias más cortas a los nodos 2, 3 y 4, determina la distancia (acumulada) más corta al nodo 5, como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo 5}\end{pmatrix} = \min_{i=2,\,3,\,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 5}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 7 + 12 = 19 \\ 8 + \ \ 8 = 16 \\ 5 + \ \ 7 = 12 \end{Bmatrix} = 12\,(\textit{del nodo } 4)$$

De igual manera, para el nodo 6 se tiene

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo 6}\end{pmatrix} = \min_{i=3,\,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 6}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 8 + \ \ 9 = 17 \\ 5 + 13 = 18 \end{Bmatrix} = 17\,(\textit{del nodo } 3)$$

Resumen de resultados de la etapa 2.

Distancia más corta al nodo 5 = 12 millas (*desde el nodo* 4)

Distancia más corta al nodo 6 = 17 millas (*desde el nodo* 3)

El último paso es examinar la etapa 3. El nodo de destino 7 se puede alcanzar ya sea desde el nodo 5 o desde el 6. Usando el resumen de los resultados de la etapa 2, y las distancias de los nodos 5 y 6 al nodo 7, se obtiene

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más}\\ \text{corta al nodo 7}\end{pmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23 \end{Bmatrix} = 21\ (\textit{del nodo } 5)$$

Resumen de resultados de la etapa 3.

Distancia más corta al nodo 7 = 21 millas (*desde el nodo* 5)

Estos cálculos indican que la distancia más corta entre los nodos 1 y 7 es 21 millas. Las ciudades que definen la ruta óptima se determinan como sigue. Según el resumen de la etapa 3, el nodo 7 está enlazado con el nodo 5. A continuación, según el resumen de la etapa 2, el nodo 4 está vinculado al nodo 5. Por último, según el resumen de la etapa 1, el nodo 4 está enlazado con el nodo 1. Así, la ruta más corta se define como $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$.

Ahora indicaremos cómo se pueden expresar matemáticamente los cálculos recursivos. Sea $f_i(x_i)$ la distancia más corta hasta el nodo x_i en la etapa i, y defínase $d(x_{i-1}, x_i)$ como la distancia del nodo x_{i-1} hasta el nodo x_i; entonces se calcula, f_i a partir de f_{i-1} con la siguiente ecuación recursiva:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas las rutas}\\ (x_{i-1},\, x_i)\text{ viables}}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\},\ i = 1, 2, 3$$

Al comenzar en $i = 1$, la recursión pone $f_0(x_0) = 0$. La ecuación indica que las distancias más cortas $f_i(x_i)$ en la etapa i se deben expresar en función del siguiente nodo, x_i. En la terminología de la programación dinámica, a x_i se le llama **estado** del sistema en la etapa i. De hecho, se considera que el estado del sistema en la etapa i es la información que enlaza, conecta o vincula las etapas, de tal modo que se puedan tomar las decisiones para las etapas restantes sin volver a examinar cómo se llegó a las decisiones de las etapas anteriores. La

definición correcta de *estado* permite considerar por separado cada estado, y garantiza que la solución sea factible para todos los estados.

La definición de *estado* conduce al siguiente marco unificador de la programación dinámica.

Principio de optimalidad. *Las decisiones futuras para las etapas restantes formarán una política óptima independientemente de las políticas adoptadas en las etapas anteriores*.

La implementación del principio es evidente en los cálculos del ejemplo 10.1-1. Por ejemplo, en la etapa 3 sólo se usan las distancias más cortas a los nodos 5 y 6, y no nos ocupamos de cómo se llegó a esos nodos a partir del nodo 1. Aunque el principio de optimalidad es "vago" acerca de los detalles de cómo se optimiza cada etapa, su aplicación facilita mucho la solución de muchos problemas complejos que de otra manera no se podrían resolver.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.1A

1. Resuelva el ejemplo 10.1-1 suponiendo que se usan las rutas siguientes:

$$d(1, 2) = 5,\ d(1, 3) = 9,\ d(1, 4) = 8$$
$$d(2, 5) = 10,\ d(2, 6) = 17$$
$$d(3, 5) = 4,\ d(3, 6) = 10$$
$$d(4, 5) = 9,\ d(4, 6) = 9$$
$$d(5, 7) = 8$$
$$d(6, 7) = 9$$

2. Soy un excursionista empedernido. El último verano fui con mi amigo G. Don a un viaje de acampar y caminar en las bellas Montañas Blancas de Nueva Hampshire. Decidimos limitar nuestras caminatas a un área formada por tres cumbres bien conocidas: los montes Washington, Jefferson y Adams. El Monte Washington tiene una vereda de 6 millas de la base a la cumbre. Las veredas correspondientes para los montes Jefferson y Adams tienen 4 y 5 millas, respectivamente. Los caminos que unen las bases de las tres montañas tienen 3 millas entre los montes Washington y Jefferson, 2 millas entre los montes Jefferson y Adams, y 5 millas entre los montes Adams y Washington. Iniciamos el primer día en la base del Monte Washington y regresamos al mismo lugar al final de los 5 días. Nuestra meta era caminar todas las millas que pudiéramos. También decidimos subir exactamente a una montaña cada día, y acampar en la base de la que subiríamos al día siguiente. Además, decidimos no visitar la misma montaña dos días consecutivos. ¿Cómo programamos nuestras caminatas?

10.2 RECURSIÓN EN AVANCE Y EN REVERSA

En el ejemplo 10.1-1 se usa la **recursión en avance**, en la que los cálculos se hacen de la etapa 1 a la etapa 3. Ese mismo ejemplo se puede resolver por **recursión en reversa**, comenzando en la etapa 3 y terminando en la etapa 1.

Con las recursiones en avance y en reversa se obtiene la misma solución. Aunque el procedimiento en avance parece más lógico, en las publicaciones sobre programación dinámica se usa la recursión en reversa de modo invariable. La razón de esta preferencia es que, en general, la recursión en reversa es más eficiente, desde el punto de vista computacional. Demostraremos el uso de la recursión en reversa aplicándola al ejemplo 10.1-1. La demostración también

dará la oportunidad de presentar los cálculos de programación dinámica en una forma tabular compacta.

Ejemplo 10.2-1

La ecuación recursiva en reversa para el ejemplo 10.2-1 es

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas las rutas} \\ \text{viables } (x_i,\, x_{i+1})}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i = 1, 2, 3$$

donde $f_4(x_4) = 0$ para $x_4 = 7$. El orden asociado de cálculos es $f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$.

Etapa 3. Como el nodo 7 ($x_4 = 7$) está conectado con los nodos 5 y 6 ($x_3 = 5$ y 6) con exactamente una ruta a cada uno, no hay alternativas para elegir, y los resultados de la etapa 3 se pueden resumir como sigue:

	$d(x_3, x_4)$	Solución óptima	
x_3	$x_4 = 7$	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7
6	6	6	7

Etapa 2. La ruta (2, 6) está bloqueada, porque no existe. Dada $f_3(x_3)$ desde la etapa 3, se pueden comparar las alternativas factibles como se ve en el siguiente cuadro:

	$d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$		Solución óptima	
x_2	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12 + 9 = 21	—	21	5
3	8 + 9 = 17	9 + 6 = 15	15	6
4	7 + 9 = 16	13 + 6 = 19	16	5

La solución óptima de la etapa 2 se lee como sigue: si usted está en las ciudades 2 o 4, la ruta más corta pasa por la ciudad 5, y si está en la ciudad 3, la ruta más corta pasa por la ciudad 6.

Etapa 1. Desde el nodo 1 se tienen tres rutas alternativas: (1, 2), (1, 3) y (1, 4). Se usa $f_2(x_2)$ desde la etapa 2 para calcular el siguiente cuadro.

	$d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$			Solución óptima	
x_1	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2^*
1	7 + 21 = 28	8 + 15 = 23	5 + 16 = 21	21	4

La solución óptima en la etapa 1 indica que la ciudad 1 está enlazada con la ciudad 4. A continuación, la solución óptima en la etapa 2 enlaza la ciudad 4 con la ciudad 5. Por último, la solución óptima en la etapa 3 conecta la ciudad 5 con la ciudad 7. Así, la ruta completa es $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$, y la distancia asociada es de 21 millas.

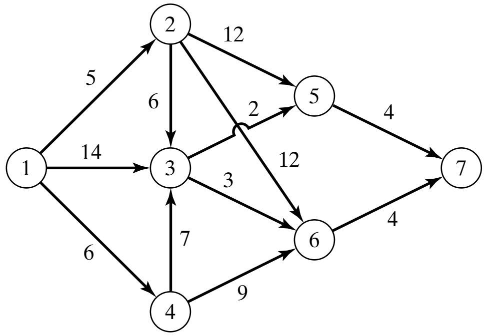


FIGURA 10.3

Red para el problema 3, conjunto de problemas 10.2a

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.2A

1. Para el problema 1, conjunto de problemas 10.1a, formule la ecuación recursiva en reversa y úsela para determinar la solución óptima.
2. Para el problema 2, conjunto de problemas 10.1a, formule la ecuación recursiva en reversa y úsela para determinar la solución óptima.
3. Se desea determinar, para la red de la figura 10.3, la ruta más corta entre las ciudades 1 a 7. Defina las etapas y los estados usando recursión en reversa, y a continuación resuelva el problema.

10.3 APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Esta sección presentará cuatro aplicaciones, cada una con un concepto nuevo en la implementación de la programación dinámica. Al estudiar cada aplicación ponga atención especial a los tres elementos básicos de un modelo de programación dinámica:

1. Definición de las *etapas.*
2. Definición de las *alternativas* en cada etapa.
3. Definición de los *estados* para cada etapa.

En general, de los tres elementos, la definición del *estado* suele ser la más sutil. Las aplicaciones que aquí se presentan muestran que varía la definición de estado, dependiendo del caso que se modele. Sin embargo, al investigar cada aplicación encontrará útil tener en cuenta las preguntas siguientes:

1. ¿Qué relaciones vinculan entre sí a las etapas?
2. ¿Qué información se necesita para tomar decisiones factibles en la etapa actual sin volver a examinar las decisiones tomadas en las etapas anteriores?

Mi experiencia docente me indica que se puede ampliar el concepto de *estado* si se cuestiona la validez de la forma en que se define en el libro. Haga la prueba con una definición distinta, que le parezca "más lógica" y úsela en los cálculos recursivos. Al final verá que las definiciones que aquí se presentaron proporcionan la forma correcta de resolver el problema.

Mientras tanto, el proceso mental que haya hecho debe ampliar su comprensión del concepto de estado.

10.3.1 Problema de la mochila/equipo de vuelo/carga del contenedor

El modelo clásico de la mochila tiene que ver con el caso de un soldado (o un montañista) que debe decidir cuáles son los artículos más valiosos que debe llevar en su mochila. Este problema parafrasea un modelo general de asignación de recursos en el que un solo recurso limitado se asigna a varias alternativas (por ejemplo, fondos limitados asignados a proyectos) con objeto de maximizar el ingreso total.

Antes de presentar el modelo de programación dinámica, haremos notar que en las publicaciones, al problema de la *mochila* también se le llama problema de *conjunto de fuga o equipo de vuelo*, en el que un piloto de un avión a reacción debe determinar los artículos más valiosos (de emergencia) que debe llevar a bordo, y el problema de *carga de flete o del contenedor*, en el que un barco con capacidad limitada de volumen o peso se carga con los fletes más valiosos. ¡Parece que estos tres nombres se acuñaron en las tres ramas de las fuerzas armadas estadounidenses: la fuerza aérea, el ejército y la marina!

La ecuación recursiva (en reversa) se desarrolla para el problema general de una mochila de W libras, con n artículos. Sea m_i la cantidad de unidades del artículo i en la mochila, y defínanse r_i y w_i como el ingreso y el peso por unidad del artículo i. El problema general se representa con el siguiente programa lineal entero:

$$\text{Maximizar } z = r_1m_1 + r_2m_2 + \dots + r_nm_n$$

sujeta a

$$w_1m_1 + w_2m_2 + \dots + w_nm_n \leq W$$
$$m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0 \text{ y enteros}$$

Los tres elementos del modelo son

1. La *etapa i* se representa con el artículo i, $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Las *alternativas* en la etapa i se representan por m_i, la cantidad de unidades del artículo i que entran en la mochila. El ingreso correspondiente es r_im_i. Si se define $[\frac{W}{w_i}]$ como el máximo entero menor o igual a $\frac{W}{w_i}$, se ve que $m_i = 0, 1, \dots, [\frac{W}{w_i}]$.

3. El *estado* en la etapa i se representa por x_i, el peso total asignado a las etapas (artículos) i, $i + 1, \dots,$ y n. Esta definición refleja el que la restricción del peso es la única que vincula entre sí a todas las n etapas.

Definiremos a

$$f_i(x_i) = \text{como el ingreso máximo para las etapas } i,\ i + 1, \text{ y } n, \text{ dado el estado } x_i$$

La forma más sencilla de determinar la ecuación recursiva es un procedimiento con dos pasos:

Paso 1. Expresar $f_i(x_i)$ en función de $f_i(x_{i+1})$ como sigue:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{m_i=0,1,\dots,[\frac{W}{w_i}] \\ x_i \leq W}} \{r_im_i + f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$

Paso 2. Expresar x_{i+1} en función de x_i para asegurar que el lado izquierdo, $f_i(x_i)$, sea función sólo de x_i. Por definición, $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ representa el peso que se usó en la etapa i. Así, $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$, y la ecuación recursiva apropiada es

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,\,1,\ldots,[\frac{W}{w_i}] \\ x_i \le W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo 10.3-1

Un barco de 4 toneladas se carga con uno o más de tres artículos. La tabla siguiente muestra el peso unitario, w_i, en toneladas, y el ingreso por unidad r_i, en miles de dólares, para el artículo i. ¿Cómo se debe cargar el barco para maximizar los ingresos totales?

Artículo i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Como los pesos unitarios w_i y el peso máximo W son enteros, el estado x_i sólo debe tener valores enteros.

Etapa 3. No se conoce de antemano el peso exacto por asignar a la etapa 3 (artículo 3), pero debe asumir uno de los valores 0, 1, ..., y 4 (porque $W = 4$ toneladas). Los estados $x_3 = 0$ y $x_3 = 4$, respectivamente, representan los casos extremos de no embarcar nada del artículo 3 y de asignar a él toda la capacidad del barco. Los valores restantes de x_3 (= 1, 2 y 3) implican una asignación parcial de la capacidad del barco al artículo 3. De hecho, el intervalo mencionado de valores de x_3 cubre todas las asignaciones posibles de capacidad del barco al artículo 3.

Como $w_3 = 1$ tonelada por unidad, la cantidad máxima de unidades que se pueden cargar del artículo 3 es $\frac{4}{1} = 4$, lo que significa que los valores posibles de m_3 son 0, 1, 2, 3 y 4. Sólo es posible una m_3 alternativa si $w_3 m_3 \le x_3$. Así, todas las alternativas no factibles (aquellas para las que $w_3 m_3 > x_3$) quedan excluidas. La ecuación siguiente es la base para comparar las alternativas de la etapa 3.

$$f_3(x_3) = \max_{m_3}\{14m_3\},\ \max\{m_3\} = [\tfrac{4}{1}] = 4$$

El cuadro siguiente compara las alternativas factibles para cada valor de x_3.

	$14m_3$					Solución óptima	
x_3	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	—	—	—	—	0	0
1	0	14	—	—	—	14	1
2	0	14	28	—	—	28	2
3	0	14	28	42	—	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Etapa 2.

$$f_2(x_2) = \max_{m_2}\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\},\ \max\{m_2\} = [\tfrac{4}{3}] = 1$$

	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Solución óptima	
x_2	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0 + 0 = 0	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	14	0
2	0 + 28 = 28	—	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	61	1

Etapa 1.

$$f_1(x_1) = \max_{m_1}\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\},\ \max\{m_1\} = [\tfrac{4}{2}] = 2$$

	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			Solución óptima	
x_1	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0 + 0 = 0	—	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	—	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	—	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	—	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 62	62	2

La solución óptima se determina ahora de la siguiente manera: dada $W = 4$ toneladas, $x_1 = 4$ expresa la alternativa óptima $m_1^* = 2$, que quiere decir que en el barco se cargan 2 unidades del artículo 1. Esta asignación deja a $x_2 = x_1 - 2m_2^* = 4 - 2 \times 2 = 0$. De la etapa 2, $x_2 = 0$ produce $m_2^* = 0$, que a su vez produce $x_3 = x_2 - 3m_2 = 0 - 3 \times 0 = 0$. A continuación, de la etapa 3, $x_3 = 0$ produce $m_3^* = 0$. Así, la solución completa es $m_1^* = 2$, $m_2^* = 0$ y $m_3^* = 0$. El ingreso correspondiente es $62,000.

En la tabla para la etapa 1 no se necesita en realidad obtener sólo el óptimo de $x_1 = 4$, porque es la última etapa que se examina. Sin embargo, se incluyen los cálculos para $x_1 = 0, 1, 2$ y 3, para poder hacer un análisis de sensibilidad. Por ejemplo, ¿qué pasaría si la capacidad del barco es 3 toneladas y no 4? La nueva solución óptima se puede determinar comenzando con $x_1 = 3$ en la etapa 1 y continuando del mismo modo que usamos para $x_1 = 4$.

El ejemplo de carga del contenedor representa un modelo característico de *asignación de recursos*, en el cual se reparte un recurso limitado entre una cantidad finita de actividades (económicas). El objetivo es maximizar una función de retribución asociada. En esos modelos, la definición del estado en cada etapa será similar a la que se presentó para el modelo de carga del contenedor. Es: el estado en la etapa i es la cantidad total del recurso asignada a las etapas $i,\ i + 1, \ldots,$ y n.

Solución del problema de la mochila con hoja de cálculo. La naturaleza de los cálculos de programación dinámica hace imposible desarrollar un programa general de cómputo que pueda manejar todos esos problemas. Quizá eso explica la persistente ausencia de programas comerciales de esta disciplina.

En esta sección presentaremos un algoritmo para manejar una subclase de problemas de programación dinámica, el problema de la mochila con una sola restricción, en Excel (archivo ch10Knapsack.xls). Este algoritmo no es específico para los datos, por lo que puede manejar cualquier problema de esta categoría (sujeto a un límite de tamaño).

La figura 10.4 muestra la pantalla inicial del modelo (en reversa) de la mochila, en programación dinámica. La pantalla se divide en dos secciones: la de la derecha (columnas Q:V) es para resumir los resultados. En la parte izquierda (columnas A:P), la parte superior (renglones 3 a 6) proporciona los datos para la etapa actual, y la parte inferior (renglones 7 en adelante) se reserva para cálculos de etapa. Los símbolos de los datos corresponden a la notación matemática que se usó en el desarrollo del modelo de programa dinámico, y se explican solos. Para ajustar con comodidad la hoja de cálculo en una pantalla, el valor máximo factible de la alternativa m_i en la etapa i es 10 (celdas D6:N6).

La figura 10.5 muestra los cálculos por etapa, generados por el algoritmo para el ejemplo 10.3-1. Los cálculos se hacen de una etapa por una, y se piden al usuario los datos básicos que sirven para cada etapa.[1] Comenzando con la etapa 3 y usando la notación y los datos del ejemplo 10.3-1, las celdas de datos (a un lado de las celdas sombreadas) se actualizan como se ve en la lista siguiente:

Elemento	Celda(s)
Número de etapas, $N = 3$	D3
Límite de recurso, $W = 4$	G3
Etapa actual = 3	C4
$w_3 = 1$	E4
$r_3 = 14$	G4
$m_3 = (0, 1, 2, 3, 4)$	D6:H6

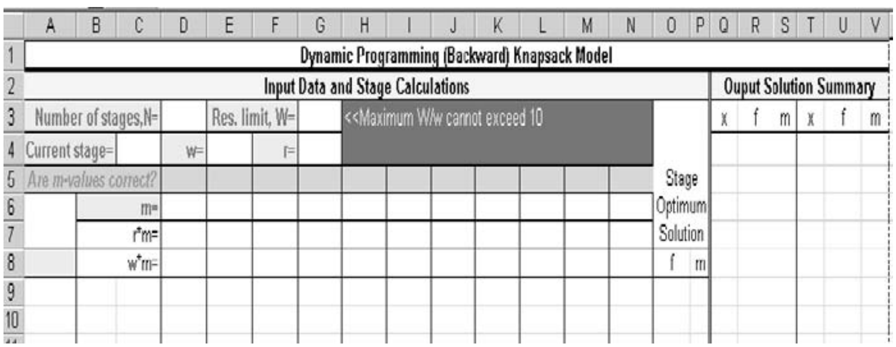


FIGURA 10.4

Pantalla inicial de Excel para el modelo general de la mochila en programación dinámica

[1]Aunque yo hubiera podido automatizar la hoja de cálculo para obtener los resultados finales del problema en forma directa, opté por hacer que el usuario participara en el proceso de solución. El esfuerzo adicional por parte del lector es mínimo pero (así lo creo) es apreciable la recompensa en términos de ampliar su comprensión de los detalles de cómputo de programación dinámica.

Etapa 3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations										Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=			3	Res. limit, W=		4	<<Maxi			x	f	m	x	f	m
4	Current stage=		3	w3=	1	r3=	14				stage 3					
5	Are m3-values correct?			yes	yes	yes	yes	yes	Stage		0	0	0			
6		m3=		0	1	2	3	4	Optimum		1	14	1			
7	Stage4	r3*m3=		0	14	28	42	56	Solution		2	28	2			
8	f4	w3*m3=		0	1	2	3	4	f3	m3	3	42	3			
9		x3=	0	0	1111111	1111111	1111111	1111111	0	0	4	56	4			
10		x3=	1	0	14	1111111	1111111	1111111	14	1						
11		x3=	2	0	14	28	1111111	1111111	28	2						
12		x3=	3	0	14	28	42	1111111	42	3						
13		x3=	4	0	14	28	42	56	56	4						

Etapa 2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations										Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=			3	Res. limit, W=		4	<<Maxi			x	f	m	x	f	m
4	Current stage=		2	w2=	3	r2=	47				stage 3			stage 2		
5	Are m2-values correct?			yes	yes				Stage		0	0	0	0	0	0
6		m2=		0	1				Optimum		1	14	1	1	14	0
7	Stage3	r2*m2=		0	47				Solution		2	28	2	2	28	0
8	f3	w2*m2=		0	3				f2	m2	3	42	3	3	47	1
9	0	x2=	0	0	1111111				0	0	4	56	4	4	61	1
10	14	x2=	1	14	1111111				14	0						
11	28	x2=	2	28	1111111				28	0						
12	42	x2=	3	42	47				47	1						
13	56	x2=	4	56	61				61	1						

Etapa 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations										Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=			3	Res. limit, W=		4	<<Maxi			x	f	m	x	f	m
4	Current stage=		1	w1=	2	r1=	31				stage 3			stage 2		
5	Are m1-values correct?			yes	yes	yes			Stage		0	0	0	0	0	0
6		m1=		0	1	2			Optimum		1	14	1	1	14	0
7	Stage2	r1*m1=		0	31	62			Solution		2	28	2	2	28	0
8	f2	w1*m1=		0	2	4			f1	m1	3	42	3	3	47	1
9	0	x1=	0	0	1111111	1111111			0	0	4	56	4	4	61	1
10	14	x1=	1	14	1111111	1111111			14	0				stage 1		
11	28	x1=	2	28	31	1111111			31	1				0	0	0
12	47	x1=	3	47	45	1111111			47	0				1	14	0
13	61	x1=	4	61	59	62			62	2				2	31	1
14														3	47	0
15														4	62	2

FIGURA 10.5

Modelo de programación dinámica en Excel, para el problema de la mochila, ejemplo 10.3-1

Nótese que los valores factibles de m_3 son $0,\ 1, \ldots,$ y $[\frac{W}{w_3}] = [\frac{4}{1}] = 4$, como hicimos en el ejemplo 10.3-1. La hoja de cálculo comprueba en forma automática si los valores ingresados de m_i son correctos, y emite los mensajes "yes" (sí), "no" y "delete" (eliminar) en el renglón 5.

Cuando se teclean los datos de la etapa 3, la hoja de cálculo se actualiza y genera todos los cálculos necesarios de la etapa (columnas de B a P) en forma automática. Se usa la clave -1111111 para indicar que no es factible el elemento correspondiente. La solución óptima

(f_3, m_3) de la etapa se ve en las columnas O y P. La columna A contiene los valores de f_4. Como los cálculos se inician en la etapa 3, $f_4 = 0$ para todos los valores de x_3. El lector puede dejar vacías las celdas A9:A13, o ingresar en todas ellas valores cero.

Ahora que están a la mano los cálculos de la etapa 3, se hacen los pasos siguientes para crear un registro *permanente* de la solución óptima de la etapa actual, y preparar la hoja de cálculo para los cálculos de la siguiente etapa:

Paso 1. Copiar los valores de x_3, celdas C9:C13, y pegarlos en las celdas Q5:Q9 en la sección de resumen de la solución óptima. Después, copiar los valores de (f_3, m_3) en las etapas O9:P13 y pegarlos en las celdas R5:S9. Recuerde que sólo necesita pegar valores, para lo cual se requiere seleccionar Pegado especial en el menú Edición y Valores en el cuadro de diálogo.

Paso 2. Copiar los valores de f_3 en las celdas R5:R9, y pegarlos en las celdas A9:A13 (*no* necesita usted Pegado especial en este paso).

Paso 3. Cambiar a 2 la celda C4 e ingresar los nuevos valores de w_2, r_2 y m_2 para registrar los datos de la etapa 2.

El paso 2 coloca a $f_{i+1}(x_i - w_i m_i)$ en la columna A, para preparar el cálculo de $f_i(x_i)$ en la etapa i (véase la fórmula recursiva del problema de la mochila en el ejemplo 10.3-1). Esto explica la razón de ingresar los valores cero para representar a f_4, en la columna A del cuadro de la etapa 3.

Una vez que están disponibles los cálculos de la etapa 2, el usuario puede preparar esta pantalla para la etapa 1 en forma parecida. Cuando la etapa 1 está completa, se puede usar el resumen de la solución óptima para leer la solución, como se explicó en el ejemplo 10.3-1. Nótese que la organización del área de resumen de soluciones (parte derecha de la pantalla, columnas Q:V) tiene formato libre, y puede usted organizar el contenido en alguna forma adecuada que desee usted.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3A[2]

1. En el ejemplo 10.3-1, determine la solución óptima, suponiendo que la capacidad máxima de peso en el barco es 3 toneladas.
2. Resuelva el problema de carga del contenedor, ejemplo 10.3-1, para cada uno de los siguientes conjuntos de datos:
   a) $w_1 = 4, r_1 = 70, w_2 = 1, r_2 = 20, w_3 = 2, r_3 = 40, W = 6$
   b) $w_1 = 1, r_1 = 30, w_2 = 2, r_2 = 60, w_3 = 3, r_3 = 80, W = 4$
3. En el modelo de carga del contenedor, ejemplo 10.3-1, suponga que el ingreso por artículo incluye una cantidad constante en la que sólo se incurre si se escoge el artículo, como se ve en la tabla siguiente:

Artículo	Ingreso
1	$\begin{cases} -5 + 31m_1, & \text{si } m_1 > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$
2	$\begin{cases} -15 + 47m_2 & \text{si } m_2 > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$
3	$\begin{cases} -4 + 14m_3, & \text{si } m_3 > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

[2]En este conjunto de problemas se le encarece que, cuando sea posible, haga los cálculos a mano y después compruebe los resultados usando la plantilla ch10Knapsack.xls de Excel.

Determine la solución óptima con programación dinámica. (*Sugerencia:* puede usted usar el archivo Excel ch10setupKnapsack.xls para resolver este problema.)

4. Un explorador debe cargar tres artículos: alimentos, botiquín y ropa. La mochila tiene 3 pies cúbicos de capacidad. Cada unidad de alimento ocupa 1 pie cúbico. Un botiquín ocupa $\frac{1}{4}$ de pie cúbico y cada prenda de vestir ocupa $\frac{1}{2}$ pie cúbico. El excursionista asigna los factores de prioridad 3, 4 y 5 al alimento, botiquín y ropa, lo que significa que la ropa es el más valioso de esos artículos. De acuerdo con la experiencia, el excursionista debe llevar al menos 1 unidad de cada artículo, y no más de dos botiquines. ¿Cuánto de cada artículo debe cargar el excursionista?

5. Un alumno debe seleccionar en total 10 cursos opcionales de cuatro departamentos distintos, y al menos un curso de cada departamento. Los 10 cursos se asignan a los cuatro departamentos en una forma que maximiza el "conocimiento". El alumno mide el conocimiento en una escala de 100 puntos, y llega a la tabla siguiente:

	Número de cursos						
Departamento	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	≥ 7
I	25	50	60	80	100	100	100
II	20	70	90	100	100	100	100
III	40	60	80	100	100	100	100
IV	10	20	30	40	50	60	70

¿Cómo debe seleccionar los cursos el alumno?

6. Tengo un pequeño jardín en mi traspatio que mide 10×20 pies. Esta primavera deseo sembrar tres verduras: tomates, ejotes y maíz. El huerto se organiza en surcos de 10 pies. Los surcos con tomate y maíz tienen 2 pies de ancho, y los de ejotes son de 3 pies de ancho. Lo que más me gusta son los tomates, y los ejotes casi no me gustan; en una escala de 1 a 10 calificaría con 10 a los tomates, 7 al maíz y 3 a los ejotes. Independientemente de mis gustos, mi esposa insiste en sembrar al menos un surco de ejotes y no más de dos surcos de tomates. ¿Cuántos surcos de cada planta debo sembrar?

7. Habitat for Humanity es una maravillosa organización caritativa que construye casas para familias necesitadas, usando trabajo voluntario. Una familia elegible puede escoger entre tres tamaños de vivienda: de 1000, 1100 y 1200 pies cuadrados. Cada tamaño de casa requiere cierta cantidad de voluntarios. El capítulo de Fayetteville ha recibido cinco solicitudes para los próximos 6 meses. El comité a cargo asigna una calificación a cada solicitud, con base en varios factores. Una calificación más alta indica más necesidad. El capítulo de Fayetteville cuenta con un máximo de 23 voluntarios. Los datos que siguen resumen las calificaciones para las solicitudes, y la cantidad necesaria de voluntarios.

Aplicación	Tamaño de la vivienda (pies^2)	Calificación	Número de voluntarios requeridos
1	1200	78	7
2	1000	64	4
3	1100	68	6
4	1000	62	5
5	1200	85	8

¿Cuáles solicitudes debe aprobar el comité?

8. El alcalde Bassam se desea reelegir por el condado de Washington. Los fondos disponibles para su campaña son de $10,000. Aunque al comité de reelección le gustaría la campaña en los cinco

barrios del condado, pero no lo permiten los fondos limitados. La tabla siguiente muestra la población de electores y la cantidad de fondos necesarios para lanzar una buena campaña en cada barrio.

Barrio	Población	Fondos requeridos ($)
1	3100	3500
2	2600	2500
3	3500	4000
4	2800	3000
5	2400	2000

La opción en cada barrio es recibir todos los fondos asignados o no recibir nada. ¿Cómo se deben asignar los fondos?

9. Un dispositivo electrónico tiene tres componentes. Esos componentes están en serie, por lo que la falla de uno causa la falla del dispositivo. La confiabilidad (probabilidad de que no haya falla) del dispositivo se puede mejorar instalando una o dos unidades de reserva en cada componente. En la tabla siguiente se ve la confiabilidad r y el costo c.

Número de unidades en paralelo	Componente 1		Componente 2		Componente 3	
	r_1	c_1($)	r_2	c_2($)	r_3	c_3($)
1	0.6	1000	0.7	3000	0.5	2000
2	0.8	2000	0.8	5000	0.7	4000
3	0.9	3000	0.9	6000	0.9	5000

El capital total disponible para la fabricación del dispositivo es de $10,000. ¿Cómo se debe fabricar el dispositivo? (*Sugerencia:* el objetivo es maximizar la confiabilidad, $r_1 r_2 r_3$, del dispositivo. Eso significa que la descomposición de la función objetivo es multiplicativa, y no aditiva.)

10. Resuelva el modelo siguiente con programación dinámica:

$$\text{Maximizar } z = y_1 y_2 \ldots y_n$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = c$$
$$y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

(*Sugerencia:* este problema se parece al problema 9, excepto que todas las variables y_i son continuas.)

11. Resuelva el siguiente problema con programación dinámica:

$$\text{Minimizar } z = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

sujeta a

$$y_1 y_2 \ldots y_n = c$$
$$y_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

12. Resuelva el siguiente problema con programación dinámica:

$$\text{Maximizar } z = (y_1 + 2)^2 + y_2 y_3 + (y_4 - 5)^2$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 5$$

$$y_i \geq 0 \text{ y entera, } i = 1, 2, 3, 4$$

13. Resuelva el siguiente problema con programación dinámica:

$$\text{Minimizar } z = \text{máx}\,\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = c$$

$$y_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Aplique la solución para el caso especial de $n = 3$, $c = 10$, y $f(y_1) = y_1 + 5$, $f(y_2) = 5y_2 + 3$ y $f(y_3) = y_3 - 2$.

10.3.2 Modelo del tamaño de la fuerza de trabajo

En algunos proyectos de construcción, las contrataciones y los despidos se hacen de modo que se mantenga una fuerza laboral que cumpla con las necesidades del proyecto. Como las actividades de contratación y de despido implican costos adicionales, ¿cómo se debe mantener la fuerza de trabajo durante el proyecto?

Supongamos que el proyecto se ejecutará durante el lapso de n semanas, y que la fuerza de trabajo mínima requerida en la semana i es b_i trabajadores. En condiciones ideales nos gustaría que el tamaño de la fuerza de trabajo en la semana i fuera exactamente b_i. Sin embargo, de acuerdo con los parámetros de costo, podría ser más económico dejar que fluctúe el tamaño de la fuerza de trabajo. Como x_i es la cantidad de trabajadores empleados en la semana i, en esa semana i se puede incurrir en dos costos: $C_1(x_i - b_i)$, el costo de mantener el exceso de personal $x_i - b_i$ y $C_2(x_i - x_{i-1})$, el costo de contratar, $x_i - x_{i-1}$ trabajadores adicionales.

Los elementos del modelo de programación dinámica se definen como sigue:

1. La *etapa* i se representa por la semana i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son x_i, la cantidad de trabajadores en la semana i.
3. El *estado* en cada etapa i se representa por la cantidad de trabajadores disponibles en la etapa (semana) $i - 1$, que es x_{i-1}.

La ecuación recursiva de programación dinámica es la siguiente:

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i}\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_{n+1}(x_n) \equiv 0$$

Los cálculos comienzan en la etapa n, con $x_n = b_n$ y terminan en la etapa 1.

Ejemplo 10.3-2

Un contratista constructor estima que la fuerza de trabajo necesaria durante las próximas 5 semanas será de 5, 7, 8, 4 y 6 trabajadores, respectivamente. La mano de obra en exceso que se conserve le costará \$300 por trabajador semanalmente, y la nueva contratación en cualquier semana tendrá un costo fijo de \$400 más \$200 por trabajador y por semana.

Los datos del problema se resumen como sigue:

$$b_1 = 5,\ b_2 = 7,\ b_3 = 8,\ b_4 = 4,\ b_5 = 6$$
$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i),\ x_i > b_i,\ i = 1, 2, \ldots, 5$$
$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}),\ x_i > x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, 5$$

Las funciones de costo, C_1 y C_2, se dan en cientos de dólares.

Etapa 5 ($b_5 = 6$)

	$C_1(x_5 - 6) + C_2(x_5 - x_4)$	Solución óptima	
x_4	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5^*
4	3(0) + 4 + 2(2) = 8	8	6
5	3(0) + 4 + 2(1) = 6	6	6
6	3(0) + 0 = 0	0	6

Etapa 4 ($b_4 = 4$)

	$C_1(x_4 - 4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$			Solución óptima	
x_3	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	3(0) + 0 + 8 = 8	3(1) + 0 + 6 = 9	3(2) + 0 + 0 = 6	6	6

Etapa 3 ($b_3 = 8$)

	$C_1(x_3 - 8) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$	Solución óptima	
x_2	$x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	x_3^*
7	3(0) + 4 + 2(1) + 6 = 12	12	8
8	3(0) + 0 + 6 = 6	6	8

Etapa 2 ($b_2 = 7$)

	$C_1(x_2 - 7) + C_2(x_2 - x_1) + f_3(x_2)$		Solución óptima	
x_1	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2^*
5	3(0) + 4 + 2(2) + 12 = 20	3(1) + 4 + 2(3) + 6 = 19	19	8
6	3(0) + 4 + 2(1) + 12 = 18	3(1) + 4 + 2(2) + 6 = 17	17	8
7	3(0) + 0 + 12 = 12	3(1) + 4 + 2(1) + 6 = 15	12	7
8	3(0) + 0 + 12 = 12	3(1) + 0 + 6 = 9	9	8

Etapa 1 ($b_1 = 5$)

	$C_1(x_1 - 5) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Solución óptima	
x_0	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
0	3(0) + 4 + 2(5) + 19 = 33	3(1) + 4 + 2(6) + 17 = 36	3(2) + 4 + 2(7) + 12 = 36	3(2) + 4 + 2(8) + 9 = 35	33	5

La solución óptima es la siguiente:

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6$$

La solución se puede traducir en el siguiente plan:

Semana *i*	Fuerza laboral mínima (b_i)	Fuerza laboral actual (x_i)	Decisión
1	5	5	Contratar 5 trabajadores
2	7	8	Contratar 3 trabajadores
3	8	8	No cambiar
4	4	6	Despedir 2 trabajadores
5	6	6	No cambiar

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3B

1. Resuelva el ejemplo 10.3-2 para cada uno de los siguientes requisitos mínimos de mano de obra:

a) $b_1 = 6,\ b_2 = 5,\ b_3 = 3,\ b_4 = 6,\ b_5 = 8$

b) $b_1 = 8,\ b_2 = 4,\ b_3 = 7,\ b_4 = 8,\ b_5 = 2$

2. En el ejemplo 10.3-2, suponga que se incurre en una liquidación de $100 por cada trabajador despedido; determine la solución óptima.

3. Luxor Travel organiza viajes de 1 semana al sur de Egipto. Obtiene un contrato para proporcionar siete, cuatro, siete y ocho automóviles de alquiler a grupos de turistas durante las próximas 4 semanas, respectivamente. Subcontrata con un agente local de alquiler de automóviles para que cubra sus necesidades. El agente cobra una renta de $220 por vehículo por semana, más una tarifa de $500 por cualquier transacción de alquiler. Sin embargo, Luxor puede optar por no regresar los automóviles rentados al término de la semana, en cuyo caso la agencia sólo pagará la renta semanal de $220. ¿Cuál es la mejor manera, para Luxor Travel de manejar la situación de los alquileres?

4. Contratan a la empresa GECO durante los próximos 4 años para suministrar cuatro motores de avión por año. La capacidad disponible de producción y los costos de producción varían de un año al siguiente. GECO puede producir cinco motores en el año 1, seis en el año 2, tres en el 3 y cinco en el 4. Los costos correspondientes de producción, por motor y durante los próximos 4 años serán de $300,000, $330,000, $350,000 y $420,000, respectivamente. GECO puede optar por producir más de sus necesidades en determinado año, y en ese caso los motores deben almacenarse en forma adecuada, hasta que sean enviados a los clientes. El costo de almacenamiento por motor varía también de un año a otro, y se estima que será de $20,000 en el año 1, $30,000 en el año 2, $40,000 en el año 3 y $50,000 en el año 4. En la actualidad, al comenzar el año 1, GECO tiene listo un motor para su transporte. Formule un plan de producción óptimo para GECO.

10.3.3 Modelo de reposición de equipo

Mientras más tiempo esté en servicio una máquina, su costo de mantenimiento es mayor y su productividad menor. Cuando la máquina llega a cierta antigüedad será más económico reemplazarla. Es así que entonces el problema se reduce a determinación de la antigüedad más económica de una máquina.

Suponga que se estudia el problema de reposición de la máquina durante un lapso de n años. Al *inicio* de cada año, se debe decidir si mantener la máquina en servicio por un año más o reemplazarla por una nueva. Sean $r(t)$, $c(t)$, los ingresos y el costo de operación anuales, y $s(t)$ el valor de recuperación de una máquina con t años de antigüedad. El costo de adquisición de una máquina nueva en cualquier año es I.

Los elementos del modelo de programación dinámica son

1. La *etapa i* se representa por el año i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa (el año) i son de *conservar* o *reemplazar* la máquina *al comenzar* el año i.
3. El *estado* en la etapa i es la antigüedad de la máquina al comienzo del año i.

Definiendo:

$f_i(t) =$ ingreso neto máximo para los años i, $i + 1, \ldots,$ y n dado que la máquina tiene t años de antigüedad al *comenzar* el año i

Se deduce la siguiente ecuación recursiva:

$$f_i(t) = \text{máx}\begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1), & \text{si se CONSERVA} \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1), & \text{si se REEMPLAZA} \end{cases}$$

$$f_{n+1}(.) \equiv 0$$

Ejemplo 10.3-3

Una empresa debe determinar la política óptima, durante los próximos 4 años ($n = 4$), de reemplazo de una máquina, que en la actualidad tiene 3 años. La siguiente tabla muestra los datos del problema. La empresa establece que toda máquina que tenga 6 años de edad debe reemplazarse. El costo de una máquina nueva es \$100,000.

Tiempo, t (años)	Ingreso, $r(t)$ (\$)	Costo de operación, $c(t)$ (\$)	Valor de recuperación, $s(t)$ (\$)
0	20,000	200	—
1	19,000	600	80,000
2	18,500	1200	60,000
3	17,200	1500	50,000
4	15,500	1700	30,000
5	14,000	1800	10,000
6	12,200	2200	5,000

La determinación de los valores factibles de la edad de la máquina en cada etapa requiere de algo de ingenio. En la figura 10.6 se resume la red que representa el problema. Al *iniciar* el año 1 se tiene una máquina de 3 años de antigüedad. Se puede reemplazarla (R) o conservarla

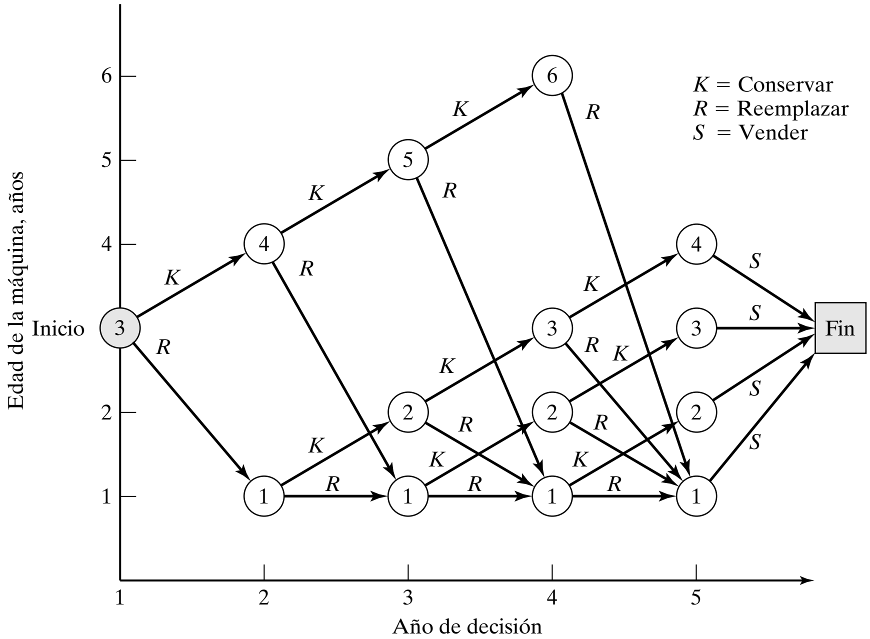


FIGURA 10.6

Representación de la edad de la máquina en función del año de decisión, en el ejemplo 10.3-3

(*K*) durante otro año. Al iniciar el año 2, si hay reemplazo, la máquina nueva tendrá 1 año de edad; en caso contrario, la máquina actual tendrá 4 años de antigüedad. Los mismos razonamientos se aplican al iniciar los años 2 a 4. Si se reemplaza una máquina con 1 año de antigüedad al iniciar los años 2 y 3, su reposición tendrá 1 año de antigüedad al inicio del año siguiente. También, al iniciar el año 4, se debe reemplazar una máquina con 6 años de servicio, y al final del año 4 se desechan las máquinas, con recuperación *S*.

La red indica que al comenzar el año 2, las edades posibles de la máquina son 1 y 4 años. Para el comienzo del año 3, las antigüedades posibles son 1, 2 y 5 años, y para el comienzo del año 4, las antigüedades posibles son 1, 2, 3 y 6 años.

La solución de la red de la figura 10.6 equivale a determinar la ruta más larga, del inicio del año 1 al final del año 4. Se usará la forma tabular para resolver el problema. Todos los valores son en miles de $. Nótese que si se reemplaza una máquina en el año 4 (es decir, al fin del horizonte de planeación) los ingresos incluirán el valor de recuperación, $s(t)$, de la máquina *reemplazada* y el valor de recuperación, $s(1)$ de la máquina *de repuesto*.

Etapa 4.

	K	*R*	Solución óptima	
t	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	*Decisión*
1	19.0 + 60 − 0.6 = 78.4	20 + 80 + 80 − 0.2 − 100 = 79.8	79.8	*R*
2	18.5 + 50 − 1.2 = 67.3	20 + 60 + 80 − 0.2 − 100 = 59.8	67.3	*K*
3	17.2 + 30 − 1.5 = 45.7	20 + 50 + 80 − 0.2 − 100 = 49.8	49.8	*R*
6	(Se debe reemplazar)	20 + 5 + 80 − 0.2 − 100 = 4.8	4.8	*R*

Etapa 3.

	K	R	Solución óptima	
t	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_4(1)$	$f_3(t)$	*Decisión*
1	19.0 − 0.6 + 67.3 = 85.7	20 + 80 − 0.2 − 100 + 79.8 = 79.6	85.7	K
2	18.5 − 1.2 + 49.8 = 67.1	20 + 60 − 0.2 − 100 + 79.8 = 59.6	67.1	K
5	14.0 − 1.8 + 4.8 = 17.0	20 + 10 − 0.2 − 100 + 79.8 = 19.6	19.6	R

Etapa 2.

	K	R	Solución óptima	
t	$r(t) - c(t) + f_3(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_3(1)$	$f_2(t)$	*Decisión*
1	19.0 − 0.6 + 67.1 = 85.5	20 + 80 − 0.2 − 100 + 85.7 = 85.5	85.5	K o R
4	15.5 − 1.7 + 19.6 = 33.4	20 + 30 − 0.2 − 100 + 85.7 = 35.5	35.5	R

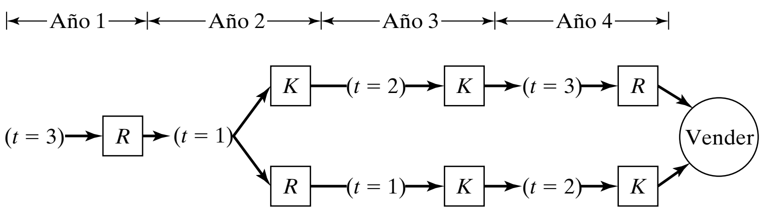
Etapa 1.

	K	R	Solución óptima	
t	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_2(1)$	$f_1(t)$	*Decisión*
3	17.2 − 1.5 + 35.5 = 51.2	20 + 50 − 0.2 − 100 + 85.5 = 55.3	55.3	R

La figura 10.7 resume la solución óptima. Al iniciar el año 1, la decisión óptima para $t = 3$ es reemplazar la máquina. Así, la máquina nueva tendrá 1 año al iniciar el año 2, y $t = 1$ al iniciar el año 2 determina conservarla o reemplazarla. Si se reemplaza, la nueva máquina tendrá 1 año al iniciar el año 3; en caso contrario, la máquina conservada tendrá 2 años. El proceso se continúa de esta forma hasta llegar al año 4.

Las políticas alternativas óptimas comenzando el año 1 son (R, K, K, R) y (R, R, K, K). El costo total es $55,300.

FIGURA 10.7
Solución del ejemplo 10.3-3



CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3C

1. En cada uno de los casos que siguen, forme la red y determine la solución óptima para el modelo del ejemplo 10.3-3:

a) La máquina tiene 2 años de servicio al iniciar el año 1.

b) La máquina tiene 1 año de servicio al iniciar el año 1.

c) La máquina se compra nueva al iniciar el año 1.

2. Mi hijo tiene 13 años de edad y un convenio para podar el pasto con 10 clientes. A cada cliente le corta el pasto 3 veces al año, y gana \$50 en cada trabajo. Acaba de pagar \$200 por una podadora nueva. El costo de mantenimiento y de operación de la máquina es de \$120 durante el primer año de servicio, y a continuación aumenta 20% anual. Una podadora de 1 año tiene un valor de reventa de \$150, que disminuye en adelante 10% anual. Mi hijo, que piensa tener ese negocio hasta que cumpla 16 años, cree que es más económico comprar una nueva podadora cada 2 años. Basa su opinión en que el precio de una máquina nueva aumentará sólo 10% al año. ¿Se justifica su decisión?

3. Circle Farms posee un tractor de 2 años de antigüedad, y desea establecer una política de reemplazo para sus tractores durante los 5 años siguientes. Se debe tener en servicio durante un mínimo de 3 años, pero después de un máximo de 5 años se debe desechar. El precio actual de un tractor es de \$40,000, y aumenta 10% por año. El valor de recuperación de un tractor con 1 año de uso es de \$30,000 y disminuye 10% por año. El costo anual de operación del tractor es de \$1,300, y se espera que aumente 10% por año.

a) Formule el problema como uno de ruta más corta.

b) Formule la ecuación recursiva correspondiente.

c) Determine la política óptima de reemplazo del tractor durante los próximos 5 años.

4. Considere el problema de reemplazo de equipo durante un periodo de n años. Un equipo nuevo cuesta \$$c$, y su valor de venta pasados t años de trabajo es $s(t) = n - t$, para $n > t$ y cero en cualquier otro caso. Los ingresos anuales están en función de la antigüedad $r(t) = n^2 - t^2$ para $n > t$ y cero en cualquier otro caso.

a) Formule el problema como modelo de programación dinámica.

b) Determine la política óptima de reemplazo, dados $c = \$10{,}000$, $n = 5$, y el equipo tiene ya 2 años de servicio.

5. Resuelva el problema 4, suponiendo que el equipo tiene 1 año y que $n = 4$, $c = \$6000$, $r(t) = \frac{n}{1 + t}$.

10.3.4 Modelo de inversión

Suponga el lector que desea invertir las cantidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ al iniciar cada uno de los siguientes n años. Es posible invertirlos en uno de dos bancos: First Bank paga una tasa de interés r_1 y Second Bank paga el interés r_2, ambos interés compuesto anual (es decir, el interés se capitaliza cada año). Para impulsar los depósitos, ambos bancos pagan bonos por nuevas inversiones, en forma de un porcentaje de la cantidad invertida. Estos porcentajes varían de un año a otro, y en el año i son q_{i1} en el First Bank y q_{i2} en el Second Bank. Los bonos se pagan al final del año en el que se hizo la inversión, y se pueden reinvertir en cualquier banco, en el año inmediato siguiente. Sin embargo, una vez depositada una inversión debe quedarse en el banco hasta terminar el horizonte de n años. Determine el programa de inversiones durante los n años siguientes.

Los elementos del modelo de programación dinámica son:

1. La *etapa* i representa el año i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son I_i e $\bar{I}_i$, las cantidades invertidas en el First Bank y en el Second Bank, respectivamente.

3. El *estado* x_i en la etapa i se representa por la cantidad de capital disponible para inversión al iniciar el año i.

Se observa que $\bar{I}_i = x_i - I_i$ por definición. Así

$$x_1 = P_1$$

$$x_i = P_i + q_{i-1}I_{i-1} + q_{i-1,\,2}(x_{i-1} - I_{i-1})$$

$$= P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2})I_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1},\ i = 2, 3, \ldots, n$$

La cantidad reinvertida x_i incluye el nuevo flujo de capital más los bonos por inversiones hechas en el año $i - 1$.

Se definirá

$$f_i(x_i) = \text{valor óptimo de las inversiones para los años } i,\ i + 1, \ldots, \text{ y } n, \text{ dada } x_i$$

A continuación definiremos a s_i como la suma acumulada al final del año n, dado que I_i y $(x_i - I_i)$ son las inversiones hechas en el año i, en el First Bank y en el Second Bank, respectivamente. Si $\alpha_k = (1 + r_k),\ k = 1, 2,$ el problema se puede formular como sigue:

$$\text{Maximizar } z = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

en donde

$$s_i = I_i\alpha_1^{n+1-i} + (x_i - I_i)\alpha_2^{n+1-i}$$

$$= (\alpha_1^{n+1-i} - \alpha_2^{n+1-i})I_i + \alpha_2^{n+1-i}x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$s_n = (\alpha_1 + q_{n1} - \alpha_2 - q_{n2})I_n + (\alpha_2 + q_{n2})x_n$$

Los términos q_{n1} y q_{n2} de s_n se agregan porque los bonos del año n son parte de la suma final acumulada por la inversión.

La ecuación recursiva de programación dinámica en reversa es, entonces:

$$f_i(x_i) = \max_{0 \le I_i \le x_i} \{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\},\ i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$

Como se dijo antes, x_{i+1} se define en función de x_i.

Ejemplo 10.3-4

Suponga que usted desea invertir ahora \$4000 y \$2000 al inicio de los años 2, 3 y 4. La tasa de interés que ofrece First Bank es 8% anual compuesto anualmente, y los bonos durante los 4 años siguientes serán 1.8%, 1.7%, 2.1% y 2.5%, respectivamente. El interés anual que ofrece el Second Bank es 0.2% menor que en el First Bank, pero su bono es 0.5% mayor. El objetivo es maximizar el capital acumulado al final de 4 años.

Al usar la notación presentada arriba, se tiene

$$P_1 = \$4000,\ P_2 = P_3 = P_4 = \$2000$$
$$\alpha_1 = (1 + 0.08) = 1.08$$

$$\alpha_2 = (1 + 0.078) = 1.078$$
$$q_{11} = 0.018,\ q_{21} = 0.017,\ q_{31} = 0.021,\ q_{41} = 0.025$$
$$q_{12} = 0.023,\ q_{22} = 0.022,\ q_{32} = 0.026,\ q_{42} = 0.030$$

Etapa 4.

$$f_4(x_4) = \max_{0 \le I_4 \le x_4} \{s_4\}$$

en donde

$$s_4 = (\alpha_1 + q_{41} - \alpha_2 - q_{42})I_4 + (\alpha_2 + q_{42})x_4 = -0.003I_4 + 1.108x_4$$

La función s_4 es lineal en I_4 en el intervalo $0 \le I_4 \le x_4$, y su máximo está en $I_4 = 0$ por el coeficiente negativo de I_4. Así, la solución óptima para la etapa 5 se puede resumir como sigue:

	Solución óptima	
Estado	$f_4(x_4)$	I_4^*
x_4	$1.108x_4$	0

Etapa 3.

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{s_3 + f_4(x_4)\}$$

en donde

$$s_3 = (1.08^2 - 1.078^2)I_3 + 1.078^2 x_3 = 0.00432I_3 + 1.1621x_3$$
$$x_4 = 2000 - 0.005I_3 + 0.026x_3$$

Así,

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{0.00432I_3 + 1.1621x_3 + 1.108(2000 - 0.005I_3 + 0.026x_3)\}$$
$$= \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{2216 - 0.00122I_3 + 1.1909x_3\}$$

	Solución óptima	
Estado	$f_3(x_3)$	I_3^*
x_3	$2216 + 1.1909x_3$	0

Etapa 2.

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le I_2 \le x_2} \{s_2 + f_3(x_3)\}$$

en donde

$$s_2 = (1.08^3 - 1.078^3)I_2 + 1.078^3 x_2 = 0.006985I_2 + 1.25273x_2$$
$$x_3 = 2000 - 0.005I_2 + 0.022x_2$$

Entonces,

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le I_2 \le x_2} \{0.006985I_2 + 1.25273x_2 + 2216$$
$$+1.1909(2000 - 0.005I_2 + 0.022x_2)\}$$
$$= \max_{0 \le I_2 \le x_2} \{4597.8 + 0.0010305I_2 + 1.27893x_2\}$$

	Solución óptima	
Estado	$f_2(x_2)$	I_2^*
x_2	$4597.8 + 1.27996x_2$	x_2

Etapa 1.

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le I_1 \le x_1} \{s_1 + f_2(x_2)\}$$

en donde

$$s_1 = (1.08^4 - 1.078^4)I_1 + 1.078^4 x_1 = 0.01005I_2 + 1.3504x_1$$
$$x_2 = 2000 - 0.005I_1 + 0.023x_1$$

Así,

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le I_1 \le x_1} \{0.01005I_1 + 1.3504x_1 + 4597.8$$
$$+1.27996(2000 - 0.005I_1 + 0.023x_1)\}$$
$$= \max_{0 \le I_1 \le x_1} \{7157.7 + 0.00365I_1 + 1.37984x_1\}$$

	Solución óptima	
Estado	$f_1(x_1)$	I_1^*
$x_1 = \$4000$	$7157.7 + 1.38349x_2$	\$4000

Al avanzar en reversa, observando que $I_1^* = 4000$, $I_2^* = x_2$, $I_3^* = 0$, se obtienen

$$x_2 = 2000 - 0.005 \times 4000 + 0.023 \times 4000 = \$2072$$
$$x_3 = 2000 - 0.005 \times 2072 + 0.022 \times 2072 = \$2035.22$$
$$x_4 = 2000 - 0.005 \times 0 + 0.026 \times \$2035.22 = \$2052.92$$

La solución óptima se resume entonces así:

Año	Solución óptima	Decisión	Acumulación
1	$I_1^* = x_1$	Invertir $x_1 = \$4000$ en First Bank	$s_1 = \$5441.80$
2	$I_2^* = x_2$	Invertir $x_2 = \$2072$ en First Bank	$s_2 = \$2610.13$
3	$I_3^* = 0$	Invertir $x_3 = \$2035.22$ en Second Bank	$s_3 = \$2365.13$
4	$I_4^* = 0$	Invertir $x_4 = \$2052.92$ en Second Bank	$s_4 = \$2274.64$
			Acumulación total $= \$12,691.70$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3D

1. Resuelva el ejemplo 10.3-4, suponiendo que $r_1 = 0.085$ y $r_2 = 0.08$. Además, suponga que $P_1 = \$5000$, $P_2 = \$4000$, $P_3 = \$3000$ y $P_4 = \$2000$.
2. Un inversionista con \$10,000 de capital inicial debe decidir, al final de cada año, cuánto gastar y qué cantidad invertir en una cuenta de ahorros. Cada \$1 invertido paga $\alpha = \$1.09$ al final del año. La satisfacción obtenida al gastar $\$y$ en cualquier año se cuantifica por la equivalencia de deber $g(y) = \$\sqrt{y}$. Resuelva el problema con programación dinámica, durante un intervalo de $n = 5$ años.
3. Un campesino posee k ovejas. Al final de cada año, toma la decisión de cuántas debe vender y cuántas conservar. La utilidad por vender una oveja en el año i es p_i. La cantidad de ovejas conservada en el año i subirá al doble en el año $i + 1$. El campesino planea vender todas las ovejas al final de n años.
   a) Deduzca la ecuación recursiva general para el problema.
   b) Resuelva el problema para $n = 3$ años, $k = 2$ ovejas, $p_1 = \$100$, $p_2 = \$130$ y $p_3 = \$120$.

10.3.5 Modelos de inventario

La programación dinámica tiene importantes aplicaciones en control de inventarios. En los capítulos 11 y 16 presentaremos algunas de ellas. Los modelos del capítulo 11 son determinísticos, y los del capítulo 16 son probabilísticos.

10.4 PROBLEMA DE DIMENSIONALIDAD

En todos los modelos de programación dinámica que presentamos, el *estado* en cualquier etapa se representa por una sola variable. Por ejemplo, en el modelo de la mochila (Sección 10.3.1) el problema especifica el peso del artículo, como única restricción. En un caso más realista, el volumen de la mochila también puede ser otra restricción viable. En ese caso, se dice que el *estado* en cualquier etapa es bidimensional, porque consiste en dos variables: peso y volumen.

El aumento en la cantidad de variables de estado aumenta los cálculos en cada etapa. Esto es especialmente evidente en los modelos de programación dinámica con cálculos tabulares, en los que la cantidad de renglones de cada cuadro corresponde a todas las combinaciones posibles de variables de estado. Esta dificultad computacional es tan evidente en la programación dinámica, que en las publicaciones se le llama **maldición de la dimensionalidad**.

El ejemplo que sigue se escogió para demostrar el *problema de la dimensionalidad.* También sirve para mostrar cómo se puede resolver un problema lineal con programación dinámica.

Ejemplo 10.4-1

Acme Manufacturing fabrica dos productos. La capacidad diaria del proceso de fabricación es de 430 minutos. El producto 1 requiere 2 minutos por unidad, y el producto 2 requiere 1 minuto por unidad. No hay límite para la cantidad fabricada del producto 1, pero la demanda máxima diaria para el producto 2 es de 230 unidades. La utilidad por unidad de producto 1 es de \$2, y para el producto 2 es de \$5. Determine la solución óptima con programación dinámica.

El problema se representa con el siguiente modelo lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 430 \\ x_2 &\leq 230 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Los elementos del modelo de programación dinámica son:

1. La *etapa i* corresponde al producto i, $i = 1, 2$.
2. La *alternativa* x_i es la cantidad del producto i, $i = 1, 2$.
3. El *estado* (v_2, w_2) representa las cantidades de los recursos 1 y 2 (tiempo de producción y límites de demanda) que se usan en la etapa 2.
4. El *estado* (v_1, w_1) representa las cantidades de recursos 1 y 2 (límites de tiempo de producción y de demanda) que se usan en las etapas 1 y 2.

Etapa 2. Se definirá a $f_2(v_2, w_2)$ como la utilidad máxima para la etapa 2 (producto 2), dado el estado (v_2, w_2). Entonces,

$$f_2(v_2, w_2) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq v_2 \\ 0 \leq x_2 \leq w_2}} \{5x_2\}$$

Así, máx $\{5x_2\}$ se presenta en $x_2 = \text{mín}\{v_2, w_2\}$, y la solución de la etapa 2 es

	Solución óptima	
Estado	$f_2(v_2, w_2)$	x_2
(v_2, w_2)	5 mín $\{v_2, w_2\}$	mín $\{v_2, w_2\}$

Etapa 1.

$$\begin{aligned} f_1(v_1, w_1) &= \max_{0 \leq 2x_1 \leq v_1} \{2x_1 + f_2(v_1 - 2x_1, w_1)\} \\ &= \max_{0 \leq 2x_1 \leq v_1} \{2x_1 + 5 \text{ mín}(v_1 - 2x_1, w_1)\} \end{aligned}$$

La optimización de la etapa 1 requiere resolver un problema de minimax, que por lo general es difícil. Para este problema se igualará $v_1 = 430$ y $w_1 = 230$, que da como resultado $0 \leq 2x_1 \leq 430$. Como $\text{mín}(430 - 2x_1, 230)$ es la envolvente inferior de las dos líneas que se cruzan (¡compruébelo!), entonces

$$\text{mín}(430 - 2x_1, 230) = \begin{cases} 230, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ 430 - 2x_1, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

y

$$f_1(430, 230) = \max_{x_1} \begin{cases} 2x_1 + 1150, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ -8x_1 + 2150, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

El lector puede comprobar en forma gráfica que el valor óptimo de $f_1(430, 230)$ está en $x_1 = 100$. Así llegamos a

	Solución óptima	
Estado	$f_1(v_1, w_1)$	x_1
(430, 230)	1350	100

Para determinar el valor óptimo de x_2 se observa que

$$v_2 = v_1 - 2x_1 = 430 - 200 = 230$$
$$w_2 = w_1 - 0 = 230$$

En consecuencia,

$$x_2 = \text{mín}(v_2, w_2) = 230$$

Así, la solución óptima completa se resume como sigue:

$$x_1 = 100 \text{ unidades}, \; x_2 = 230 \text{ unidades}, \; z = \$1350$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.4A

1. Resuelva los siguientes problemas con programación dinámica:

a) Maximizar $z = 4x_1 + 14x_2$
sujeto a

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) Maximizar $z = 8x_1 + 7x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

c) Maximizar $z = 7x^2 + 6x_1 + 5x_2^2$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. En el problema de la mochila con n artículos del ejemplo 10.3-1, suponga que las limitaciones de peso y volumen son W y V, respectivamente. Dadas w_i, v_i y r_i, el peso, el volumen y la utilidad por unidad del artículo i, escriba la ecuación recursiva en reversa del programa dinámico para este problema.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bertsekas, D., *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

Denardo, E., *Dynamic Programming Theory and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1982.

Dreyfus, S. y A. Law, *The art and Theory of Dynamic Programming,* Academic Press, Nueva York, 1977.

Sntedovich, M., *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Nueva York, 1991.

PROBLEMA INTEGRAL

10.1 Una empresa revisa el estado de su maquinaria pesada al final de cada año, y llega a la decisión de conservar el equipo un año más o reemplazarlo. Sin embargo, un equipo que ha estado en servicio durante 3 años se debe reemplazar. La empresa desea establecer una política de reemplazo durante los próximos 10 años. La tabla siguiente proporciona los datos pertinentes. El equipo es nuevo al iniciar el año 1.

Compra (año)	*Precio de compra ($)*	Costo de mantenimiento ($) para determinada antigüedad (años)			Valor de recuperación ($) para determinada antigüedad (años)		
		0	*1*	*2*	*1*	*2*	*3*
1	10,000	200	500	600	9000	7000	5000
2	12,000	250	600	680	11,000	9500	8000
3	13,000	280	550	600	12,000	11,000	10,000
4	13,500	320	650	700	12,000	11,500	11,000
5	13,800	350	590	630	12,000	11,800	11,200
6	14,200	390	620	700	12,500	12,000	11,200
7	14,800	410	600	620	13,500	12,900	11,900
8	15,200	430	670	700	14,000	13,200	12,000
9	15,500	450	700	730	15,500	14,500	13,800
10	16,000	500	710	720	15,800	15,000	14,500

CAPÍTULO 11

Modelos determinísticos de inventarios

Una empresa o una industria suele tener un inventario razonable de bienes para asegurar su funcionamiento continuo. En forma tradicional se considera a los inventarios como un mal necesario: si son muy pocos, causan costosas interrupciones; si son demasiados equivalen a tener un capital ocioso. El problema del inventario determina la cantidad que equilibra los dos casos extremos.

Un factor importante en la formulación y la solución de un modelo de inventario es que la demanda de un artículo (por unidad de tiempo) sea *determinística* (que se conozca con certidumbre) o *probabilística* (que se pueda describir con una distribución de probabilidad. Este capítulo está dedicada a la presentación de modelos determinísticos. Los modelos probabilísticos, por lo general más complejos, se describirán en el capítulo 16.

11.1 MODELO GENERAL DE INVENTARIO

La naturaleza del problema de los inventarios (o existencias) consiste en colocar y recibir en forma repetida pedidos (u "órdenes") de determinados tamaños a intervalos de tiempo establecidos. Desde este punto de vista, una **política de inventario** contesta las dos siguientes preguntas:

1. ¿*Cuánto* pedir?
2. ¿*Cuándo* pedir?

La respuesta de estas preguntas se basa en minimizar el siguiente modelo de costo:

$$\begin{pmatrix}\text{Costo total}\\\text{del}\\\text{inventario}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\\text{compra}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\\text{preparación}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\\text{almacenamiento}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\\text{faltante}\end{pmatrix}$$

Todos esos costos se deben expresar en la cantidad económica de pedido (¿cuánto pedir?) y el tiempo entre los pedidos (¿cuándo pedir?).

1. El *costo de compra* se basa en el precio por unidad del artículo. Puede ser constante, o puede ofrecerse con descuentos.
2. El *costo de preparación* representa el costo fijo incurrido cuando se coloca un pedido. Es independiente de la cantidad pedida.
3. El *costo de almacenamiento* o de posesión representa el costo de mantener una existencia de inventario. Comprende el interés sobre el capital y el costo de almacenamiento, mantenimiento y manejo.
4. El *costo de faltante* es la penalización en que se incurre cuando se terminan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos y el costo, más subjetivo, de pérdida de la buena voluntad del cliente.

Un sistema de inventario se puede basar en la **revisión periódica** (por ejemplo, pedir cada semana o cada mes), cuando se reciben nuevos pedidos al iniciar cada periodo. En forma alternativa, el sistema se puede basar en una **revisión continua**, cuando se colocan los nuevos pedidos y la cantidad de inventario baja hasta cierto nivel, que se llama **punto de reorden**.

Los modelos de inventario de este capítulo abarcan dos clases de modelos deterministas: estáticos y dinámicos. Los modelos estáticos tienen una demanda constante en función del tiempo. En los modelos dinámicos, la demanda cambia en función del tiempo. Los casos en los que la demanda es probabilística se explican en el capítulo 16.

11.2 MODELOS ESTÁTICOS DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO (CEP, O EOQ)

En esta sección se explican tres variaciones del modelo de cantidad económica de pedido (CEP, o EOQ, del inglés *economic order quantity*) con demanda estática.

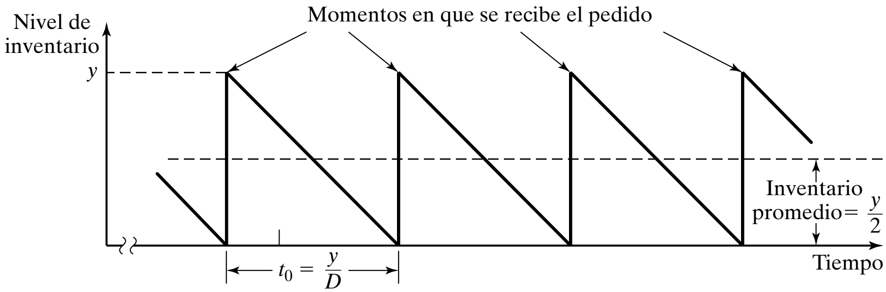
11.2.1 Modelo clásico de cantidad económica de pedido

El más sencillo de los modelos de inventario implica una tasa constante de demanda con el surtido instantáneo del pedido y sin faltante. Se definen

$$y = \text{Cantidad pedida (cantidad de unidades)}$$
$$D = \text{Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)}$$
$$t_0 = \text{Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)}$$

El nivel de inventario sigue el patrón de la figura 11.1. Cuando el inventario llega al valor cero, se coloca un pedido cuyo tamaño es y unidades, y se recibe en forma instantánea. Después,

FIGURA 11.1
Comportamiento del inventario en el modelo CEP, o EOQ clásico



la existencia se consume uniformemente a la tasa constante de demanda D. El ciclo de pedido para este comportamiento es

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

El nivel promedio de inventario que resulta es

$$\text{Nivel promedio de inventario} = \frac{y}{2} \text{ unidades}$$

El modelo de costo requiere dos parámetros:

K = Costo de preparación correspondiente a la colocación de un pedido ($/pedido)

h = Costo de almacenamiento ($ por unidad en inventario por unidad de tiempo)

El costo total *por unidad de tiempo* (TCU, de *total cost per unit time*) se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{TCU}(y) &= \text{Costo de preparación por unidad de tiempo} + \text{Costo de almacenamiento por unidad de tiempo} \\
&= \frac{\text{Costo de preparación} + \text{Costo de almacenamiento por ciclo } t_0}{t_0} \\
&= \frac{K + h\left(\frac{y}{2}\right)t_0}{t_0} \\
&= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right)
\end{aligned}$$

El valor óptimo de la cantidad de pedido y se determina minimizando TCU(y) con respecto a y. Suponiendo que y sea continua, una condición necesaria para determinar el valor óptimo de y es

$$\frac{d\text{TCU}(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0$$

Esta condición también es suficiente, porque TCU(y) es convexa.

La solución de la ecuación da como resultado la siguiente cantidad económica de pedido, y^*:

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Así, la política óptima de inventario para el modelo propuesto se resume como sigue:

$$\textit{Pedir } y^* = \sqrt{\tfrac{2KD}{h}} \textit{ unidades cada } t_0^* = \tfrac{y^*}{D} \textit{ unidades de tiempo}$$

En realidad, no se necesita hacer un nuevo pedido en el instante en que se pide, como se ha descrito aquí. En lugar de ello puede transcurrir un **tiempo de entrega** positivo, L, entre la colocación y la recepción de un pedido, como se ve en la figura 11.2. En este caso, el **punto de reorden** se presenta cuando el nivel de inventario baja a LD unidades.

En la figura 11.2 se supone que el tiempo de entrega L es menor que la longitud del ciclo t_0^*, lo cual en general no es el caso. Para tener en cuenta otras situaciones, se definirá el tiempo *efectivo* de entrega como sigue:

$$L_e = L - nt_0^*$$

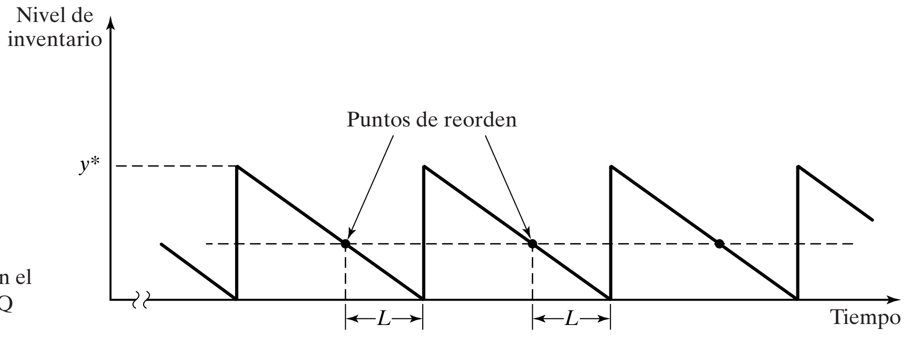


FIGURA 11.2
Punto de reorden en el modelo CEP, o EOQ clásico

donde n es el entero mayor no mayor que $\frac{L}{t_0^*}$. Este resultado se justifica, porque después de n ciclos de t_0^* cada uno, el estado del inventario es como si el intervalo entre colocar un pedido y recibir otro es L_e. Así, el punto de reorden está en las L_eD unidades, y la política de inventario se puede reenunciar como sigue:

Pedir la cantidad y^* siempre que la cantidad de inventario baja a L_eD unidades

---

Ejemplo 11.2-1

Se cambian luces de neón en el campus de la U de A a una tasa de 100 unidades diarias. Estas luces de neón se piden en forma periódica. Cuesta \$100 iniciar una orden de compra. Se estima que una luz de neón en el almacén cuesta unos \$0.02 diarios. El tiempo de entrega, entre la colocación y la recepción de un pedido es de 12 días. Determine la política óptima de inventario para pedir las luces de neón.

De acuerdo con los datos de este problema,

$$D = 100 \text{ unidades por día}$$
$$K = \$100 \text{ por pedido}$$
$$h = \$0.02 \text{ por unidad y por día}$$
$$L = 12 \text{ días}$$

Así,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times \$100 \times 100}{0.02}} = 1000 \text{ luces de neón}$$

La longitud del ciclo correspondiente es

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ días}$$

Como el tiempo de entrega $L = 12$ días es mayor que la longitud del ciclo t_0^* $(= 10$ días), se debe calcular L_e. La cantidad de ciclos incluidos en L es

$$n = (\text{Entero mayor} \leq \tfrac{L}{t_0^*})$$
$$= (\text{Entero mayor} \leq \tfrac{12}{10})$$
$$= 1$$

Entonces

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \times 10 = 2 \text{ días}$$

Entonces, el punto de reorden se presenta cuando la cantidad de inventario baja a

$$L_eD = 2 \times 100 = 200 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario para pedir las luces de neón es

Pedir 1000 unidades cuando el inventario baja a 200 unidades

El costo diario de inventario correspondiente a la política propuesta es

$$\text{TCU}(y) = \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\tfrac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{\$100}{\left(\frac{1000}{100}\right)} + \$0.02\left(\tfrac{1000}{2}\right) = \$20 \text{ por día}$$

Solución de cantidad económica de pedido en hoja de cálculo. El modelo ch11EOQ.xls de Excel está diseñado para efectuar cálculos de CEP, o EOQ. Ese modelo resuelve el problema general de cantidad económica de pedido que se describe en el problema 9, conjunto 11.2a, del cual un caso especial es el modelo que se describió arriba. El uso del archivo ch11EOQ.xls se demuestra en el ejemplo 11.2-2 (Sección 11.2.2), porque esa hoja de cálculo también es para el caso de discontinuidades en el precio. Para usar la plantilla con el modelo actual, se escribe –1 en las celdas C3:C5, C8 y C10, para indicar que los datos correspondientes no se aplican.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.2A

1. En cada uno de los siguientes casos no se permiten faltantes, y los tiempos de retraso entre la colocación y la recepción de un pedido son 30 días. Determine la política óptima de inventario y el costo diario correspondiente.
   a) $K = \$100,\ h = \$0.05,\ D = 30$ unidades diarias
   b) $K = \$50,\ h = \$0.05,\ D = 30$ unidades diarias
   c) $K = \$100,\ h = \$0.01,\ D = 40$ unidades diarias
   d) $K = \$100,\ h = \$0.04,\ D = 20$ unidades diarias
2. McBurger pide carne molida al comenzar cada semana, para cubrir la demanda semanal de 300 lb. El costo fijo por pedido es de $20. Cuesta unos $0.03 por libra y por día refrigerar y almacenar la carne.
   a) Determine el costo semanal de inventario para la política actual de pedidos.
   b) Determine la política óptima de inventario que debería usar McBurger, suponiendo tiempo de entrega cero entre la colocación y la recepción de un pedido.
   c) Determine la diferencia de costos semanales entre las políticas actual y óptima de pedidos.
3. Una empresa almacena un artículo que se consume a una tasa de 50 unidades diarias. Le cuesta $20 colocar un pedido. Una unidad de inventario en almacén durante una semana costará $0.35.
   a) Determine la política óptima de inventario, suponiendo 1 semana de tiempo de entrega.
   b) Determine la cantidad óptima de pedidos en un año de 365 días.

4. El departamento de compras de una empresa propuso dos políticas de inventario:

Política 1. Pedir 150 unidades. El punto de reorden es de 50 unidades, y el tiempo entre la colocación de un pedido y la recepción del siguiente es de 10 días.

Política 2. Pedir 200 unidades. El punto de reorden es de 75 unidades y el tiempo entre la colocación de un pedido y la recepción del siguiente es de 15 días.

El costo de preparación por pedido es de $20, y el costo de almacenamiento por unidad de inventario y por día es de $0.02.

a) ¿Cuál de las dos políticas debería adoptar la empresa?

b) Si a usted le encargaran diseñar una política de inventario para la empresa, ¿qué recomendaría suponiendo que el proveedor necesita un tiempo de entrega de 22 días?

5. Walmark Store comprime y entarima cajas de mercancía, para reciclarlas. En los almacenes se generan cinco tarimas diarias. El costo de almacenar una tarima en el patio trasero es de $0.10 por día. La empresa que se lleva las tarimas al centro de reciclado cobra una tarifa uniforme de $100 por la renta de su equipo de carga y un costo variable de transporte de $3 por tarima. Haga una gráfica del cambio de cantidad de tarimas en función del tiempo y proponga una política óptima para llevar las tarimas al centro de reciclado.

6. Un hotel usa servicio externo de lavandería, para contar con toallas limpias para los huéspedes. Se generan 600 toallas sucias por día. El servicio de lavandería recoge las toallas sucias y las cambia por limpias, a intervalos regulares. La tarifa de este servicio es de $81 fijos por cada servicio de recogida y entrega, y $0.60 por lavar cada toalla. Al hotel le cuesta $0.02 diarios guardar cada toalla sucia, y $0.01 guardar cada toalla limpia. ¿Con qué frecuencia debe pedir el hotel el servicio de lavandería? (*Sugerencia:* hay dos clases de artículos de inventario, en este caso. Cuando aumenta la cantidad de toallas sucias, la cantidad de toallas limpias disminuye a una tasa igual.)

7. Se tiene el caso de un inventario en el que la existencia se reabastece uniformemente (no instantáneamente) a la tasa a. El consumo sucede a la tasa constante D. Como el consumo también se presenta durante el periodo de reabastecimiento, es necesario que $a > D$. El costo de preparación es K por pedido, y el costo de almacenamiento es h por unidad y por unidad de tiempo. Si y es el tamaño del pedido y no se permiten faltantes, demuestre que los siguientes resultados son válidos:

a) El nivel máximo de inventario es $y(1 - \frac{D}{a})$.

b) El costo total y por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y) = \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{D}{a}\right)y$$

c) La cantidad económica de pedido es

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h(1 - \frac{D}{a})}},\ D < a$$

d) Demuestre que la CEP, o EOQ con reposición instantánea se puede deducir de la fórmula del punto c).

8. Una empresa puede producir un artículo o comprarlo a un contratista. Si lo produce le costará $20 cada vez que prepare sus máquinas. La tasa de producción es 100 unidades diarias. Si lo compra a un contratista le costará $15 colocar un pedido. El costo de mantener el artículo en existencia, sea producido o comprado, es de $0.02 por unidad y por día. El consumo estimado de ese artículo por la empresa es de 26,000 unidades anuales. Suponiendo que no se permiten los faltantes, la empresa ¿lo debe producir o lo debe comprar?

9. En el problema 7 suponga además que se permiten los faltantes y que el costo de faltante por unidad y por unidad de tiempo es p. Si w es el faltante máximo, demuestre que son válidos los resultados siguientes:

$$\text{TCU}(y, w) = \frac{KD}{y} + \frac{h\{y(1 - \frac{D}{a}) - w\}^2 + pw^2}{2(1 - \frac{D}{a})y}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD(p + h)}{ph(1 - \frac{D}{a})}}$$

$$w^* = \sqrt{\frac{2KDh(1 - \frac{D}{a})}{p(p + h)}}$$

11.2.2 Cantidad económica de pedido con discontinuidades de precio

Este modelo es el mismo de la sección 11.2.1, con la excepción de que el artículo en inventario se puede comprar con descuento si el tamaño del pedido y es mayor que determinado límite q; esto es, que el precio unitario de compra c es

$$c = \begin{Bmatrix} c_1, \text{ si } y \leq q \\ c_2, \text{ si } y > q \end{Bmatrix}, c_1 > c_2$$

Por consiguiente

$$\text{Precio de compra por unidad de tiempo} = \begin{cases} \dfrac{c_1 y}{t_0} = \dfrac{c_1 y}{(\frac{y}{D})} = Dc_1, \ y \leq q \\ \dfrac{c_2 y}{t_0} = \dfrac{c_2 y}{(\frac{y}{D})} = Dc_2, \ y > q \end{cases}$$

Al usar la notación de la sección 11.2.1, el costo total por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y) = \begin{cases} \text{TCU}_1(y) = Dc_1 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{h}{2}y, \ y \leq q \\ \text{TCU}_2(y) = Dc_2 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{h}{2}y, \ y > q \end{cases}$$

Las funciones TCU_1 y TCU_2 se grafican en la figura 11.3. Como las dos funciones sólo difieren en una cantidad constante, sus mínimos se presentan en

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

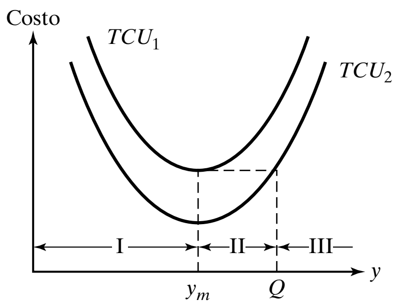


FIGURA 11.3

Función de costo de inventario con discontinuidades en el precio

La función de costo TCU(y) comienza a la izquierda, con TCU$_1$(y) y baja hasta TCU$_2$(y) en el punto de discontinuidad de precio q. La figura 11.3 muestra que la determinación de la cantidad económica de pedido y^* depende de dónde está el punto de discontinuidad de precio q con respecto a las zonas I, II y III, limitadas por $(0, y_m)$, (y_m, Q) y (Q, ∞), respectivamente. El valor de $Q\ (> y_m)$ se determina con la ecuación

$$\text{TCU}_2(Q) = \text{TCU}_1(y_m)$$

o sea

$$c_2D + \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} = \text{TCU}_1(y_m)$$

Esto reduce la ecuación de Q a

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2D - \text{TCU}_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

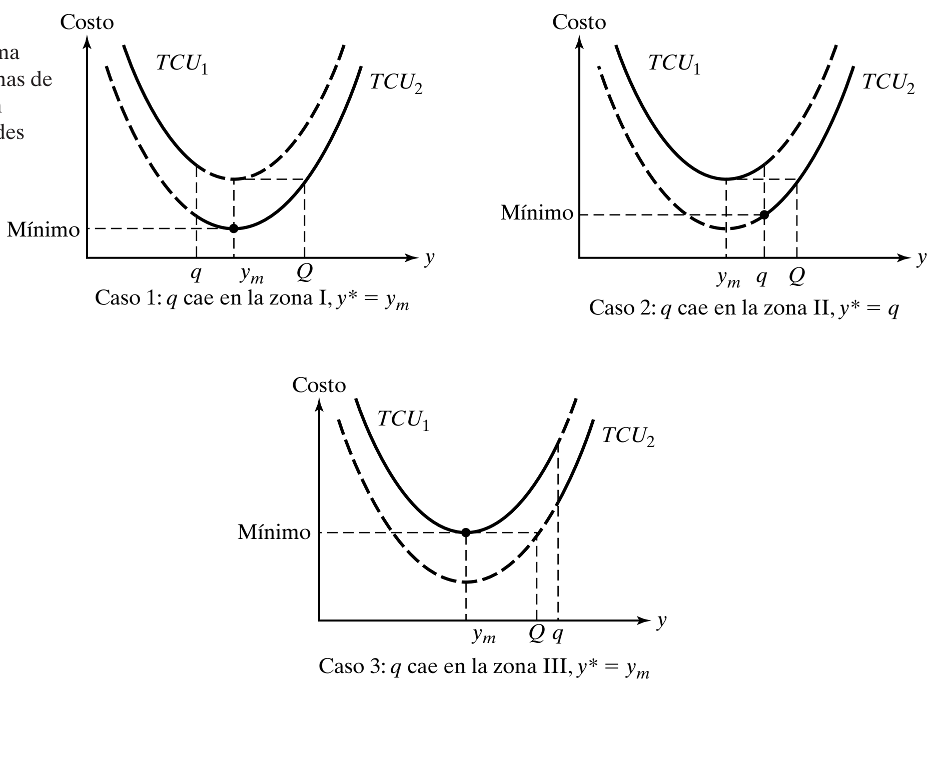
La figura 11.4 muestra cómo se determina la cantidad óptima y^* que se busca:

$$y^* = \begin{cases} y_m, & \text{si } q \text{ está en las zonas I o III} \\ q, & \text{si } q \text{ está en la zona II} \end{cases}$$

Los pasos para determinar y^* son

Paso 1. Determinar $y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$. Si q está en la zona I, entonces $y^* = y_m$; detenerse. En caso contrario continuar en el paso 2.

FIGURA 11.4
Solución óptima de los problemas de inventario con discontinuidades en el precio



Paso 2. Determinar Q ($> y_m$) con la ecuación de Q:

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2D - \text{TCU}_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

Definir las zonas II y III. Si q está en la zona II, entonces $y^* = q$. En caso contrario, q está en la zona III y $y^* = y_m$.

Ejemplo 11.2-2

LubeCar se especializa en cambios rápidos de aceite para motor de automóvil. El servicio compra aceite para motor a granel, a \$3 por galón. Si LubeCar compra más de 100 galones, obtiene un descuento de \$2.50 por galón. En el servicio se atienden unos 150 autos diarios, y cada cambio de aceite requiere de 1.25 galones. LubeCar guarda el aceite a granel con un costo de \$0.02 por galón y por día. También, el costo de colocar un pedido de aceite a granel es de \$20. Hay un tiempo de 2 días para la entrega. Determine la política óptima de inventario.

El consumo diario de aceite es

$$D = 150 \text{ automóviles por día} \times 1.25 \text{ galones por automóvil} = 187.5 \text{ galones por día}$$

También los datos son

$$\begin{aligned} h &= \$0.02 \text{ por galón por día} \\ K &= \$20 \text{ por pedido} \\ L &= 2 \text{ días} \\ c_1 &= \$3 \text{ por galón} \\ c_2 &= \$2.50 \text{ por galón} \\ q &= 1000 \text{ galones} \end{aligned}$$

Paso 1. Calcular

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 187.5}{0.02}} = 612.37 \text{ galones}$$

Como $q = 100$ es mayor que y_m, continuamos en el paso 2.

Paso 2. Determinar Q

$$\begin{aligned} \text{TCU}(y_m) &= c_1D + \frac{KD}{y_m} + \frac{hy_m}{2} \\ &= 3 \times 187.5 + \frac{20 \times 187.5}{612.37} + \frac{0.02 \times 612.37}{2} \\ &= 574.75 \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación de Q se calcula como sigue:

$$Q^2 + \left(\frac{2 \times (2.5 \times 187.5 - 574.75)}{0.02}\right)Q + \frac{2 \times 20 \times 187.5}{0.02} = 0$$

o sea

$$Q^2 - 10599.74Q + 375000 = 0$$

El resultado de esto es $Q = 10564.25 (> y_m)$. Entonces,

$$\text{Zona II} = (612.37,\ 10564.25)$$

$$\text{Zona III} = (10564.25,\ \infty)$$

Como q (= 1000) cae en la zona II, la cantidad óptima de pedido es $y^* = q = 1000$ galones.

Como el tiempo de entrega es de 2 días, el punto de reorden es $2D = 2 \times 187.5 = 375$ galones. Así, la política de inventario óptimo es

Pedir 1000 galones cuando el nivel de inventario baja a 375 galones

---

Solución de cantidad económica de pedido en hoja de cálculo. La plantilla ch11EOQ.xls de Excel está diseñada para manejar el problema general de cantidad económica de pedido que se describió en el problema 9, conjunto 11.2a, cuando se permiten tasa uniforme de producción y faltante. También resuelve el caso de discontinuidades en el precio, que se describió arriba.

La figura 11.5 muestra la aplicación del modelo al problema de discontinuidades de precio del ejemplo 11.2-2. El uso del modelo es directo. Se capturan los datos del modelo en la sección de entrada de datos (C3:C11). Se requiere anotar –1 en la casilla si no se aplica un

FIGURA 11.5

Solución del ejemplo 11.2-2 (CEP, o EOQ con discontinuidades en el precio) con Excel

	B	C	D
1	Generalized Economic Order Quantity (EOQ)		
2	**Input data:** Enter -1 in column C if data element is not applicable to your model		
3	Item cost, c1 =	3	
4	Qty discount limit, q =	1000	
5	Item cost, c2 =	2.5	
6	Setup cost, K =	20	
7	Demand rate, D =	187.5	
8	Production rate, a =	-1	
9	Unit holding cost, h =	0.02	
10	Unit penalty cost, p =	-1	
11	Lead time, L =	2	
12	**Model output results:**		
13	Order qty, y* =	1000.00	
14	Shortage qty, w* =	0.00	
15	Reorder point, R =	375.00	
16	TCU(y*) =	482.50	
17	Purchase/prod. Cost =	468.75	
18	Setup cost/unit time =	3.75	
19	Holding cost /unit time =	10.00	
20	shortage cost/unit time =	0.00	
21	Optimal inventory policy: Order 1000.00 units whenever level drops to 375.00 units		
22	**Model intermediate calculations:**		
23	ym =	612.37	
24	TCU1(ym)=	574.75	
25	Q-equation:	Q**2 - 10599.7449*Q + 375000.0000 = 0	
26	Q =	10564.25	
27	cycle length, t0 =	5.33	
28	Optimization zone =	II	
29	Effectice lead time, Le =	2.00	

elemento de dato al modelo. Por ejemplo, para resolver modelos CEP, o EOQ sin discontinuidades de precio, se escribe –1 como C_1, q y c_2 (celdas C3:C5). El sistema muestra los mensajes correspondientes de error para resolver conflictos entre datos. El resultado del modelo muestra la política óptima de inventario y también los cálculos intermedios del problema.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.2B

1. Se tiene el caso del servicio de lavandería del hotel, del problema 6, conjunto de problemas 11.2a. La tarifa normal por lavar una toalla sucia es de \$0.60, pero el servicio de lavandería sólo cobra \$0.50 si el hotel les manda un mínimo de 2500 toallas. ¿Debe aprovechar el hotel ese descuento?

2. Un artículo se consume con la tasa de 30 unidades diarias. El costo de almacenamiento por unidad y por día es de \$0.05 y el costo de preparación es de \$100. Suponga que no se permite la faltante y que el costo de compra por unidad es de \$10 por cualquier cantidad menor de 500 unidades, y de \$8 en caso contrario.

a) Determine la política de inventario óptimo cuando el tiempo de entrega es de 21 días.

b) Use la hoja de cálculo ch11EOQ.xls para resolver el problema.

3. Un artículo se vende en \$25 por unidad, pero se ofrece un descuento en lotes de 150 unidades o más. Una empresa usa este artículo, con una tasa de 20 unidades diarias. El costo de preparación para pedir un lote es de \$50, y el costo de almacenamiento por unidad y por día es de \$0.30. ¿Debe aprovechar la empresa el descuento?

4. En el problema 3, determine el intervalo de porcentaje de descuento de precio que, cuando se ofrezca con lotes de 150 unidades o más no cause ventaja financiera alguna a la empresa.

5. En el modelo de inventario descrito en esta sección, suponga que el costo de almacenamiento por unidad y por unidad de tiempo es h_1 para cantidades menores que q y h_2 en caso contrario; $h_1 > h_2$. Indique cómo determinar el tamaño económico de lote.

11.2.3 Cantidad económica de pedido de varios artículos con limitación de almacén

Este modelo se aplica al caso con n ($>$ 1) artículos cuyo inventario individual fluctúa de acuerdo con la pauta de la figura 11.1 (no se permiten faltantes). La diferencia está en que los artículos compiten por un espacio limitado de almacenamiento.

Se definirán, para el artículo i, $i = 1, 2, ..., n$:

D_i = Tasa de demanda
K_i = Costo de preparación
h_i = Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo
y_i = Cantidad de pedido
a_i = Área de almacenamiento necesaria por unidad de inventario
A = Área máxima disponible de almacenamiento para los n artículos

Suponiendo que no hay faltantes, el modelo matemático que representa la situación del inventario es

$$\text{Minimizar TCU}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right)$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leq A$$

$$y_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Los pasos para resolver el problema son los siguientes.

Paso 1. Calcular los valores óptimos *no restringidos* de las cantidades de pedido con:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i}},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Paso 2. Comprobar si los valores óptimos no restringidos y_i^* satisfacen la restricción de almacenamiento. Si la satisfacen, detenerse; la solución y_i^*, $i = 1, 2, ..., n$ es óptima. En caso contrario seguir en el paso 3.

Paso 3. Se debe satisfacer la restricción del almacenamiento en forma de ecuación. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores restringidos óptimos de las cantidades de pedido.

En el paso 3, la función de Lagrange se formula como sigue:

$$L(\lambda, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{TCU}(y_1, y_2, \ldots, y_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_iD_i}{y_i} + \frac{h_iy_i}{2}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right)$$

donde $\lambda(< 0)$ es el multiplicador de Lagrange.[1]

Como la función de Lagrange es convexa, los valores óptimos de y_i y λ se determinan con la siguiente condición necesaria:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_iD_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + A = 0$$

La segunda ecuación indica que se debe satisfacer la restricción en forma de ecuación para el óptimo.

De la primera ecuación,

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i - 2\lambda^* a_i}}$$

La fórmula indica que y_i^* depende del valor de λ^*. Para $\lambda^* = 0$, y_i^* da la solución sin restricción.

[1]Véanse los detalles del método de Lagrange en la sección 20.1.1. La aplicación del método es correcta en este caso, porque $\text{TCU}(y_1, y_2, ..., y_n)$ es convexa y el problema tiene una sola restricción lineal; por consiguiente su espacio de soluciones es convexo. Puede suceder que el procedimiento no sea correcto bajo otras condiciones, o cuando el problema tenga más de una restricción, como se explica en la sección 20.1.2.

El valor de λ^* se puede determinar como sigue: como por definición $\lambda < 0$ para el caso de minimización, se disminuye λ en forma sucesiva una cantidad razonablemente pequeña, y se sustituye en la fórmula para calcular la y_i^* asociada. La λ^* deseada produce los valores de y_i^* que satisfacen la restricción de almacenamiento en forma de ecuación.

Ejemplo 11.2-3

Los datos siguientes describen tres artículos de inventario:

Artículo i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)	a_i(ft^2)
1	10	2	0.30	1
2	5	4	0.10	1
3	15	4	0.20	1
Área total disponible para almacenamiento = 25 pies^2				

Los cálculos asociados con el modelo son sencillos, pero tediosos. Se proporciona la plantilla de hoja de cálculo ch11ConstrainedEOQ.xls para subsanar esta dificultad.

La figura 11.6 muestra la aplicación de la plantilla a los datos de este ejemplo. La sección de datos contiene todos los parámetros necesarios para todos los artículos. El valor inicial de λ (*Initial Lambda*, lambda inicial) se suele igualar a cero, y el decremento de λ (*Lambda decrement*) se establece en un valor razonable. Estos valores iniciales se pueden ajustar para asegurar cualquier grado de exactitud en los cálculos, como se explicará en breve. La plantilla puede manejar un máximo de 10 artículos. También está diseñada para aceptar problemas en los que la restricción tiene la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{y_i} \leq A$$

Esta clase de restricción puede surgir en otras situaciones, como se ve en el problema 4, conjunto 11.2c. Para usar esta opción debe poner 1 en la celda G4 de la plantilla.

	B	C	D	E	F	G	M
1	Constrained multi-item EOQ -- [sum(ay)<A or sum(a/y)<A]						
2	Input data:						
3	Nbr. of items =	3	<<(maximum 10)				
4	Constraint RHS, A =	25	Enter 0 if sum(ay), 1 if sum(a/y)			0	
5		Item1	Item2	Item3			
6	Setup cost, K =	10	5	15			
7	Demand rate, D =	2	4	4			
8	Holding cost, h =	0.3	0.1	0.2			
9	Parameter, a =	1	1	1			
10	Initial λ =	0					
11	λ decrement =	0.1					
12	Output:						
13	Calculations:	Last row gives the approximate optimum					
14	λ	y1	y2	y3			sum(ay) - A
15	0.000000	11.55	20.00	24.49			31.04
16	-0.100000	8.94	11.55	17.32			12.81
17	-0.200000	7.56	8.94	14.14			5.65
18	-0.300000	6.67	7.56	12.25			1.47
19	-0.400000	6.03	6.67	10.95			-1.35

FIGURA 11.6

Solución del modelo de almacenamiento del ejemplo 11.2-3, con Excel

La última columna de la figura 11.6 muestra que la ecuación de almacenamiento se satisface en algún punto del intervalo $-0.3 > \lambda > -0.4$. La hoja de Excel puede refinar la respuesta a cualquier exactitud que se desee, del siguiente modo: cambie el valor de λ inicial (celda C10) a -0.3 y especifique un decremento menor de lamda (celda C11), digamos 0.05. Ahora ejecute el modelo y revise λ inicial y el decremento. Repita el proceso, actualizando λ inicial y seleccionando un decremento menor de λ hasta obtener la exactitud que se desee. Yo hice la prueba con este procedimiento y pude refinar la búsqueda hasta λ inicial $= -0.03475$ y decremento de $= 0.0005$. En $\lambda^* = -0.348$, la ecuación cerraba casi a cero. Los valores correspondientes de las cantidades de pedido son

$$y_1^* \approx 6.34 \text{ unidades}, \; y_2^* \approx 7.09 \text{ unidades}, \; y_3^* \approx 11.57 \text{ unidades}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.2C[2]

1. Los datos siguientes describen cinco artículos de inventario.

Artículo i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)	a_i(pie^2)
1	20	22	0.35	1.0
2	25	34	0.15	0.8
3	30	14	0.28	1.1
4	28	21	0.30	0.5
5	35	26	0.42	1.2
Área total disponible para almacenamiento = 25 pies^2				

Determine las cantidades óptimas de pedido.

2. Resuelva el modelo del ejemplo 11.2-3, suponiendo que se requiere que la suma de los inventarios promedio para todos los artículos sea menor que 25 unidades.

3. En el problema 2, suponga que la única restricción es un límite de \$1000 en el capital que se puede invertir en el inventario. Los costos de compra de los artículos 1, 2 y 3, por unidad, son de \$100, \$50 y \$100, respectivamente. Determine la solución óptima.

4. Los datos siguientes describen cuatro artículos de inventario.

Artículo i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)
1	100	10	0.1
2	50	20	0.2
3	90	5	0.2
4	20	10	0.1

La empresa desea determinar la cantidad económica de pedido para cada uno de los cuatro artículos, de tal modo que la cantidad total de pedidos por año (de 365 días) sea 150, cuando mucho. Formule la función de Lagrange y deduzca las fórmulas necesarias. A continuación use ch11ConstrainedEOQ.xls para resolver el problema.

5. Use las ecuaciones de derivadas parciales del modelo de inventario en esta sección para demostrar que el valor inicial de la λ óptima se puede aproximar por:

[2]Podrá usted aprovechar ch11StorageEOQ.xls para resolver los problemas de este conjunto.

$$\lambda^* \approx \frac{\overline{h}}{2\overline{a}} - \frac{n^2\overline{a}\,\overline{KD}}{A^2}$$

en donde

$$\overline{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i}{n},\ \overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},\ \overline{KD} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i D_i}{n}$$

11.3 MODELOS DINÁMICOS DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO

Los modelos que aquí se presentan difieren de los de la sección 11.2 en dos aspectos: 1) el nivel de inventario se revisa en forma periódica durante una cantidad finita de periodos iguales, y 2) la demanda por periodo, aunque es determinista, es dinámica en el sentido que puede variar de un periodo al siguiente.

Un caso en el que se presenta la demanda dinámica determinista es el de la **planeación de los requerimientos de materiales** (MRP, del inglés *materials requirement planning*). El concepto de la MRP se describirá con un ejemplo. Suponga que la demanda trimestral de dos modelos $M1$ y $M2$ de un producto, durante el próximo año, es de 100 y 150 unidades, respectivamente. Las entregas de los lotes trimestrales se hacen al final de cada trimestre. El tiempo de entrega de la producción es de 2 meses para $M1$ y de 1 mes para $M2$. Cada unidad de $M1$ y $M2$ usa 2 unidades del subensamble S. El tiempo de entrega de la producción de S es de 1 mes.

La figura 11.7 representa los calendarios de producción de $M1$ y $M2$. Comienzan con la demanda trimestral de los dos modelos (indicada por las flechas llenas) al final de los meses

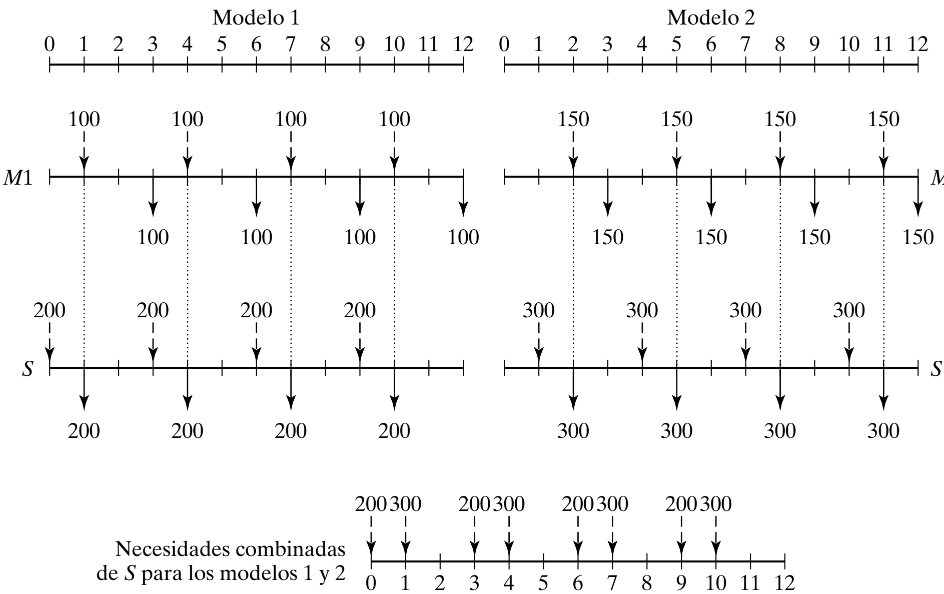


FIGURA 11.7

Ejemplo de la demanda dinámica generada por MRP

3, 6, 9 y 12. Como los tiempos de retraso para *M*1 y *M*2 son de 2 y 1 meses, las flechas interrumpidas indican los inicios planeados de cada lote de producción.

Para iniciar a tiempo la producción de los dos modelos, la entrega del subensamble *S* debe coincidir con las flechas de línea intermitente *M*1 y *M*2. Esta información se indica con las flechas de línea continua del diagrama *S*, donde la demanda resultante de *S* es 2 unidades por unidad de *M*1 o de *M*2. Con un tiempo de entrega de 1 mes, las flechas de línea intermitente del diagrama *S* indican los programas de producción de *S*. A partir de esos dos programas, la demanda combinada de *S* que corresponde a *M*1 y *M*2 se puede determinar entonces como se ve en la parte inferior de la figura 11.7. La demanda *variable* (pero conocida) que resulta para *S* es característica de la situación en el que se tiene cantidad económica de pedido dinámico. En esencia, dada la demanda variable indicada de *S*, ¿cuánto se debe producir al iniciar cada mes para reducir el costo total de producción e inventario?

En esta sección se presentarán dos modelos. En el primero se supone que no hay costo de preparación (de pedido) y en el segundo que sí hay. Este detalle aparentemente "pequeño" determina la diferencia en la complejidad del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3A

1. En la figura 11.7 determine las necesidades combinadas del subensamble *S* en cada uno de los casos siguientes:
   a) El tiempo de entrega para *M*1 sólo es un periodo.
   b) El tiempo de entrega para *M*1 es tres periodos.

11.3.1 Modelo sin costo de preparación

En este modelo interviene un horizonte de planeación con *n* periodos iguales. Cada periodo tiene una capacidad de producción limitada que puede incluir varios niveles de producción (por ejemplo, tiempo normal y tiempo extra representan dos niveles de producción). En determinado momento, un periodo puede producir más que la demanda inmediata del producto, apartándolo para periodos posteriores, y en ese caso se incurre en un costo de almacenamiento.

Los supuestos generales del modelo son

1. No se incurre costo de preparación en ningún periodo.
2. No se permiten faltantes.
3. La función de costo unitario de producción en cualquier periodo es constante o tiene costos marginales crecientes (es decir, es convexa).
4. El costo unitario de almacenamiento en cualquier periodo es constante.

El no permitirse faltantes significa que si la producción en el periodo actual y el inventario no satisfacen la demanda de este periodo no se podrá completar esta demanda en un periodo futuro. Este supuesto requiere que la capacidad acumulada de producción en los periodos 1, 2, ..., e *i* sea al menos igual a la demanda acumulada, en estos mismos periodos.

La figura 11.8 ilustra la función de costo unitario de producción con márgenes crecientes. Por ejemplo, la producción con tiempo normal y con tiempo extra corresponde a dos niveles en los que el costo unitario de producción durante el tiempo extra es mayor que durante el tiempo normal.

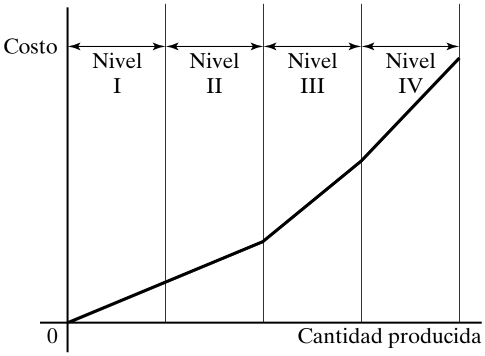


FIGURA 11.8
Función convexa de costo unitario de producción

El problema de n periodos se puede formular como un modelo de transporte (véase el capítulo 5) con kn fuentes y n destinos, donde k es la cantidad de niveles de producción por periodo (es decir, si cada periodo usa tiempo normal y tiempo extra, entonces $k = 2$). La capacidad de producción de cada uno de las kn fuentes de nivel de producción proporciona las cantidades de oferta. Las cantidades de demanda son la demanda de cada periodo. El costo unitario de "transporte" de una fuente a un destino es la suma de los costos aplicables de producción y almacenamiento por unidad. La solución del problema como modelo de transporte determina las cantidades de producción con costo mínimo, en cada nivel de producción.

El modelo de transporte que se obtiene se puede resolver sin recurrir a la técnica familiar de transporte que se presentó en el capítulo 5. La validez del nuevo algoritmo de solución se basa en las suposiciones especiales de que no hay faltantes y de una función convexa de producción en función de costo.

Ejemplo 11.3-1

Metalco produce compuertas de tiro para chimeneas domésticas, que se usan durante los meses de diciembre a marzo. La demanda comienza lenta, llega a un máximo a la mitad de la estación y desaparece al final. Debido a la popularidad de su producto, Metalco puede usar tiempo extra para satisfacer la demanda. La tabla siguiente muestra las capacidades de producción y las demandas en los cuatro meses invernales.

	Capacidad		
Mes	*Normal (unidades)*	*Extra (unidades)*	*Demanda (unidades)*
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

El costo unitario de producción en cualquier periodo es de \$6 durante el tiempo normal y de \$9 durante el tiempo extra. El costo mensual de almacenamiento es de \$0.10 por unidad.

Para asegurar que el modelo tenga una solución factible cuando no se permite faltantes, la oferta acumulada (capacidad de producción) hasta determinado mes debe ser igual cuando menos a la demanda acumulada correspondiente, como se ve en la siguiente tabla:

Mes	Oferta acumulada	Demanda acumulada
1	90 + 50 = 140	100
2	140 + 100 + 60 = 300	100 + 190 = 290
3	300 + 120 + 80 = 500	290 + 210 = 500
4	500 + 110 + 70 = 680	500 + 160 = 660

En la tabla 11.1 se resume el modelo y su solución. Los símbolos R_i y O_i representan los niveles de producción en tiempo normal y en tiempo extra, en el periodo i, $i = 1, 2, 3, 4$. Como la oferta acumulada en el periodo 4 es mayor que la demanda acumulada, se agrega un destino ficticio de sobrante para balancear el modelo, como muestra la tabla 11.1. Todas las rutas de "transporte" desde un periodo anterior al actual se bloquean, porque no se permiten faltantes.

Los costos unitarios de "transporte" son la suma de los costos aplicables de producción y almacenamiento. Por ejemplo, el costo unitario de R_1 al periodo 1 es igual sólo al costo de producción, \$6. El costo unitario de O_1 al periodo 4 es igual al costo de producción más el costo unitario de almacenamiento desde el periodo 1 al 4, es decir, \$9 + (\$0.1 + \$0.1 + \$0.1) = \$9.30. Por último, los costos unitarios del destino del *excedente* son cero.

TABLA 11.1

	1	2	3	4	Excelente	
R_1	6 **90**	6.1	6.2	6.3	0	**90**
O_1	9 **10**	9.1 **30**	9.2 **10**	9.3	0	**50 → 40 → 10**
R_2		6 **100**	6.1	6.2	0	**100**
O_2		9 **60**	9.1	9.2	0	**60**
R_3			6 **120**	6.1	0	**120**
O_3			9 **80**	9.1	0	**80**
R_4				6 **110**	0	**110**
O_4				9 **50**	0 **20**	**70 → 20**
	100 ↓ 10	**190 ↓ 90 ↓ 30**	**210 ↓ 90 ↓ 10**	**160 ↓ 50**	**20**	

La solución óptima se obtiene en una pasada, comenzando en la columna 1 y avanzando columna por columna hacia la columna del *excedente*. Para cada columna, se satisface la demanda usando las rutas menos costosas de esa columna.[3]

Comenzando con la columna 1, la ruta (R_1, 1) tiene el costo unitario menor, y se le asigna lo máximo posible, que son, $\text{mín}\{90, 100\} = 90$ unidades, con lo que quedan 10 unidades no satisfechas en la columna 1. La siguiente ruta menos costosa de la columna 1 es (O_1, 1), a la cual se le asigna el $\text{mín}\{50, 10\} = 10$. Queda ahora satisfecha la demanda para el periodo 1.

A continuación pasamos a la columna 2. Las asignaciones en esta columna se presentan en el orden siguiente: 100 unidades a (R_2, 2), 60 unidades a (O_2, 2) y 30 unidades a (O_1, 2). Los costos unitarios respectivos de "transporte" de esas asignaciones son \$6, \$9 y \$9.10. No usamos la ruta (R_1, 2), cuyo costo unitario es \$6.10, porque toda la oferta de R_1 se ha asignado al periodo 1.

Al continuar de la misma manera se satisfacen las demandas de la columna 3 y después de la columna 4. La solución óptima, que se ve en negritas en la tabla 11.1, se resume como sigue:

Periodo	Programa de producción
Normal 1	Producir 90 unidades para el periodo 1.
Tiempo extra 1	Producir 10 unidades para el periodo 1, 30 para el 2 y 10 para el 3.
Normal 2	Producir 100 unidades para el periodo 2.
Tiempo extra 2	Producir 60 unidades para el periodo 2.
Normal 3	Producir 120 unidades para el periodo 3.
Tiempo extra 3	Producir 80 unidades para el periodo 3.
Normal 4	Producir 110 unidades para el periodo 4.
Tiempo extra 4	Producir 50 unidades para el periodo 4 con 20 unidades de capacidad ociosa.

El costo total correspondiente es $90 \times \$6 + 10 \times \$9 + 30 \times \$9.10 + 100 \times \$6 + 60 \times \$9 + 10 \times \$9.20 + 120 \times \$6 + 80 \times \$9 + 110 \times \$6 + 50 \times \$9 = \$4685$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3B

1. Resuelva el ejemplo 11.3-1, suponiendo que los costos unitarios de producción y de almacenamiento son los de la siguiente tabla.

Periodo i	Costo unitario en tiempo normal (\$)	Costo unitario en tiempo extra (\$)	Costo unitario de almacenamiento (\$) para el periodo $i + 1$
1	5.00	7.50	0.10
2	3.00	4.50	0.15
3	4.00	6.00	0.12
4	1.00	1.50	0.20

[3]Véase la demostración de la optimalidad de este procedimiento en S. M. Johnson, "Sequential Production Planning over Time at Minimum Cost", *Management Science*, vol. 3, págs. 435-437, 1957.

2. Se fabrica un artículo para satisfacer la demanda conocida de cuatro periodos, de acuerdo con los datos siguientes:

	Costo unitario de producción ($) para el periodo			
Intervalo de producción (unidades)	*1*	*2*	*3*	*4*
1-3	1	2	2	3
4-11	1	4	5	4
12-15	2	4	7	5
16-25	5	6	10	7
Costo unitario de almacenar hasta el siguiente periodo ($)	0.30	0.35	0.20	0.25
Demanda total (unidades)	11	4	17	29

a) Determine la solución óptima, indicando la cantidad de unidades que se deben producir en cada periodo.

b) Suponga que se necesitan 10 unidades más en el periodo 4. ¿Cuándo se deben producir?

3. La demanda de un producto durante los cinco periodos siguientes se puede satisfacer con producción en tiempo normal, tiempo extra, o subcontratándola. Sólo se puede usar subcontratación si se ha usado toda la capacidad en tiempo extra. La tabla siguiente muestra los datos de oferta, demanda y costo para este caso.

	Capacidad de producción (unidades)			
Periodo	*Tiempo normal*	*Tiempo extra*	*Subcontratación*	*Demanda*
1	100	50	30	153
2	40	60	80	200
3	90	80	70	150
4	60	50	20	200
5	70	50	100	203

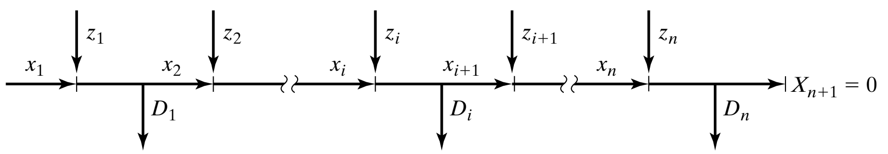
Los costos unitarios de producción para los tres niveles en cada periodo son de \$4, \$6 y \$7, respectivamente. El costo unitario del almacenamiento es de \$0.50 por periodo. Determine la solución óptima.

11.3.2 Modelo con preparación

En este caso no se permiten faltantes, y se incurre en costo de preparación cada vez que se inicia un lote de producción. Se presentarán dos métodos de solución: un algoritmo general de programación dinámica exacto y uno heurístico.

En la figura 11.9 se resume la situación del inventario en un esquema. Los símbolos que se ven en la figura se definen para el periodo i, $i = 1, 2, ..., n$ como sigue:

FIGURA 11.9
Elementos del modelo dinámico de inventario con costo de preparación



z_i = Cantidad del pedido
D_i = Demanda para el periodo i
x_i = Inventario al inicio del periodo i

Los elementos de costo del caso se definen como sigue:

K_i = Costo de preparación en el periodo i
h_i = Costo unitario de almacenamiento de inventario del periodo i al periodo $i + 1$

La función correspondiente de costo de producción para el periodo i es

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ K_i + c_i(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

La función $c_i(z_i)$ es la función de costo marginal de producción para z_i.

Algoritmo de programación dinámica general. En ausencia de faltantes, el modelo de inventario se basa en minimizar la suma de los costos de producción y almacenamiento para los n periodos. Para simplificar supondremos que el costo de almacenamiento para el periodo i se basa en el inventario de final del periodo, que se define como sigue:

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

Para la ecuación recursiva de avance, el *estado* en la *etapa* (periodo) i se define como x_{i+1}, el inventario al final del periodo, en donde, como se ve en la figura 11.9,

$$0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} + \ldots + D_n$$

En esta desigualdad se reconoce que, en el caso extremo, el inventario restante x_{i+1} puede satisfacer la demanda para todos los periodos restantes.

Sea $f_i(x_{i+1})$ el mínimo costo del inventario para los periodos 1, 2, ..., e i, dado el inventario x_{i+1} de fin de periodo. La ecuación recursiva *en avance* resulta ser

$$f_1(x_2) = \min_{0 \leq z_1 \leq D_1 + x_2} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\}$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leq z_i \leq D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, \ i = 2, 3, \ldots, n$$

Ejemplo 11.3-2

La tabla siguiente muestra los datos de un caso de inventario con 3 periodos.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i (\$)	Costo de almacenamiento h_i (\$)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

La demanda se presenta en unidades discretas, y el inventario inicial es $x_1 = 1$ unidad. El costo unitario de producción es de \$10 para las 3 primeras unidades y de \$20 por cada unidad adicional, lo que se traduce matemáticamente en lo siguiente:

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \ge 4 \end{cases}$$

Determine la política óptima de inventario.

Periodo 1: $\boldsymbol{D_1 = 3 - 1 = 2,\ 0 \le x_2 \le 2 + 4 = 6}$

		$C_1(z_1) + h_1x_2$							Solución óptima	
		$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
x_2	h_1x_2	$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Observe que como $x_1 = 1$, el valor mínimo de z_1 es $D_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$.

Periodo 2: $\boldsymbol{D_2 = 2,\ 0 \le x_3 \le 4}$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$							Solución óptima	
		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	h_2x_3	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 55 = 55	17 + 34 = 51	27 + 23 = 50					50	2
1	3	3 + 76 = 79	20 + 55 = 75	30 + 34 = 64	40 + 23 = 63				63	3
2	6	6 + 97 = 103	23 + 76 = 99	33 + 55 = 88	43 + 34 = 77	63 + 23 = 86			77	3
3	9	9 + 118 = 127	26 + 97 = 123	36 + 76 = 112	46 + 55 = 101	66 + 34 = 100	86 + 23 = 109		100	4
4	12	12 + 139 = 151	29 + 118 = 147	39 + 97 = 136	49 + 76 = 125	69 + 55 = 124	89 + 34 = 123	109 + 23 = 132	123	5

Periodo 3: $D_3 = 4, x_4 = 0$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$					Solución óptima	
		$z_3 = 0$	1	2	3	4		
x_4	h_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	$0 + 123$ $= 123$	$16 + 100$ $= 116$	$26 + 77$ $= 103$	$36 + 63$ $= 99$	$56 + 50$ $= 106$	99	3

La solución óptima se lee como sigue:

$$(x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 3} \rightarrow (x_3 = 0 + 4 - 3 = 1) \rightarrow \boxed{z_2 = 3} \rightarrow (x_2 = 1 + 2 - 3 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 2}$$

Así, la solución se resume como $z_1^* = 2$, $z_2^* = 3$ y $z_3^* = 3$, con un costo total de \$99.

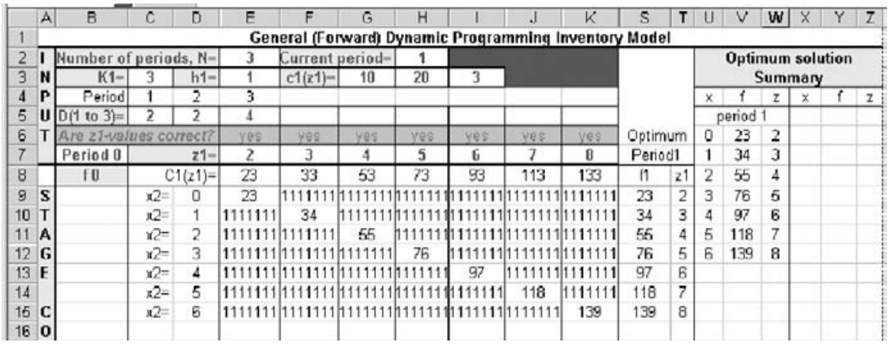
Solución del modelo de inventario usando hoja de cálculo y el algoritmo general de programación dinámica. La plantilla ch11DynamicInventory.xls de Excel tiene por objeto resolver el problema de inventario con el algoritmo general de programación dinámica general. El diseño de la hoja se parece al de ch10Knapsack.xls presentado en la sección 10.3.1. En particular, el modelo hace los cálculos periodo por periodo y se necesita la intervención del usuario para vincular los periodos sucesivos.

La figura 11.10 muestra la aplicación de ch11DynamicInventory.xls al ejemplo 11.3-2. Los datos se ingresan para cada periodo. Los cálculos se inician con el periodo 1. En la hoja de cálculo todos los datos que se necesitan se marcan en turquesa. Observe cómo se ingresa la función de costo $c_i(z_i)$ en el renglón 3: (G3 = 10, H3 = 20, I3 = 3) quiere decir que el costo unitario es \$10 para los tres primeros artículos y \$20 para los posteriores. También observe que la cantidad escrita para D_1 debe ser neta después de haber escrito el inventario inicial ($= 3 - x_1 = 3 - 1 = 2$). Además, necesita usted crear los valores factibles de la variable z_1. La hoja de cálculo revisa en forma automática si los valores que escribe son correctos, y presenta mensajes que se explican por sí mismos en el renglón 6: *yes, no* o *delete* (sí, no o eliminar).

Una vez ingresados todos los datos, los valores óptimos de f_i y z_i para el periodo aparecen en las columnas S y T. A continuación se crea un registro permanente para la solución del periodo 1 (x_1, f_1, z_1) en la sección de resumen de solución óptima, como se ve en la figura 11.10. Para eso se requiere copiar D9:D15 y S9:T15 y pegarlas a continuación usando <u>Pegado Especial</u> + <u>Valores</u> (podrá tener que revisar el procedimiento correcto para crear el registro permanente que se da junto con ch10Knapsack.xls en la sección 10.3.1).

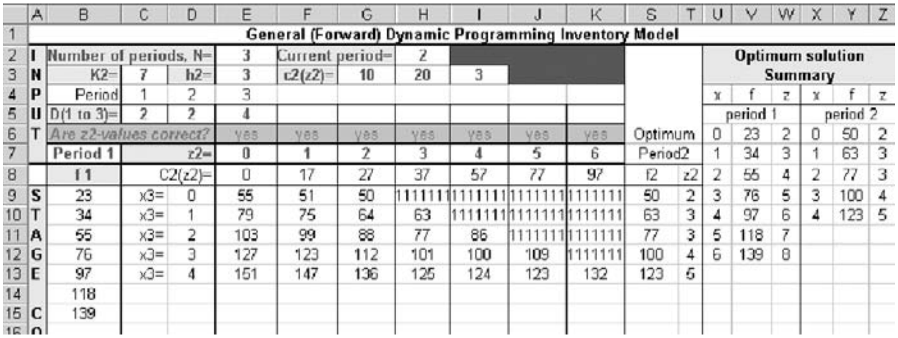
A continuación, para preparar el periodo 2, necesita copiar f_1 del registro permanente y pegarlo en la columna A, como se ve en la figura 11.10. Ahora todo lo que se necesita es actualizar los datos para el periodo 2. Después se repite el proceso para el periodo 3.

Periodo 1:



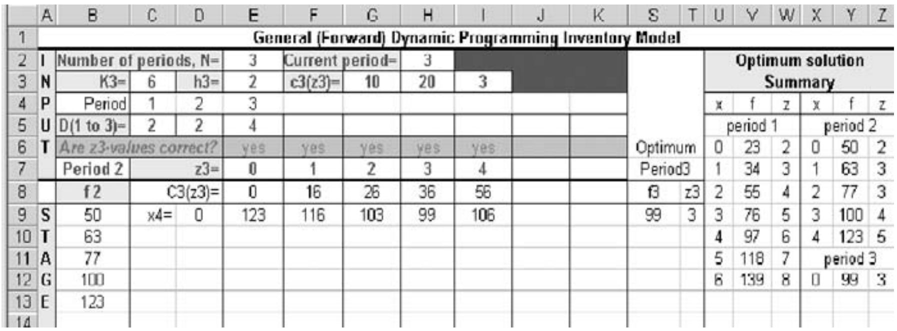
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1		General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																	
2	I	Number of periods, N=			3	Current period=		1						Optimum solution					
3	N	K1=	3	h1=	1	c1(z1)=	10	20	3					Summary					
4	P	Period	1	2	3									x	f	z	x	f	z
5	U	D(1 to 3)=	2	2	4									period 1					
6	T	Are z1-values correct?			yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	Optimum		0	23	2			
7		Period 0		z1=	2	3	4	5	6	7	8	Period1		1	34	3			
8		f0		C1(z1)=	23	33	53	73	93	113	133	f1	z1	2	55	4			
9	S		x2=	0	23	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	23	2	3	76	5			
10	T		x2=	1	1111111	34	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	34	3	4	97	6			
11	A		x2=	2	1111111	1111111	55	1111111	1111111	1111111	1111111	55	4	5	118	7			
12	G		x2=	3	1111111	1111111	1111111	76	1111111	1111111	1111111	76	5	6	139	8			
13	E		x2=	4	1111111	1111111	1111111	1111111	97	1111111	1111111	97	6						
14			x2=	5	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	118	1111111	118	7						
15	C		x2=	6	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	139	139	8						
16	O																		

Periodo 2:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1		General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																	
2	I	Number of periods, N=			3	Current period=		2						Optimum solution					
3	N	K2=	7	h2=	3	c2(z2)=	10	20	3					Summary					
4	P	Period	1	2	3									x	f	z	x	f	z
5	U	D(1 to 3)=	2	2	4									period 1			period 2		
6	T	Are z2-values correct?			yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	Optimum		0	23	2	0	50	2
7		Period 1		z2=	0	1	2	3	4	5	6	Period2		1	34	3	1	63	3
8		f1		C2(z2)=	0	17	27	37	57	77	97	f2	z2	2	55	4	2	77	3
9	S	23	x3=	0	55	51	50	1111111	1111111	1111111	1111111	50	2	3	76	5	3	100	4
10	T	34	x3=	1	79	75	64	63	1111111	1111111	1111111	63	3	4	97	6	4	123	5
11	A	55	x3=	2	103	99	88	77	86	1111111	1111111	77	3	5	118	7			
12	G	76	x3=	3	127	123	112	101	100	109	1111111	100	4	6	139	8			
13	E	97	x3=	4	151	147	136	125	124	123	132	123	5						
14		118																	
15	C	139																	
16	O																		

Periodo 3:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1		General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																	
2	I	Number of periods, N=			3	Current period=		3						Optimum solution					
3	N	K3=	6	h3=	2	c3(z3)=	10	20	3					Summary					
4	P	Period	1	2	3									x	f	z	x	f	z
5	U	D(1 to 3)=	2	2	4									period 1			period 2		
6	T	Are z3-values correct?			yes	yes	yes	yes	yes			Optimum		0	23	2	0	50	2
7		Period 2		z3=	0	1	2	3	4			Period3		1	34	3	1	63	3
8		f2		C3(z3)=	0	16	26	36	56			f3	z3	2	55	4	2	77	3
9	S	50	x4=	0	123	116	103	99	106			99	3	3	76	5	3	100	4
10	T	63												4	97	6	4	123	5
11	A	77												5	118	7	period 3		
12	G	100												6	139	8	0	99	3
13	E	123																	
14																			

FIGURA 11.10

Solución del programa dinámico del ejemplo 11.3-2 con Excel

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3C

1. Véase el ejemplo 11.3-2.

a) ¿Tiene sentido que $x_4 > 0$?

b) Para cada uno de los dos casos siguientes, determine los intervalos factibles de z_1, z_2, z_3, x_1, x_2 y x_3. (Encontrará útil representar cada situación como en la figura 11.9.)

i) $x_1 = 4$ y todos los datos restantes son iguales.

ii) $x_1 = 0, D_1 = 5, D_2 = 4$ y $D_3 = 5$.

2. a) Determine la solución óptima del siguiente modelo de inventario con cuatro periodos.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i ($)	Costo de almacenamiento h_i ($)
1	5	5	1
2	2	7	1
3	3	9	1
4	3	7	1

El costo unitario de fabricación es de $1 para las primeras 6 unidades y de $2 para las unidades adicionales.

b) Verifique los cálculos con ch11DynamicInventory.xls.

3. Suponga que el costo de almacenamiento de inventario se basa en el inventario *promedio* durante el periodo. Deduzca la ecuación recursiva de avance correspondiente.

4. Deduzca la ecuación recursiva en reversa para el modelo y úsela para resolver el ejemplo 11.3-2.

5. Deduzca la ecuación recursiva en reversa para el modelo, suponiendo que el costo de almacenamiento de inventario se basa en el inventario *promedio* en el periodo.

Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes. El modelo de programación dinámica general anterior se puede usar con cualquier función de costo. Sin embargo, la naturaleza del algoritmo obliga a que el estado x_i y las alternativas z_i en la etapa i asuman valores en incrementos de 1. Eso quiere decir que para grandes demandas el tamaño del cuadro en cada etapa podría ser extremadamente grande y en consecuencia computacionalmente pesado.

Un caso especial del modelo de programación dinámica general promete reducir el volumen de los cálculos. En este caso especial los costos unitarios, tanto de producción como de almacenamiento, se suponen son funciones *no crecientes* (cóncavas) de la cantidad de producción y del nivel de inventario, respectivamente. Este caso suele presentarse cuando la función de costo unitario es constante, o cuando se permiten descuentos por cantidad.

Bajo las condiciones mencionadas, se puede demostrar que[4]

1. Dado un inventario inicial cero ($x_1 = 0$), es óptimo satisfacer la demanda en cualquier periodo i ya sea con producción nueva o con el inventario, pero nunca con ambas cosas; esto es, $z_i x_i = 0$. Para el caso con inventario inicial positivo $x_1 > 0$, se puede eliminar la cantidad de las demandas de los periodos sucesivos hasta que se agote.
2. La cantidad óptima de producción para el periodo i es z_i y debe ser cero o bien debe satisfacer la demanda de uno o más de los periodos posteriores siguientes.

[4]Véase H. Wagner y T. Whitin, "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", *Management Science*, vol. 5, págs. 89-96, 1958. La demostración se hace bajo la hipótesis restrictiva de funciones de costo constantes e idénticas para todos los periodos. Más tarde A. Veinott Jr. la amplió para abarcar diferentes funciones de costo cóncavas.

Ejemplo 11.3-3

Un modelo de inventario con cuatro periodos funciona de acuerdo con los datos siguientes:

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i ($)
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

El inventario inicial x_1 es de 15 unidades. El costo unitario de producción es de $2, y el costo unitario de almacenamiento es de $1 en todos los periodos. (Para simplificar se supone que no cambian los costos unitarios de producción y de almacenamiento en todos los periodos.)

La solución se determina con el algoritmo de avance que se describió arriba, con la excepción que los valores de x_{i+1} y z_i asumen cantidades cerradas y no con incrementos de 1. Como $x_1 = 15$, la demanda para el primer periodo se ajusta a 76 – 15 = 61 unidades.

Periodo 1: $D_1 = 61$

		$C_1(z_1) + h_1x_2$				Solución óptima	
		$z_1 = 61$	87	177	244		
x_2	h_1x_2	$C_1(z_1) = 220$	272	452	586	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	220				220	61
26	26		298			298	87
116	116			568		568	177
183	183				769	769	244
Ordenar en 1 para		1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4		

Periodo 2: $D_2 = 26$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$				Solución óptima	
		$z_2 = 0$	26	116	183		
x_3	h_2x_3	$C_2(z_2) = 0$	166	346	480	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 298 = 298	166 + 220 = 386			298	0
90	90	90 + 568 = 658		436 + 220 = 656		656	116
157	157	157 + 769 = 926			637 + 220 = 857	857	183
Ordenar en 2 para		—	2	2, 3	2, 3, 4		

Periodo 3: $\boldsymbol{D_3 = 90}$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$			Solución óptima	
		$z_3 = 0$	90	157		
x_4	h_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	365	499	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	$0 + 656 = 656$	$365 + 298 = 663$		656	0
67	67	$67 + 857 = 924$		$566 + 298 = 864$	864	157
Ordenar en 3 para		—	3	3, 4		

Periodo 4: $\boldsymbol{D_4 = 67}$

		$C_4(z_4) + h_4x_5 + f_3(x_5 + D_4 - z_4)$		Solución óptima	
		$z_4 = 0$	67		
x_5	h_4x_5	$C_4(z_4) = 0$	204	$f_4(x_5)$	z_4^*
0	0	$0 + 864 = 864$	$204 + 656 = 860$	860	67
Ordenar en 4 para		—	4		

La política óptima se determina con los cuadros anteriores como sigue:

$$(x_5 = 0) \rightarrow \boxed{z_4 = 67} \rightarrow (x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 0} \rightarrow (x_3 = 90) \rightarrow \boxed{z_2 = 116} \rightarrow (x_2 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 61}$$

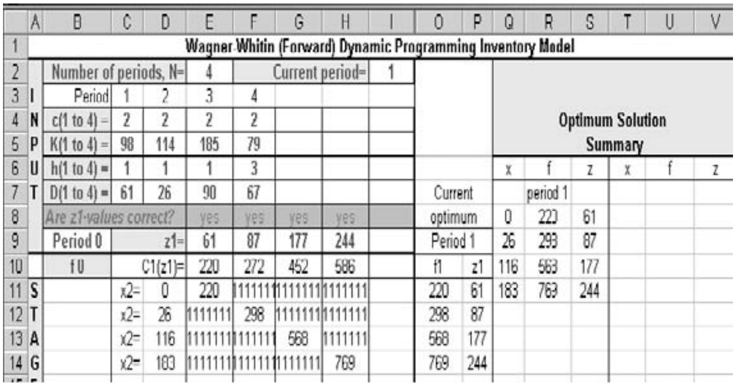
Esto da como resultado $z_1^* = 61$, $z_2^* = 116$, $z_3^* = 0$ y $z_4^* = 67$, a un costo total de \$860.

Solución del modelo Wagner-Whitin con hoja de cálculo. La plantilla ch11WagnerWhitin.xls de Excel se parece a la del modelo general ch11DynamicInventory.xls. La única diferencia es que se usan sumas agrupadas para el estado x y la alternativa z. También, para simplificar, la nueva hoja de cálculo no permite descuentos por cantidad. La figura 11.11 reproduce los cálculos del ejemplo 11.3-3 para el periodo 1. La plantilla se limita a un máximo de 10 periodos. Recuerde usar <u>Pegado Especial</u> + <u>Valores</u> al crear el resumen de la solución óptima (columnas Q:V).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3D

1. Resuelva el ejemplo 11.3-3, suponiendo que el inventario inicial es de 80 unidades. Use la plantilla ch11WagnerWhitin.xls.
2. Resuelva el siguiente modelo determinístico de inventario en 10 periodos. Suponga que el inventario inicial es de 50 unidades.

Periodo 1:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	O	P	Q	R	S	T	U	V
1		Wagner-Whitin (Forward) Dynamic Programming Inventory Model															
2		Number of periods, N=			4		Current period=		1			Optimum Solution Summary					
3	I	Period	1	2	3	4											
4	N	c(1 to 4) =	2	2	2	2											
5	P	K(1 to 4) =	98	114	185	79											
6	U	h(1 to 4) =	1	1	1	3						x	f	z	x	f	z
7	T	D(1 to 4) =	61	26	90	67				Current			period 1				
8		Are z1-values correct?			yes	yes	yes	yes		optimum		0	220	61			
9		Period 0		z1=	61	87	177	244		Period 1		26	293	87			
10		f U		C1(z1)=	220	272	452	586		f1	z1	116	563	177			
11	S		x2=	0	220	1111111	1111111	1111111		220	61	183	763	244			
12	T		x2=	26	1111111	298	1111111	1111111		298	87						
13	A		x2=	116	1111111	1111111	568	1111111		568	177						
14	G		x2=	183	1111111	1111111	1111111	769		769	244						

FIGURA 11.11
Modelo de Wagner-Whitin de programación dinámica en Excel, aplicado al periodo 1 del ejemplo 11.3-3

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo unitario de producción ($)	Costo unitario de almacenamiento ($)	Costo de preparación ($)
1	150	6	1	100
2	100	6	1	100
3	20	4	2	100
4	40	4	1	200
5	70	6	2	200
6	90	8	3	200
7	130	4	1	300
8	180	4	4	300
9	140	2	2	300
10	50	6	1	300

3. Determine la política óptima de inventario para el siguiente modelo con cinco periodos. El costo unitario de producción es de $10 para todos los periodos. El costo unitario de almacenamiento es de $1 por periodo.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_1 ($)
1	50	80
2	70	70
3	100	60
4	30	80
5	60	60

4. Determine la política óptima de inventario para el siguiente caso con seis periodos. El costo unitario es de $2 para todos los periodos.

Periodo I	D_i (unidades)	K_i ($)	h_i ($)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

Heurística de Silver-Meal. Este modelo heurístico sólo es válido para los casos de inventario en los que son constantes los costos unitarios de producción, y son idénticos para todos los periodos. Por esta razón sólo se balancean los costos de preparación y de almacenamiento.

La heurística identifica los periodos futuros sucesivos cuya demanda se puede satisfacer con la demanda del periodo actual. El objetivo es minimizar los costos asociados de preparación y de almacenamiento por periodo.

Supongamos que en el periodo i se produce para los periodos $i, i + 1, ..., $ y $t, i \leq t$; se define a TC(i, t) como los costos asociados de preparación y almacenamiento para los mismos periodos. Matemáticamente, con la misma notación de los modelos de programación dinámica,

$$\text{TC}(i, t) = \begin{cases} K_i & t = i \\ K_i + h_i D_{i+1} + (h_i + h_{i+1})D_{i+2} + \dots + (h_i + h_{i+1} + \dots + h_{t-1})D_t, & t > i \end{cases}$$

A continuación se define TCU(i, t) como el costo asociado por periodo, esto es

$$\text{TCU}(i, t) = \frac{\text{TC}(i, t)}{t - i + 1}$$

Entonces, dado un periodo actual i, la heurística determina la t^* que minimiza TCU(i, t).

La función TC(i, t) se puede calcular en forma recursiva como sigue:

$$\text{TC}(i, i) = K_i$$

$$\text{TC}(i, t) = \text{TC}(i, t - 1) + (h_i + h_{i+1} + \dots + h_{t-1})D_t,\ t = i + 1, i + 2, \dots, n$$

Paso 0. $i = 1$.

Paso 1. Determinar la t^* mínima local que satisfaga las dos condiciones siguientes:

$$\text{TCU}(i, t^* - 1) \geq \text{TCU}(i, t^*)$$
$$\text{TCU}(i, t^* + 1) \geq \text{TCU}(i, t^*)$$

Si se satisfacen las condiciones, la heurística indica ordenar la cantidad $(D_i + D_{i+1} + \cdots + D_{t^*})$ en el periodo i para los periodos $i, i + 1, ...,$ y t^*.

Paso 2. Igualar $i = t^* + 1$. Si $i > n$, detenerse; se ha cubierto todo el horizonte de planeación. En caso contrario, seguir en el paso 1.

Ejemplo 11.3-4

Determinar la política óptima de inventario para el siguiente caso con 6 periodos:

Periodo i	D_i (unidades)	K_i (\$)	h_i (\$)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

El costo unitario de producción es \$2 para todos los periodos.

Iteración 1 ($\boldsymbol{i = 1, K_1 = \$20}$) La función TC(1, t) se calcula en forma recursiva respecto a t. Por ejemplo, dada TC(1, 1) = \$20, $TC(1,2) = TC(1,1) + h_1 D_2 = 20 + 1 \times 15 = \$35$.

Periodo t	D_t	TC(1, t)	TCU(1, t)
1	10	\$20	$\frac{20}{1}$ = \$20.00
2	15	20 + 1 × 15 = \$35	$\frac{35}{2}$ = \$17.50
3	7	35 + (1 + 1) × 7 = 94	$\frac{49}{3}$ = \$16.33
4	20	49 + (1 + 1 + 1) × 20 = \$109	$\frac{109}{4}$ = \$27.25

El mínimo local se presenta en $t^* = 3$, que indica pedir 10 + 15 + 7 = 32 unidades en el periodo 1 para los periodos 1 a 3. Se iguala $i = t^* + 1 = 3 + 1 = 4$.

Iteración 2 ($\boldsymbol{i = 4, K_4 = \$18}$)

Periodo t	D_t	TC(4, t)	TCU(4, t)
4	20	\$18	$\frac{18}{1}$ = \$18.00
5	13	18 + 3 × 13 = \$57	$\frac{57}{2}$ = \$28.50

Los cálculos indican que $t^* = 4$, lo que indica pedir 20 unidades en el periodo 4 para el periodo 4. Se iguala $i = 4 + 1 = 5$.

Iteración 3 ($\boldsymbol{i = 5, K_5 = \$5}$)

Periodo t	D_t	TC(5, t)	TCU(5, t)
5	13	\$5	$\frac{5}{1}$ = \$5
6	25	5 + 1 × 25 = \$30	$\frac{30}{2}$ = \$15

El mínimo está en $t^* = 5$, que requiere pedir 13 unidades en el periodo 5 para el periodo 5. A continuación se pone $i = 5 + 1 = 6$. Sin embargo, como $i = 6$ es el último periodo del horizonte de planeación, se deben pedir 25 unidades en el periodo 6 para el periodo 6.

La tabla siguiente compara las soluciones obtenidas con el algoritmo heurístico y el de programación dinámica exacta. Hemos omitido el costo unitario de producción en el modelo de programación dinámica, porque no interviene en los cálculos heurísticos.

	Heurístico		Programación dinámica	
Periodo	*Unidades producidas*	*Costo (\$)*	*Unidades producidas*	*Costo (\$)*
1	32	49	10	20
2	0	0	22	24
3	0	0	0	0
4	20	18	20	18
5	13	5	38	30
6	25	50	0	0
Total	90	122	90	92

El programa de producción obtenido con el método heurístico cuesta 32% más que el de la solución con programación dinámica ($122 frente a $92). El funcionamiento "inadecuado" de la heurística se puede deber a los datos que se usaron en el problema. En forma específica, las variaciones extremas de los costos de preparación para los periodos 5 y 6 pueden ser las causantes de esta baja eficiencia. Sin embargo, el ejemplo indica que la heurística no tiene la capacidad de "ver hacia adelante" buscando mejores oportunidades de programación. Por ejemplo, pedir en el periodo 5 para los periodos 5 y 6 (en lugar de pedir por separado en cada periodo) puede ahorrar $25, con lo que el costo total heurístico sería $97.

Solución de la heurística de Silver-Meal con hoja de cálculo. La plantilla ch11Silver-MealHeuristic.xls de Excel tiene por objeto efectuar todos los cálculos de iteración, y de proporcionar la solución final. El procedimiento comienza escribiendo los datos necesarios para los cálculos, incluyendo N, K, h y D para todos los periodos (estos elementos se marcan en turquesa en la hoja de cálculo). A continuación, el usuario debe iniciar cada iteración en forma manual, hasta haber cubierto todos los periodos.

La figura 11.12 muestra la aplicación de la heurística al ejemplo 11.3-4, con Excel. La primera iteración se inicia poniendo el valor 1 en la celda F11, indicando que la iteración 1 comienza en el periodo 1. A continuación la hoja de cálculo generará tantos renglones como cantidad de periodos N haya (en este ejemplo 6). El número del periodo aparecerá en orden ascendente en las celdas G11:G16. Ahora, examine la columna TCU (indicada en verde en la hoja de cálculo) y localice el periodo que corresponda al mínimo local en $t = 3$ con TCU $=$ \$16.33. Eso quiere decir que la siguiente iteración comenzará en el periodo 4. Ahora sáltese un renglón en blanco y escriba el valor 4 en F18. Esta acción iniciará los cálculos de la iteración 2, y mostrará que el mínimo local estará en el periodo 4 (TCU $=$ \$18.00), e indicará el inicio de la iteración 3 en el periodo 5. Nuevamente, al escribir 5 en F22, el mínimo local para la iteración 3 estará en el periodo 5. A continuación, al escribir el valor 6 en B25, se producirá la iteración final del problema. Al pasar por cada iteración, la hoja de cálculo mostrará en forma automática la política óptima correspondiente, y su costo total, como se ve en la figura 11.12.

	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Silver-Meal Heuristic Inventory Model							
2	Input data:							
3	Number of periods, N =	6						
4	Period t=	1	2	3	4	5	6	
5	Setup cost, Kt =	20	17	10	18	5	50	
6	Holding cost, ht =	1	1	1	3	1	1	
7	Demand, Dt =	10	15	7	20	13	25	
8								
9		Model calculations:						Optimum solution: (Total cost = $122.00):
10	Start Iteration at Period	Period	D_i	$\sum D_i$	$\sum h_i$	TC	TCU	
11	1	1	10	10	0.00	20.00	20.00	
12		2	15	25	1.00	35.00	17.50	
13		3	7	32	2.00	49.00	16.33	
14		4	20	52	3.00	109.00	27.25	
15		5	13	65	6.00	187.00	37.40	
16		6	25	90	7.00	362.00	60.33	Order 32 units in period 1, cost = $49.00
17								
18	4	4	20	20	0.00	18.00	18.00	
19		5	13	33	3.00	57.00	28.50	
20		6	25	58	4.00	157.00	52.33	Order 20 units in period 4, cost = $18.00
21								
22	5	5	13	13	0.00	5.00	5.00	
23		6	25	38	1.00	30.00	15.00	Order 13 units in period 5, cost = $5.00
24								
25	6	6	25	25	0.00	50.00	50.00	Order 25 units in period 6, cost = $50.00
26								

FIGURA 11.12

Solución del ejemplo 11.3-4 con Excel, usando la heurística de Silver-Meal

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3E

1. La demanda de cañas de pescar está en su mínimo durante el mes de diciembre, y llega a su máximo durante el mes de abril. Fishing Hole, Inc. estima que la demanda en diciembre es de 50 cañas. Aumenta 10 cañas mensuales hasta llegar a 90 cañas en abril. Después, baja 5 cañas cada mes. El

costo de preparación de un lote de producción es de $250, menos durante los meses de máxima demanda, desde febrero hasta abril, cuando aumenta a $300. El costo de producción por caña es de $15, aproximadamente constante en todo el año, y el costo mensual de almacenamiento es de $1 por caña. Fishing Hole está estableciendo su plan de producción para el próximo año (de enero a diciembre). ¿Cómo debe programarlo?

2. Un editor pequeño reimprime una novela para satisfacer la demanda durante los 12 meses siguientes. Las estimaciones de la demanda son de 100, 120, 50, 70, 90, 105, 115, 95, 80, 85, 100 y 110, para los meses respectivos. El costo de preparar la reimpresión del libro es de $200, y el costo de almacenamiento es de $1.20 por libro y por mes. Determine el calendario de reimpresión para el editor.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Silver, E., D. Pyke y R. Peterson, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.

Tersine, R., *Principles of Inventory and Materials Management*, 3a. ed., North Holland, Nueva York, 1988.

Waters, C., *Inventory Control and Management*, Wiley, Nueva York, 1992.

PROBLEMAS INTEGRALES

11.1 El centro de distribución de Walmark Stores, un detallista, compra diariamente muchos artículos básicos, no de moda. La demanda continua de esos artículos se debe a que Walmark es propietario de muchas tiendas. Anteriormente, las decisiones de *cuánto* y *cuándo* comprar se relegaban a los compradores, cuyo objetivo principal era hacer adquisiciones en cantidades suficientemente grandes como para obtener precios bajos de compra. Esta política se siguió sin preocuparse mucho del estado de existencias de los artículos. En realidad, las decisiones de cuánto comprar se basaban en el costo anual en $ para el artículo, a nivel de centro de distribución. Por ejemplo, si un artículo se compra en $25 por unidad y se consumen 10,000 unidades de él en un año, se estima que su costo anual es de $250,000. El lineamiento principal para los compradores era que mientras mayor fuera el costo anual de un artículo, su nivel de inventario en el centro de distribución debería se mayor. Este lineamiento se traducía en expresar la cantidad de inventario que se debe tener a mano en el centro de distribución como el periodo entre reabastecimientos. Por ejemplo, un comprador puede adquirir una cantidad especificada previamente de un artículo cada tres meses.

Para ejercer un mejor control de inventario, Walmark decidió contratar la ayuda de un consultor en investigación de operaciones. Después de estudiar el caso, el consultor llegó a la conclusión de que la tasa de consumo de la mayor parte de los artículos en los centros de distribución es constante, para todo fin práctico, y que Walmark opera bajo la política general de no permitir faltantes. Además, su estudio indicó que el costo de almacenamiento del inventario de todos los artículos que se consideraron, es un porcentaje constante del precio unitario de compra. Además, el costo fijo en que incurre un comprador en cada compra es igual, independientemente del artículo de que se trate. Con esta información, el consultor pudo formular una sola curva para cualquier artículo, donde se relaciona su costo anual con el tiempo promedio entre reabastecimientos. Esta curva se usó entonces para decidir de cuáles artículos hay demasiado en el almacén, y de cuáles hay poco. ¿Cómo lo hizo el analista?

11.2 Una empresa fabrica un producto para el que requiere sólo un componente. Compra el componente a un proveedor externo. La tasa de demanda del producto final es, aproximadamente, de 20 unidades por semana. Cada unidad del producto final usa 2 unidades del componente comprado. Se dispone de los siguientes datos de inventario:

	Componente	Producto
Costo de preparación por pedido ($)	80	100
Costo unitario de almacenamiento por semana ($)	2	5
Tiempo de entrega (semanas)	2	3

La demanda no satisfecha del producto final se acumula y cuesta $8 por unidad perdida por semana. No se espera que haya faltante del producto comprado. Proponga una política de compra del componente y la fabricación del producto final.

11.3 Una empresa produce un artículo de consumo estacional, cuya demanda mensual fluctúa en forma apreciable. La tabla siguiente muestra los datos de demanda (en cantidad de unidades).

	Año				
Mes	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Ene.	10	11	10	12	11
Feb.	50	52	60	50	55
Mar.	8	10	9	15	10
Abr.	99	100	105	110	120
May.	120	100	110	115	110
Jun.	100	105	103	90	100
Jul.	130	129	125	130	130
Ago.	70	80	75	75	78
Sep.	50	52	55	54	51
Oct.	120	130	140	160	180
Nov.	210	230	250	280	300
Dic.	40	46	42	41	43

Por las fluctuaciones de la demanda, el gerente de control de inventario ha determinado una política que pide el artículo trimestralmente, el 1 de enero, 1 de abril, 1 de julio y 1 de octubre. El tamaño del pedido cubre la demanda de cada trimestre. El tiempo de entrega entre la colocación y la recepción de un pedido es de 3 meses. Se considera que las estimaciones de la demanda del año próximo son las del año 5 más 10% de factor de seguridad.

Un empleado nuevo cree que se puede determinar una política mejor usando la cantidad económica de pedido con base en la demanda mensual del año. Las fluctuaciones de la demanda se pueden "suavizar" colocando pedidos para cubrir las demandas de meses consecutivos, y el tamaño de cada pedido aproximadamente igual al tamaño económico de lote. A diferencia del gerente, el empleado nuevo cree que las estimaciones para la demanda del año que viene se deben basar en el promedio de los años 4 y 5.

La empresa basa los cálculos de su inventario en un costo de almacenamiento de $0.50 por unidad de inventario y por mes. Cuando se coloca un pedido se incurre en un costo de preparación de $55.

Sugiera una política de inventario para la empresa.

CAPÍTULO 12

Repaso de probabilidad básica

En todas las técnicas que se presentaron en los capítulos anteriores se supone que se conocen los datos con certeza. Esta hipótesis no es cierta en todos los casos. Por ejemplo, la demanda de energía eléctrica durante los meses de verano puede variar en forma aleatoria de un año a otro, dependiendo de las condiciones meteorológicas. En esos casos en general no es correcto representar la demanda por un solo valor determinístico. En su lugar se pueden usar datos observados o históricos para representar la demanda en forma de distribución de probabilidades. En este capítulo se describe una presentación breve de las bases de la probabilidad y la estadística.

12.1 LEYES DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad se asocia a la ejecución de un **experimento** cuyos resultados se presentan en forma aleatoria. El conjunto de todos los resultados de un experimento se llama **espacio muestral**, y un subconjunto del espacio muestral se llama un **evento**. Por ejemplo, en el experimento de tirar un dado (de seis caras), el resultado de una tirada corresponde a una cara del dado: del 1 al 6. El conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} define el espacio muestral correspondiente. Un ejemplo de un evento es que una tirada dará como resultado un valor par (2, 4 o 6).

En un experimento se puede manejar también un espacio muestral continuo. Por ejemplo, el tiempo entre fallas de un componente electrónico puede asumir cualquier valor no negativo.

Si en un experimento con n intentos o pruebas, un evento E sucede m veces, entonces la probabilidad $P\{E\}$ de realizar el evento E se define matemáticamente como sigue:

$$P\{E\} = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Esta definición implica que si el experimento se repite *indefinidamente* ($n \to \infty$), la probabilidad deseada se representa con la fracción $\frac{m}{n}$ a largo plazo. El lector puede verificar esta definición tirando una moneda y observando su resultado: cara (H) o cruz (T). Mientras más se repita el experimento, más se acercará la estimación de $P\{H\}$ (o de $P\{T\}$) al valor teórico de 0.5.

Por definición,

$$0 \leq P\{E\} \leq 1$$

Un evento E es imposible si $P\{E\} = 0$, y es seguro si $P\{E\} = 1$. Por ejemplo, en un experimento de tirar un dado, sacar 7 es imposible, mientras que sacar un valor entero de 1 a 6 inclusive, es seguro.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.1A

1. En una encuesta entre las escuelas secundarias de Arkansas, para estudiar la correlación entre las calificaciones del último año de matemáticas y la inscripción a escuelas de ingeniería, 400 alumnos de 1000 encuestados en el último año habían estudiado matemáticas. La inscripción en ingeniería indica que 150 alumnos han estudiado matemáticas y 29 no. Calcule las siguientes probabilidades:
   a) Que un alumno que estudió matemáticas está inscrito en ingeniería. Que no esté inscrito en ingeniería.
   b) Que un alumno ni haya estudiado matemáticas ni se haya inscrito en ingeniería.
   c) Que un alumno no estudie ingeniería.
2. Se tiene una reunión aleatoria de n personas. Determine la n mínima tal que sea más probable que dos o más personas tengan el mismo día de cumpleaños. (*Sugerencia:* suponga que no hay años bisiestos y que todos los días del año tienen la misma probabilidad de ser el cumpleaños de una persona.)
3. Conteste el problema 2 suponiendo que una o más personas tengan el mismo aniversario que usted.

12.1.1 Ley aditiva de las probabilidades

Para dos eventos E y F, la suma $E + F$ representa la **unión** de E y F, y EF representa su **intersección**. Los eventos E y F son **mutuamente excluyentes** si no se intersecan, es decir, si la ocurrencia de un evento prohíbe la ocurrencia del otro. Con base en estas definiciones, la ley aditiva de las probabilidades se puede enunciar como sigue:

$$P\{E + F\} = \begin{cases} P\{E\} + P\{F\}, & E \text{ y } F \text{ mutuamente excluyentes} \\ P\{E\} + P\{F\} - P\{EF\}, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$P\{EF\}$ es la probabilidad de que los eventos E y F sucedan en forma simultánea.

Se dice que los eventos E y F son **independientes** si

$$P\{EF\} = P\{E\}P\{F\}$$

Ejemplo 12.1-1

Un experimento consiste en tirar un dado. El espacio muestral del experimento es {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si el dado no está cargado,

$$P\{1\} = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \tfrac{1}{6}$$

Se definen

$$E = \{1, 2, 3 \text{ o } 4\}$$

$$F = \{3, 4 \text{ o } 5\}$$

Los resultados 3 y 4 son comunes entre E y F; en consecuencia, $EF = \{3 \text{ o } 4\}$. Entonces,

$$P\{E\} = P\{1\} + P\{2\} + P\{3\} + P\{4\} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}$$

$$P\{F\} = P\{3\} + P\{4\} + P\{5\} = \tfrac{1}{2}$$

$$P\{EF\} = P\{3\} + P\{4\} = \tfrac{1}{3}$$

En consecuencia

$$P\{E + F\} = P\{E\} + P\{F\} - P\{EF\} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}$$

El resultado tiene sentido, porque $(E + F) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, cuya probabilidad de ocurrencia es $\frac{5}{6}$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.1B

1. Se tira dos veces un dado no cargado. Si E y F representan los resultados de dos tiradas independientes, calcule las siguientes probabilidades:

a) Que la suma de E y F sea 11.

b) Que la suma de E y F sea par.

c) Que la suma de E y F sea impar y mayor que 3.

d) Que E sea par menor que 6 y que F sea impar mayor que 1.

e) Que E sea mayor que 2 y F sea menor que 4.

f) Que E sea 4 y que la suma de E y F sea impar.

2. Suponga que tira dos dados independientemente y que anota el número que sale en cada dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números sean pares?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sean 10?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números difieran en 3 cuando menos?

3. Puede usted lanzar una moneda hasta 7 veces. Ganará $100 si salen tres cruces antes de que salga una cara. ¿Cuáles son sus probabilidades de ganar?

4. Ann, Jim, John y Liz van a competir en un torneo de ráquetbol. Hay dos probabilidades contra una de que Ann gane a Jim, y Jim está al mismo nivel que John. La historia de juegos entre Liz y John es que Liz gana uno de cada tres juegos a John.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Jim gane el torneo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer gane el torneo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna mujer gane?

12.1.2 Ley de la probabilidad condicional

Dado los dos eventos E y F, con $P\{F\} > 0$, la probabilidad condicional de E dado F, $P\{E|F\}$, se define como sigue:

$$P\{E|F\} = \frac{P\{EF\}}{P\{F\}}, \quad P\{F\} > 0$$

Si E es un subconjunto de (es decir, está contenido en) F, entonces $P\{EF\} = P\{E\}$.

Los dos eventos, E y F, son *independientes* si, y sólo si

$$P\{E|F\} = P\{E\}$$

En este caso, la ley de la probabilidad condicional se reduce a

$$P\{EF\} = P\{E\}P\{F\}$$

Ejemplo12.1-2

Usted juega con otra persona que tira un dado. Usted no puede ver el dado, pero tiene información de los resultados. Lo que debe hacer es predecir el resultado de cada tirada. Determine la probabilidad de que el resultado sea 6, si le dicen que en la tirada ha salido un número par.

Sea $E = \{6\}$, y se define $F = \{2, 4 \text{ o } 6\}$. Entonces,

$$P\{E|F\} = \frac{P\{EF\}}{P\{F\}} = \frac{P\{E\}}{P\{F\}} = \left(\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{3}$$

Observe que $P\{EF\} = P\{E\}$, porque E es un subconjunto de F.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.1C

1. En el ejemplo 12.1-2 suponga que le dicen que el resultado es menor que 6.

a) Calcule la probabilidad de sacar un número par.

b) Calcule la probabilidad de sacar un número impar mayor que uno.

2. Las acciones de WalMark Stores, Inc. se negocian en la Bolsa de Nueva York con el símbolo WMS. Históricamente el precio de WMS sube al aumentar el índice Dow el 60% de las veces, y baja cuando baja el índice Dow el 25% de las veces. También hay una probabilidad de 5% de que WMS suba cuando baja el índice Dow, y de 10% de que baje cuando suba el índice Dow.

a) Determine la probabilidad de que WMS suba independientemente del índice Dow.

b) Calcule la probabilidad de que WMS suba dado que subió el índice Dow.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que WMS baje dado que bajó el índice Dow?

3. Los alumnos de último año de secundaria que salen con una calificación ACT mínima de 26 pueden solicitar inscripción en dos universidades, A y B. La probabilidad de ser acepado en A es 0.4, y en B es 0.25. Las probabilidades de ser aceptado en ambas universidades sólo es 15 por ciento.

a) Calcule la probabilidad de que el alumno sea aceptado en B, si ya en A ha asegurado también su inscripción.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se asegure la inscripción en A cuando el alumno ya fue aceptado en B?

4. Demuestre que si la probabilidad $P\{A|B\} = P\{A\}$, entonces A y B deben ser independientes.

5. *Teorema de Bayes*.[1] Dados los dos eventos A y B, demuestre que

$$P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}P\{A\}}{P\{B\}},\ P\{B\} > 0$$

---

[1]En la sección 14.2.2 hay una presentación detallada del teorema de Bayes.

6. Un detallista recibe el 75% de sus baterías de la fábrica *A* y 25% de la fábrica *B*. Se sabe que los porcentajes de baterías defectuosas producidas por *A* y *B* son 1 y 2%, respectivamente. Un cliente acaba de comprarle una batería, que eligió al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería sea defectuosa?

b) Si la batería que compró es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica *A*? (*Sugerencia:* use el teorema de Bayes del problema 5.)

7. Las estadísticas indican que el 70% de todos los hombres tienen alguna forma de cáncer de próstata. La prueba PSA da positivo el 90% de las veces cuando los hombres están afectados, y 10% cuando los hombres no están afectados. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que dio positivo tenga cáncer de próstata?

12.2 VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

Los resultados de un experimento son numéricos de por sí, o se pueden representar en una escala numérica. Por ejemplo, los resultados de tirar un dado son numéricos de por sí: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Un caso distinto es el de probar un artículo y obtener dos resultados: malo y bueno. En ese caso se puede usar la clave numérica (0, 1) para representar (malo, bueno). La representación numérica de los resultados produce lo que se llama **variable aleatoria**.

Una variable aleatoria x puede ser **discreta** o **continua**. Por ejemplo, la variable aleatoria asociada al experimento de tirar un dado es discreta, y $x = 1, 2, 3, 4, 5$ o 6; mientras que la hora de llegada a una instalación de servicio es continua con $x \geq 0$.

Cada variable continua o discreta x se cuantifica con una **función de densidad de probabilidad(es)**, fdp, $f(x)$ o $p(x)$. Esas funciones deben satisfacer las condiciones de la siguiente tabla:

	Variable aleatoria, x	
Característica	*Discreta*	*Continua*
Intervalo de aplicación	$x = a, a + 1, \ldots, b$	$a \leq x \leq b$
Condiciones para la fdp	$p(x) \geq 0, \sum_{x=a}^{b} p(x) = 1$	$f(x) \geq 0, \int_a^b f(x)dx = 1$

Una fdp, $p(x)$ o $f(x)$ debe ser no negativa (si no ¡la probabilidad de un evento sería negativa!). También, la probabilidad de que ocurra todo el espacio muestral debe ser igual a 1.

Una medida importante de las probabilidades es la **función de distribución acumulada** (FDA), que se define como sigue:

$$P\{x \leq X\} = \begin{cases} P(X) = \sum_{x=a}^{X} p(x), & x \text{ discreta} \\ F(X) = \int_a^X f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

Ejemplo 12.2-1

Se tiene el caso de tirar un dado no cargado. La variable aleatoria $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ representa la cara del dado que sale hacia arriba. La fdp y FDA correspondientes son

$$p(x) = \tfrac{1}{6},\ x = 1, 2, \ldots, 6$$

$$P(X) = \tfrac{X}{6},\ X = 1, 2, \ldots, 6$$

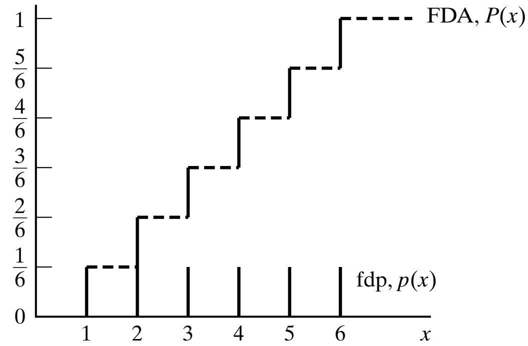


FIGURA 12.1

Función de distribución acumulada (FDA) y función de densidad de probabilidad (fdp) al tirar un dado no cargado

La figura 12.1 es una gráfica de las dos funciones. La fdp $p(x)$ es una función discreta **uniforme** porque todos los valores de las variables aleatorias se presentan con iguales probabilidades.

La contraparte continua de $p(x)$ uniforme se ve en el siguiente experimento. Una aguja de longitud l tiene un pivote en el centro de un círculo, cuyo diámetro también es igual a l. Después de marcar un punto arbitrario de referencia en la circunferencia, se hace girar la aguja en el sentido de las manecillas del reloj y se mide la distancia circunferencial x desde la marca hasta el punto donde se detiene la punta. Así, la variable aleatoria x es continua en el intervalo $0 \leq x \leq \pi l$. No hay razón para creer que la aguja tiende a detenerse con más frecuencia en determinada región de la circunferencia. Por tanto, todos los valores de x en el intervalo especificado tienen la misma probabilidad de presentarse, y la distribución de x debe ser uniforme.

La función de densidad de x, $f(x)$, se define como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{\pi l},\ 0 \leq x \leq \pi l$$

$F(X)$, la función de distribución acumulada, se calcula como sigue:

$$F(X) = P\{x \leq X\} = \int_0^X f(x)dx = \int_0^X \frac{1}{\pi l}\,dx = \frac{X}{\pi l},\ 0 \leq X \leq \pi l$$

La figura 12.2 muestra las gráficas de las dos funciones.

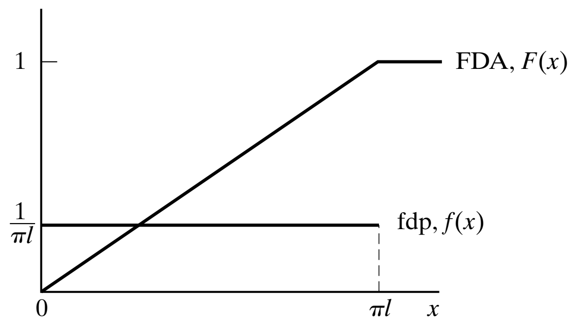


FIGURA 12.2

Función de distribución acumulada (FDA) y función de densidad de probabilidad (fdp) para una aguja giratoria

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.2A

1. La cantidad x de unidades necesarias de un artículo es discreta, de 1 a 5. La probabilidad $p(x)$ es directamente proporcional a la cantidad de unidades necesarias. La constante de proporcionalidad es K.

a) Determine la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada, y trace la gráfica de cada una.

b) Calcule la probabilidad de que x tenga valor par.

2. Se tiene la siguiente función:

$$f(x) = \frac{k}{x^2},\ 10 \leq x \leq 20$$

a) Calcule el valor de la constante k que haga de $f(x)$ una función de densidad de probabilidad.

b) Determine la función de distribución acumulada y calcule la probabilidad de que x i) sea mayor que 12 y ii) se encuentre entre 13 y 15.

3. La demanda diaria de gasolina sin plomo se distribuye uniformemente entre 750 y 1250 galones. El tanque de la gasolina tiene 1100 galones de capacidad, y se llena diariamente a media noche. ¿Cuál es la probabilidad de que el tanque esté vacío antes de llenarlo?

12.3 EXPECTATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Si $h(x)$ es una función real de una variable aleatoria x, se define al **valor esperado** $E\{h(x)\}$ de $h(x)$ como el promedio ponderado (a largo plazo) con respecto a la función de densidad de probabilidad de x. Matemáticamente, dadas $p(x)$ y $f(x)$, las funciones de distribución acumulada de probabilidades discretas y continuas de x, respectivamente, entonces se calcula $E\{h(x)\}$ como sigue:

$$E\{h(x)\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} h(x)p(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b h(x)f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

Ejemplo 12.3-1

Durante la primera semana de cada mes, yo (como mucha gente) pago mis deudas y contesto algunas cartas. Para ello suelo comprar 20 estampillas de correo cada mes. La cantidad de estampillas que uso varía al azar entre 10 y 24, con iguales probabilidades. ¿Cuál es la cantidad media de estampillas que sobran?

La función de distribución acumulada de probabilidades de la cantidad de estampillas usadas es

$$p(x) = \tfrac{1}{15},\ x = 10, 11, \ldots, 24$$

La cantidad de estampillas que quedan es

$$h(x) = \begin{cases} 20 - x, & x = 10, 11, \ldots, 19 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$E\{h(x)\} = \tfrac{1}{15}[(20-10) + (20-11) + (20-12) + \ldots + (20-19)] + \tfrac{5}{15}(0) = 3\tfrac{2}{3}$$

El producto $\frac{5}{15}(0)$ se necesita para completar el valor esperado de $h(x)$. En forma específica, la probabilidad de que queden *cero* estampillas es igual a la probabilidad de necesitar 20 estampillas o más; esto es

$$P\{x \geq 20\} = p(20) + p(21) + p(22) + p(23) + p(24) = 5(\tfrac{1}{15}) = \tfrac{5}{15}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3A

1. En el ejemplo 12.3-1, calcule la cantidad media de estampillas adicionales necesarias para satisfacer su demanda máxima posible.

2. Los resultados del ejemplo 12.3-1 y del problema 1 indican medias *positivas* del sobrante y del faltante de estampillas *al mismo tiempo*. ¿Son inconsistentes esos resultados? Explique por qué.

3. El propietario de un puesto de periódicos recibe 50 ejemplares de *Al Ahram* cada mañana. La demanda diaria x varía en forma aleatoria, según la siguiente distribución de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & x = 35, 36, \ldots, 49 \\ \frac{1}{30}, & x = 50, 51, \ldots, 59 \\ \frac{1}{33}, & x = 60, 61, \ldots, 70 \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que el propietario los venda todos.

b) Calcule la cantidad esperada de ejemplares sin vender cada día.

c) Si el dueño paga 50 centavos por un ejemplar y lo vende en $1.00, calcule su ingreso neto esperado por día.

12.3.1 Media y varianza de una variable aleatoria

La media o **media** de x, $E\{x\}$, es una medida de la tendencia central (o suma ponderada) de la variable aleatoria. La **varianza**, $\text{var}\{x\}$, es una medida de la dispersión o desviación de x respecto de la media $E\{x\}$. Una varianza mayor indica un mayor grado de incertidumbre acerca de la variable aleatoria. En forma específica, cuando se conoce con certeza el valor de una variable, su varianza es cero.

Las fórmulas de la media y la varianza se pueden deducir de la definición general $E\{h(x)\}$ como sigue: para $E\{x\}$, se usa $h(x) = x$ y para $\text{var}\{x\}$ se usa $h(x) = (x - E\{x\})^2$. Entonces,

$$E\{x\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} xp(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b xf(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

$$\text{var}\{x\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} (x - E\{x\})^2 p(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b (x - E\{x\})^2 f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

La base de la deducción de las fórmulas se ve con más facilidad examinando el caso discreto. En él, $E(x)$ es la *suma ponderada* de los valores discretos de x. También $\text{var}\{x\}$ es la *suma ponderada* del cuadrado de la desviación respecto a $E\{x\}$. El caso continuo de puede interpretar en forma parecida, reemplazando la suma por la integral.

Ejemplo 12.3-2

Calcular la media y la varianza de cada uno de los dos experimentos del ejemplo 12.2-1.

Caso 1 (tirada de dado). La función de densidad de probabilidad es $p(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$. Así,

$$E\{x\} = 1(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{1}{6}) + 3(\tfrac{1}{6}) + 4(\tfrac{1}{6}) + 5(\tfrac{1}{6}) + 6(\tfrac{1}{6}) = 3.5$$
$$\text{var}\{x\} = (\tfrac{1}{6})\{(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2\} = 2.917$$

Caso 2 (giro de la aguja). Se supone que la longitud de la aguja es 1 pulgada. Entonces,

$$f(x) = \frac{1}{3.14}, \quad 0 \le x \le 3.14$$

La media y la varianza se calculan como sigue:

$$E(x) = \int_0^{3.14} x\left(\tfrac{1}{3.14}\right)dx = 1.57$$
$$\text{var}(x) = \int_0^{3.14} (x - 1.57)^2 \left(\tfrac{1}{3.14}\right)dx = 0.822$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3B

1. Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria definida en el problema 1, conjunto de problemas 12.2a.
2. Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria del problema 2, conjunto de problemas 12.2a.
3. Demuestre que la media y la varianza de una variable aleatoria uniforme x, $a \le x \le b$ son

$$E\{x\} = \frac{b + a}{2}$$
$$\text{var}\{x\} = \frac{(b - a)^2}{12}$$

4. Si la función densidad de probalidad es $f(x)$, $a \le x \le b$, demuestre que

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

5. Dadas la función densidad de probabilidad $f(x)$, $a \le x \le b$, y la función $y = cx + d$, siendo c y d constantes, demuestre que

$$E\{y\} = cE\{x\} + d$$
$$\text{var}\{y\} = c^2\,\text{var}\{x\}$$

12.3.2 Media y varianza de variables aleatorias conjuntas

Se tienen dos variables aleatorias continuas, x_1, $a_1 \le x_1 \le b_1$ y x_2, $a_2 \le x_2 \le b_2$. Se define a $f(x_1, x_2)$ como la **función de densidad de probabilidad conjunta** de x_1 y x_2, y a $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ como las **funciones de densidad de probabilidades marginales** de x_1 y x_2, respectivamente. Entonces,

$$f(x_1, x_2) \ge 0,\ a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2$$
$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) = 1$$

$$f_1(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2$$

$$f_2(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)dx_1$$

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2), \text{ si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son independientes}$$

Las mismas fórmulas se aplican a las funciones densidad de probabilidad discretas, sustituyendo la integración por la suma.

En esta sección se describirán dos casos especiales:

1. $y = x_1x_2$
2. $y = c_1x_1 + c_2x_2$

Las variables aleatorias x_1 y x_2 se distribuyen en forma conjunta de acuerdo con la función de densidad de probabilidad $f(x_1, x_2)$.

Si x_1 y x_2 son independientes, entonces

$$E\{x_1x_2\} = E\{x_1\}E\{x_2\}$$

Por otro lado, e independientemente de si x_1 y x_2 son independientes o no, se puede demostrar que

$$E\{c_1x_1 + c_2x_2\} = c_1E\{x_1\} + c_2E\{x_2\}$$

También

$$\text{var}\{c_1x_1 + c_2x_2\} = c_1^2 \text{ var}\{x_1\} + c_2^2 \text{ var}\{x_2\} + 2c_1c_2 \text{ cov}\{x_1, x_2\}$$

siendo

$$\begin{aligned}\text{cov}\{x_1, x_2\} &= E\{(x_1 - E\{x_1\})(x_2 - E\{x_2\})\} \\ &= E(x_1x_2 - x_1E\{x_2\} - x_2E\{x_1\} + E\{x_1\}E\{x_2\}) \\ &= E\{x_1x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\}\end{aligned}$$

Si x_1 y x_2 son *independientes*, entonces $E\{x_1x_2\} = E\{x_1\}E\{x_2\}$ y $\text{cov}\{x_1, x_2\} = 0$. Lo inverso no es cierto, en el sentido que dos variables *dependientes* puedan tener covarianza cero.

Ejemplo 12.3-3

En un lote hay cuatro artículos defectuosos (D) y seis buenos (G). Usted selecciona un artículo al azar y lo prueba. Entonces, sin regresar el primero, toma un segundo artículo. Sean las variables aleatorias x_1 y x_2 que representan los resultados para el primero y el segundo artículo, respectivamente.

a. Determine la función de densidad de probabilidad conjunta de x_1 y x_2.
b. Determine la distribución marginal de x_2.
c. Suponga que le dan \$5 por cada artículo bueno que toma, pero que debe pagar \$6 si es defectuoso. Determine la media y la varianza de su ingreso después de haber seleccionado dos artículos.

Sea $p(x_1, x_2)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de x_1 y x_2, y sean $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$ las respectivas funciones de distribución de probabilidades marginales. Primero se calculará $p_1(x_1)$ como sigue:

$$p_1(G) = \frac{6}{10} = 0.6,\ p_1(D) = \frac{4}{10} = 0.4$$

A continuación, se sabe que x_2, el segundo resultado, depende de x_1. Por consiguiente, para calcular $p_2(x_2)$, primero se determina la función de densidad de probabilidad $p(x_1, x_2)$, y a partir de ella se puede calcular la distribución marginal $p_2(x_2)$. Entonces,

$$P\{x_2 = G|x_1 = G\} = \frac{5}{9}$$
$$P\{x_2 = G|x_1 = B\} = \frac{6}{9}$$
$$P\{x_2 = B|x_1 = G\} = \frac{4}{9}$$
$$P\{x_2 = B|x_1 = B\} = \frac{3}{9}$$

Para calcular $p(x_1, x_2)$ se usa la fórmula $P\{AB\} = P\{A|B\}P\{B\}$ (véase la sección 12.1.2). Así,

$$p\{x_2 = G, x_1 = G\} = \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{5}{15}$$
$$p\{x_2 = G, x_1 = B\} = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$$
$$p\{x_2 = B, x_1 = G\} = \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{4}{15}$$
$$p\{x_2 = B, x_1 = B\} = \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{15}$$

Las distribuciones marginales $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$ se pueden determinar resumiendo primero la distribución conjunta, $p(x_1, x_2)$, en un formato de tabla, para entonces agregar los renglones y columnas respectivas, como en la siguiente tabla:

		$x_2 = G$	$x_2 = B$	$p_1(x_1)$
$p(x_1, x_2) =$	$x_1 = G$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{9}{15} = 0.6$
	$x_1 = B$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15} = 0.4$
	$p_2(x_2)$	$\frac{9}{15} = 0.6$	$\frac{6}{15} = 0.4$	

Es interesante que, al contrario de la intuición, $p_1(x_1) = p_2(x_2)$.

El ingreso esperado se puede calcular a partir de la distribución conjunta, teniendo en cuenta que G produce \$5 y B produce $-$\$6. Entonces,

$$\text{Ingreso esperado} = (5 + 5)\left(\tfrac{5}{15}\right) + (5 - 6)\left(\tfrac{4}{15}\right) + (-6 + 5)\left(\tfrac{4}{15}\right) + (-6 - 6)\left(\tfrac{2}{15}\right) = \$1.20$$

Se puede llegar al mismo resultado observando que el ingreso esperado por ambas selecciones es igual a la suma del ingreso esperado para cada selección individual (aunque las dos variables *no* sean independientes). Eso quiere decir que

$$\text{Ingreso esperado} = \text{Ingreso esperado por selección 1} + \text{Ingreso esperado por selección 2}$$
$$= (5 \times 0.6 - 6 \times 0.4) + (5 \times 0.6 - 6 \times 0.4) = \$1.20$$

Para calcular la varianza del ingreso total se observa que

$$\text{var}\{\text{ingreso}\} = \text{var}\{\text{ingreso 1}\} + \text{var}\{\text{ingreso 2}\} + 2\,\text{cov}\{\text{ingreso 1, ingreso 2}\}$$

Como $p_1(x_1) = p_2(x_2)$, entonces var{ingreso 1} = var{ingreso 2}. Para calcular la varianza se usa la ecuación

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

(Véase el problema 4, conjunto de problemas 12.3b.) Entonces,

$$\text{var}\{\text{ingreso 1}\} = [5^2 \times 0.6 + (-6)^2 \times 0.4] - 0.6^2 = 29.04$$

A continuación se calcula la covarianza con la fórmula

$$\text{cov}\{x_1, x_2\} = E\{x_1x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\}$$

El término $E\{x_1x_2\}$ se puede calcular a partir de la función de densidad de probabilidad conjunta de x_1 y x_2 como sigue:

$$\text{Covarianza} = [(5 \times 5)(\tfrac{5}{15}) + (5 \times -6)(\tfrac{4}{15}) + (-6 \times 5)(\tfrac{4}{15}) + (-6 \times -6)(\tfrac{2}{15})] - 0.6 \times 0.6 = -3.23$$

Por lo anterior,

$$\text{Varianza} = 29.04 + 29.04 + 2(-3.23) = 51.62$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3C

1. La función de densidad de probabilidad conjunta de x_1 y x_2 es $p(x_1, x_2)$, como sigue:

$p(x_1, x_2) =$	$x_2 = 3$	$x_2 = 5$	$x_2 = 7$
$x_1 = 1$	0.2	0	0.2
$x_1 = 2$	0	0.2	0
$x_1 = 3$	0.2	0	0.2

a) Determine las funciones densidad de probabilidad conjunta marginales $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$.

b) ¿Son independientes x_1 y x_2?

c) Calcule $E\{x_1 + x_2\}$.

d) Calcule $\text{cov}\{x_1, x_2\}$.

e) Calcule $\text{var}\{5x_1 - 6x_2\}$.

12.4 CUATRO DISTRIBUCIONES COMUNES DE PROBABILIDADES

En las secciones 12.2 y 12.3 se describió la distribución uniforme (discreta y continua). En esta sección se presentan otras cuatro funciones de distribución de probabilidad que surgen con frecuencia en estudios de investigación de operaciones: binomial y de Poisson discretas, y exponencial y normal continuas.

12.4.1 Distribución binomial

Suponga que un fabricante produce determinado artículo en lotes de n piezas. La fracción de artículos defectuosos en cada lote es p, y se estima con datos históricos. Se desea determinar la función de densidad de probabilidad de la cantidad de piezas defectuosas en un lote.

Hay $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ combinaciones distintas de x defectuosas en un lote de n piezas, y la probabilidad de obtener cada probabilidad es $p^x(1 - p)^{n-x}$. En consecuencia, según la ley

aditiva de la probabilidad, la probabilidad de que haya k defectuosas en un lote de n artículos es

$$P\{x = k\} = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Ésta es la distribución binomial, con parámetros n y p; su media y su varianza son

$$E\{x\} = np$$
$$\text{var}\{x\} = np(1 - p)$$

Ejemplo 12.4-1

Las tareas diarias de John Doe requieren hacer 10 viajes redondos en automóvil entre dos pueblos. Una vez que termina, puede descansar el resto del día; eso lo motiva a manejar a mayor velocidad que la permitida. La experiencia demuestra que hay 40% de probabilidades de que lo multen en cualquiera de los viajes redondos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día no le levanten infracción?
b) Si cada boleta de infracción equivale a \$150, ¿cuál es la multa diaria promedio?

La probabilidad de ser multado en cualquier vuelta es $p = 0.4$. Entonces, la probabilidad de no ser multado en un día cualquiera es

$$P\{x = 0\} = C_0^{10}(0.4)^0(0.6)^{10} = 0.006$$

Eso quiere decir que hay menos de 1% de probabilidades de terminar el día sin ser multado. De hecho, la multa diaria promedio se calcula como sigue:

$$\text{Multa promedio} = \$150E\{x\} = \$150(np) = \$150 - 10 - 0.4 = \$600$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.4A

1. Se tira 10 veces un dado no cargado. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga un número par?

2. Suponga que se tiran cinco monedas no cargadas, en forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una de ellas salga distinta de las otras cuatro?

3. Un adivino pretende predecir si las personas amasarán poderío financiero en su vida, examinando su caligrafía. Para comprobar esta afirmación, se pidió a 10 millonarios y 10 profesores universitarios que proporcionaran muestras de su caligrafía. Las muestras se aparean, una de un millonario con una de un profesor, y se presentan al adivino. Se admitirá la afirmación como cierta si el adivino hace al menos ocho predicciones correctas. ¿Cuál es la probabilidad de que su afirmación sea "charlatanería" bajo estas condiciones?

4. En un juego de azar en un casino, se le pide a usted seleccionar un número del 1 al 6 antes de que el operador tire tres dados no cargados al mismo tiempo. El casino le pagará tantos \$ como cantidad de dados que salen con lo que seleccionó. Si ninguno de ellos coincide, usted paga sólo \$1 al casino. ¿Cuál es el ingreso que espera usted, a la larga, en este juego?

5. Suponga que juega lo siguiente: tira dos dados no cargados. Si no salen igual, usted paga 10 centavos. Si salen igual, a usted le pagan 50 centavos. ¿Cuál es el ingreso esperado con ese juego?

6. Demuestre las fórmulas para la media y la varianza de la distribución normal.

12.4.2 Distribución de Poisson

Los clientes llegan a un banco o a una tienda en forma "totalmente aleatoria", lo que quiere decir que no hay forma de pronosticar cuándo va a llegar alguien. La función de densidad de probabilidad para describir la cantidad de tales llegadas durante determinado periodo se apega a la distribución de Poisson.

Sea x la cantidad de eventos (es decir, llegadas) que hay dentro de determinada unidad de tiempo, por ejemplo un minuto o una hora. La función de densidad de probabilidad de Poisson es entonces

$$P\{x = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

La media y la varianza de Poisson son

$$E\{x\} = \lambda$$
$$\text{var}\{x\} = \lambda$$

La distribución de Poisson es importante en el estudio de las filas de espera (véase el capítulo 17).

Ejemplo 12.4-2

Los trabajos de reparación llegan a un taller en forma totalmente aleatoria, con una tasa o frecuencia de 10 diarios.

a) ¿Cuál es la cantidad promedio de trabajos que se reciben diariamente en el taller?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen trabajos durante cualquier hora, suponiendo que el taller abre 8 horas diarias?

La cantidad promedio de trabajos recibidos por día es igual a $\lambda = 10$ trabajos por día. Para calcular la probabilidad de que no hayan llegadas por *hora* se debe calcular la frecuencia de llegadas por hora, que es $\lambda_{\text{hora}} = \frac{10}{8} = 1.25$ trabajos por hora. Así,

$$P\{\text{no llegan en una hora}\} = \frac{(\lambda_{\text{hora}})^0 e^{-\lambda_{\text{hora}}}}{0!}$$
$$= \frac{1.25^0 e^{-1.25}}{0!} = 0.2865$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.4B

1. Los clientes llegan a una instalación de servicio de acuerdo con la distribución de Poisson, con una frecuencia de cuatro por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un cliente llegue en determinado intervalo de 30 segundos?
2. La distribución de Poisson, con parámetro λ, se aproxima a la distribución normal con parámetros (n, p) cuando n es suficientemente grande, p es suficientemente pequeña y λ es aproximadamente igual a np (se dice matemáticamente que $n \to \infty$, $p \to 0$ y $np \to \lambda$). Demuestre este resultado para el caso en que se sabe que un lote manufacturado contiene 1% de piezas defectuosas. Si se toma una muestra de 10 piezas del lote, calcule la probabilidad de que cuando mucho haya una pieza defectuosa en la muestra. Primero use la distribución binomial (resultado exacto) y después con la distribución de Poisson (resultado aproximado). Demuestre que la aproximación no se podrá aceptar si el valor de p aumenta por ejemplo a 0.5.

3. A un mostrador llegan 20 clientes por hora, en forma aleatoria.
   a) Determine la probabilidad de que el mostrador esté vacío.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos haya 2 personas en fila, aguardando el servicio?
4. Demuestre las fórmulas de la media y la varianza de la distribución de Poisson.

12.4.3 Distribución exponencial negativa

Si la *cantidad* de llegadas a una instalación de servicio se apega a una distribución de Poisson (Sección 12.4.2) entonces, en forma automática, la distribución del *intervalo de tiempo* entre las llegadas sucesivas debe tener una distribución exponencial negativa (o simplemente, exponencial). En forma específica, si λ es la frecuencia con que suceden los eventos de Poisson, entonces la distribución de tiempos x entre llegadas sucesivas es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$$

La gráfica de $f(x)$ se ve en la figura 12.3.

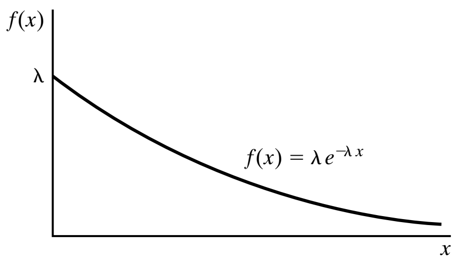


FIGURA 12.3
Función de densidad de probabilidades de la distribución exponencial

La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$E\{x\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{var}\{x\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

La media $E\{x\}$ es consistente con la definición de λ. Si λ es la *frecuencia, rapidez* o *tasa* con que suceden los eventos, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es el intervalo promedio de tiempo entre eventos sucesivos.

Ejemplo 12.4-3

A una gasolinera llegan automóviles en forma aleatoria, y en promedio cada 2 minutos. Determinar la probabilidad de que el tiempo entre llegadas no sea mayor que un minuto.

La probabilidad que se busca tiene la forma $P\{x \leq A\}$, donde $A = 1$ minuto, en este ejemplo. La determinación de esta probabilidad es igual que calcular la función de distribución acumulada de x, esto es

$$\begin{aligned} P\{x \leq A\} &= \int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -e^{-\lambda x}\Big|_0^A \\ &= 1 - e^{-\lambda A} \end{aligned}$$

Para este ejemplo, la frecuencia de llegadas es

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \text{ llegada por minuto}$$

Entonces,

$$P\{x \leq 1\} = 1 - e^{-(\frac{1}{2})(1)} = 0.3935$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.4C

1. Los clientes de Walmark Store viven en el pueblo y áreas vecinas. Los clientes del pueblo llegan con una frecuencia de 5 por minuto, y los de los alrededores llegan con una frecuencia de 7 por minuto. Las llegadas son totalmente aleatorias. Calcule la probabilidad de que el tiempo entre llegadas de todos los clientes sea menor que 5 segundos.
2. Demuestre las fórmulas de la media y la varianza de la distribución exponencial.

12.4.4 Distribución normal

La distribución normal describe muchos fenómenos aleatorios que suceden en la vida cotidiana, como calificaciones de pruebas, pesos, alturas y otros más. La función de distribución normal de probabilidades se define como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < \infty$$

La media y la varianza son

$$E\{x\} = \mu$$
$$\text{var}\{x\} = \sigma^2$$

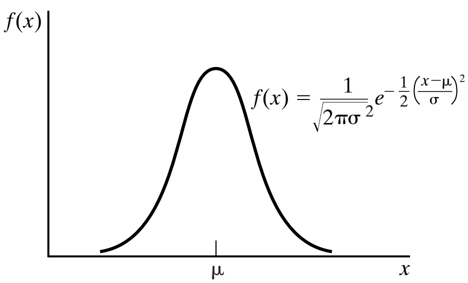
Se suele usar la notación $N(\mu, \sigma)$ para representar una distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

En la figura 12.4 se ve la gráfica de la función de distribución normal de probabilidades, $f(x)$. Esta función siempre es simétrica respecto a la media μ.

Una propiedad importante de la variable aleatoria normal es que se aproxima a la distribución del promedio de una muestra tomada de *cualquier* distribución. Este notable resultado se basa en el teorema siguiente:

FIGURA 12.4

Función de densidad de probabilidades de la variable aleatoria normal



Teorema del límite central. *Sean* $x_1, x_2, \ldots,$ y x_n *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una con media* μ *y desviación estándar* σ; *defínase*

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

A medida que n se hace grande ($n \to \infty$), *la distribución de* s_n *se vuelve normal, en forma asintótica, con media* $n\mu$ *y varianza* $n\sigma^2$, *independientemente de la distribución original de* $x_1, x_2, \ldots,$ y x_n.

El teorema del límite central indica, en especial, que la distribución *del promedio* de una muestra de tamaño n tomada de cualquier distribución es asintóticamente normal, con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. Este resultado tiene aplicaciones importantes en el desarrollo de las gráficas de estadísticas de control de calidad.

La función de distribución acumulada de la variable aleatoria normal no se puede determinar en forma cerrada. En consecuencia, se han preparado tablas de esa distribución (véase la tabla 1, apéndice C) para ello. Esas tablas se aplican a la distribución **normal estándar** con media cero y desviación estándar 1; esto es, a $N(0, 1)$. Toda variable aleatoria normal x, con media μ y desviación estándar σ, se puede convertir en su forma normal estándar z, con la transformación

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Más del 99% del área bajo cualquier distribución normal está comprendida en el intervalo $\mu - 3\sigma \le x \le \mu + 3\sigma$, a ese intervalo se le llama **límites de seis sigma**.

Ejemplo 12.4-4

El diámetro interno de un cilindro tiene la especificación 1 ± 0.03 pulg. La producción de un proceso de maquinado tiene una distribución normal con media 1 pulg y desviación estándar 0.1 cm. Determine el porcentaje de la producción que cumpla con las especificaciones.

Sea x la dimensión que se obtiene en el proceso. La probabilidad de que un cilindro cumpla con las especificaciones es

$$P\{1 - 0.03 \le x \le 1 + 0.03\} = P\{0.97 \le x \le 1.03\}$$

Como $\mu = 1$ (cm) y $\sigma = 0.01$ (cm), la formulación de la probabilidad normal estándar equivalente es

$$\begin{aligned} P\{0.97 \le x \le 1.03\} &= P\{\tfrac{0.97 - 1}{0.1} \le z \le \tfrac{1.03 - 1}{0.1}\} \\ &= P\{-0.3 \le z \le 0.3\} \\ &= P\{z \le 0.3\} - P\{z \le -0.3\} \\ &= P\{z \le 0.3\} - P\{z \ge 0.3\} \\ &= P\{z \le 0.3\} - [1 - P\{z \le 0.3\}] \\ &= 2P\{z \le 0.3\} - 1 \\ &= 2 \times 0.6179 - 1 \\ &= 0.2358 \end{aligned}$$

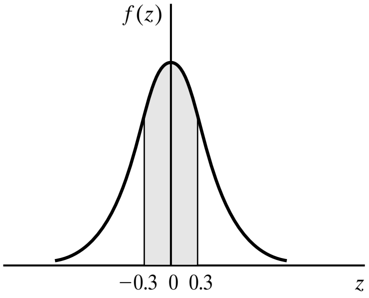


FIGURA 12.5
Cálculo de $P\{-0.3 \leq z \leq 0.3\}$ en una distribución normal estándar

Estos enunciados de probabilidad se pueden justificar con el área sombreada de la figura 12.5. Observe que $P\{z \leq 0.3\} = 1 - p\{x \leq 0.3\}$, por la simetría de la función de densidad de probabilidades. El valor $P\{z \leq 0.3\} = 0.6179$ se obtiene en la tabla normal estándar (tabla 1 del apéndice C).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.4D

1. La escuela de ingeniería de la U de A requiere una calificación ACT mínima de 26. Las calificaciones de la prueba de los egresados de preparatoria de determinada escuela tiene distribución normal con media 22 y desviación estándar 2.

a) Calcule el porcentaje de los egresados de la preparatoria que posiblemente sean admitidos.

b) Si la U de A no acepta alumnos con calificación ACT menor que 17, determine el porcentaje de los alumnos que no serán elegibles para su admisión en la U de A.

2. Los pesos de las personas que quieren dar una vuelta en helicóptero, en un parque de diversiones, tienen 180 lb de media y 15 lb de desviación estándar. El helicóptero puede llevar cinco personas, pero su capacidad máxima de peso es 1000 lb. ¿Cuál es la probabilidad de que el helicóptero no despegue con cinco personas a bordo? (*Sugerencia:* aplique el teorema del límite central.)

3. El diámetro interno de un cilindro tiene una distribución normal con una media de 1 cm y desviación estándar de 0.01 cm. Se debe introducir una varilla dentro de cada cilindro. El diámetro de la varilla también tiene distribución normal con 0.99 cm de media y desviación estándar de 0.01 cm. Calcule el porcentaje de pares de varilla y cilindro que no ajusten al ensamblarlos. (*Sugerencia:* la diferencia entre dos variables aleatorias normales también es normal.)

12.5 DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS

En las secciones anteriores se presentaron las propiedades de las funciones de distribución de probabilidades y de las funciones de distribución acumulada para variables aleatorias, y se describieron ejemplos de cinco distribuciones comunes: uniforme, binomial, de Poisson, exponencial y normal. ¿Cómo determinar esas distribuciones en la práctica?

La determinación, que en realidad es estimación, de cualquier función de densidad de probabilidades tiene su base en los datos brutos que se reúnen acerca de la situación que se estudia. Por ejemplo, para estimar la función de densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas de clientes a una tienda, se podría anotar la hora de llegada de los clientes. Los datos buscados entre las llegadas son las diferencias entre las horas sucesivas de llegada.

En esta sección se indica cómo se pueden convertir los datos muestreados en funciones de distribución de probabilidad, de acuerdo con los siguientes pasos:

Paso 1. Resumir los datos brutos en forma de un histograma adecuado de frecuencias, y determinar la función empírica de distribución de probabilidades correspondiente.

Paso 2. Usar la *prueba de bondad del ajuste* para ver si la función empírica de distribución de probabilidades tiene la forma de una distribución teórica.

Histograma de frecuencias. Un histograma de frecuencias se forma con los datos brutos dividiendo el intervalo de ellos (valor mínimo a valor máximo) en intervalos que no se traslapen. Dados los límites (I_{i-1}, I_i) del intervalo i, la frecuencia correspondiente es la cantidad (o el conteo) de todos los datos brutos x que satisfacen $I_{i-1} < x \leq I_i$.

Ejemplo 12.5-1

Los datos de la tabla siguiente representan el tiempo de servicio (en minutos) en una instalación de servicio, para una muestra de 60 clientes.

0.7	0.4	3.4	4.8	2.0	1.0	5.5	6.2	1.2	4.4
1.5	2.4	3.4	6.4	3.7	4.8	2.5	5.5	0.3	8.7
2.7	0.4	2.2	2.4	0.5	1.7	9.3	8.0	4.7	5.9
0.7	1.6	5.2	0.6	0.9	3.9	3.3	0.2	0.2	4.9
9.6	1.9	9.1	1.3	10.6	3.0	0.3	2.9	2.9	4.8
8.7	2.4	7.2	1.5	7.9	11.7	6.3	3.8	6.9	5.3

Los valores mínimo y máximo de los datos son 0.2 y 11.7, respectivamente. Eso quiere decir que se pueden convertir todos los datos con el intervalo (0, 12). En forma arbitraria se divide el intervalo (0, 12) en 12 intervalos, cada uno de 1 minuto de ancho. La selección adecuada del ancho de intervalo es fundamental para capturar la forma de la distribución empírica. Aunque no hay reglas definidas para determinar el ancho óptimo del intervalo, una regla general es usar de 10 a 20 intervalos. En la práctica se podrá necesitar hacer la prueba con distintos anchos, para encontrar un histograma aceptable.

La tabla siguiente resume la información del histograma de los datos anteriores. La columna Frecuencia relativa, f_i, se calcula dividiendo los elementos en la columna Frecuencia observada, O_i, entre la cantidad total de observaciones ($n = 60$). Por ejemplo, $f_1 = \frac{11}{60} = 0.1833$. La columna Frecuencia acumulada, F_i, se genera sumando los valores sucesivos de f_i. Así, $F_1 = f_1 = 0.1833$ y $F_2 = F_1 + f_2 = 0.1833 + 0.1333 = 0.3166$.

i	Intervalo	Contador de observaciones	Frecuencia observada, O_i	Frecuencia relativa, f_i	Frecuencia relativa acumulada, F_i
1	(0, 1)	𝍸 𝍸 |	11	0.1833	0.1833
2	(1, 2)	𝍸 |||	8	0.1333	0.3166
3	(2, 3)	𝍸 ||||	9	0.1500	0.4666
4	(3, 4)	𝍸 ||	7	0.1167	0.5833
5	(4, 5)	𝍸 |	6	0.1000	0.6833
6	(5, 6)	𝍸	5	0.0833	0.7666
7	(6, 7)	||||	4	0.0667	0.8333
8	(7, 8)	||	2	0.0333	0.8666
9	(8, 9)	|||	3	0.0500	0.9166
10	(9, 10)	|||	3	0.0500	0.9666
11	(10, 11)	|	1	0.0167	0.9833
12	(11, 12)	|	1	0.0167	1.0000
Totales			60	1.0000	

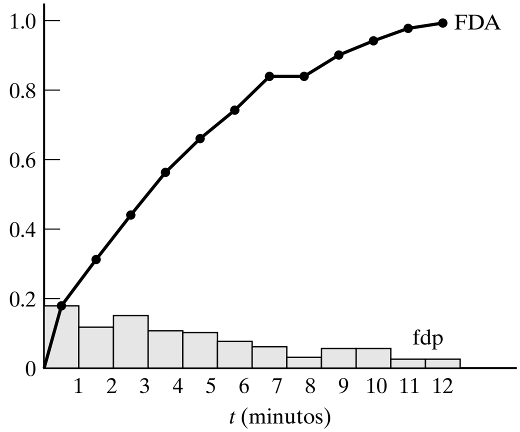


FIGURA 12.6
Función fdp y función FDA lineal en intervalos de una distribución empírica

El valor de f_i y F_i proporcionan las equivalencias de la función de densidad de probabilidades, y de la función de distribución acumulada, respectivamente, para el tiempo de servicio t. Como el histograma de frecuencias muestra una versión "discretizada" del tiempo continuo de servicio, se puede convertir la frecuencia de distribución acumulada que resulta en una función continua en intervalos, uniendo los puntos resultantes con segmentos de recta. La figura 12.6 muestra la fdp (función de densidad de probabilidades) y la FDA (función de distribución acumulada) para este ejemplo. La FDA, como se ve en el histograma, se define en los puntos medios de los intervalos.

Ahora se pueden estimar la media $\bar{t}$, y la varianza s_t^2, de la distribución empírica como sigue: sea N la cantidad de intervalos en el histograma; se define $\bar{t}_i$ como el punto medio del intervalo i. Entonces,

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{N} \bar{t}_i f_i$$

$$s_t^2 = \sum_{i=1}^{N} (\bar{t}_i - \bar{t})^2 f_i$$

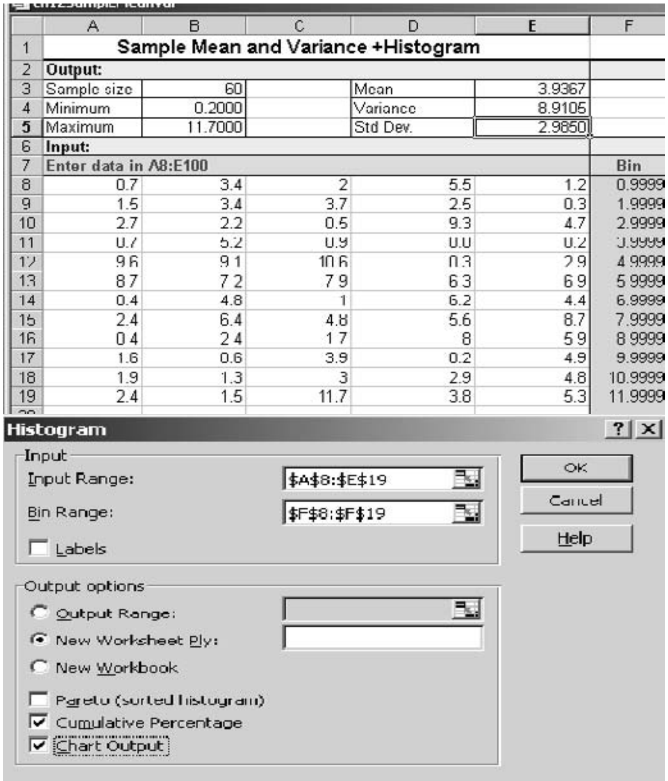
Al aplicar estas fórmulas a este ejemplo se obtiene

$$\bar{t} = 0.1833 \times 0.5 + 0.133 \times 1.5 + \ldots + 11.5 \times 0.0167 = 3.934 \text{ minutos}$$

$$s_t^2 = 0.1883 \times (0.5 - 3.934)^2 + 0.1333 \times (1.5 - 3.934)^2 + \ldots + 0.0167 \times (11.5 - 3.934)^2 = 8.646 \text{ minutos}^2$$

Histogramas con la hoja de cálculo Excel. Se pueden hacer histogramas con comodidad usando una hoja de cálculo Excel. En la barra de menú seleccione `Tools` ⇒ `Data Analysis` ⇒ `Histogram` (Herramientas/Análisis de datos/Histograma), y escriba los datos pertinentes en el cuadro de diálogo. La herramienta Histograma de Excel no calcula la media y la desviación estándar del histograma de frecuencias, en forma directa, como parte de los resultados.[2] Por esta razón se proporciona la plantilla ch12SampleMeanVar.xls de Excel para calcular la

[2] Excel tiene la herramienta especial Análisis de datos, Estadística descriptiva, que se puede usar para calcular la sección media y la varianza, así como ¡muchas medidas estadísticas que nunca usará usted!



	A	B	C	D	E	F
1	Sample Mean and Variance +Histogram					
2	Output:					
3	Sample size	60		Mean	3.9367	
4	Minimum	0.2000		Variance	8.9105	
5	Maximum	11.7000		Std Dev.	2.9850	
6	Input:					
7	Enter data in A8:E100					Bin
8	0.7	3.4	2	5.5	1.2	0.9999
9	1.5	3.4	3.7	2.5	0.3	1.9999
10	2.7	2.2	0.5	9.3	4.7	2.9999
11	0.7	5.2	0.9	0.0	0.2	3.9999
12	9.6	9.1	10.6	0.3	2.9	4.9999
13	8.7	7.2	7.9	6.3	6.9	5.9999
14	0.4	4.8	1	6.2	4.4	6.9999
15	2.4	6.4	4.8	5.6	8.7	7.9999
16	0.4	2.4	1.7	8	5.9	8.9999
17	1.6	0.6	3.9	0.2	4.9	9.9999
18	1.9	1.3	3	2.9	4.8	10.9999
19	2.4	1.5	11.7	3.8	5.3	11.9999

FIGURA 12.7

Datos y cuadro de diálogo para el histograma de Excel, en el ejemplo 12.5-1

media, varianza, máximo y mínimo muestrales, y permite usar la herramienta Histograma de Excel.

La figura 12.7 muestra los datos del ejemplo 12.5-1 en las celdas A8:E19. Esta plantilla actualiza en forma automática las medidas estadísticas o "estadísticos" media, desviación estándar, mínimo y máximo, a medida que se capturan los datos en la hoja de cálculo.

Para trazar el histograma se definen primero los límites superiores de los intervalos y se escriben en la columna F, comenzando en el renglón 8. En este ejemplo se usan las celdas F8:F19 para especificar los límites de intervalo. El lugar de los datos muestrales y los límites de intervalo deberá estar ya definido en el cuadro de diálogo de la herramienta Histograma (que se ve en la parte inferior de la figura 12.7):

Input range: A8:E19

Bin Range: F8:F19

Ouput Options: Paloma en Cumulative Percentage y en Chart Output

Ahora haga clic en Aceptar. Los resultados aparecen como en la figura 12.8.

Prueba de bondad de ajuste. Esta prueba evalúa si la muestra que se usó para determinar la distribución empírica se ajusta a determinada distribución teórica. Se puede hacer una eva-

	A	B	C
1	*Bin*	*Frequency*	*umulative %*
2	0.9999	11	18.33%
3	1.9999	8	31.67%
4	2.9999	9	46.67%
5	3.9999	7	58.33%
6	4.9999	6	68.33%
7	5.9999	5	76.67%
8	6.9999	4	83.33%
9	7.9999	2	86.67%
10	8.9999	3	91.67%
11	9.9999	3	96.67%
12	10.9999	1	98.33%
13	11.9999	1	100.00%
14	More	0	100.00%

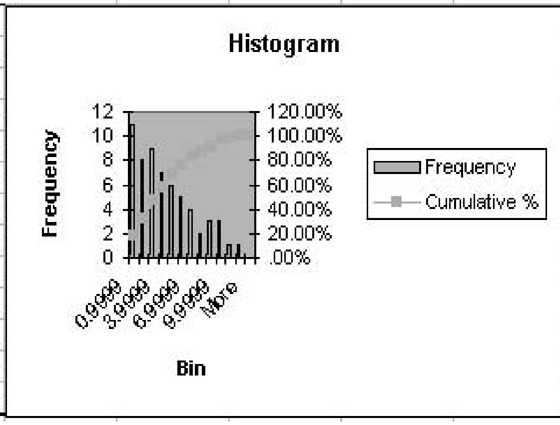


FIGURA 12.8

Resultados del histograma del ejemplo 12.5-1 en Excel

luación inicial de los datos comparando la función de distribución acumulada empírica con la función correspondiente teórica supuesta. Si las dos funciones acumuladas no se desvían mucho entre sí, es probable que la muestra se haya tomado de la distribución teórica propuesta. Este “olfateo” inicial se puede fortalecer después aplicando la prueba de bondad de ajuste. El ejemplo siguiente describe los detalles del procedimiento.

Ejemplo 12.5-2

Probar los datos del ejemplo 12.5-1, para ver si la distribución es exponencial.

Lo primero que se debe hacer es especificar la función que define la distribución teórica. De acuerdo con el ejemplo 12.5-1, $\bar{t} = 3.934$ minutos. En consecuencia, $\lambda = \frac{1}{3.934} = 0.2542$ servicio por minuto para la distribución exponencial propuesta (véase la sección 12.4.3) y sus funciones de distribución de probabilidades y acumulada son

$$f(t) = 0.2542e^{-0.2542t},\ t > 0$$

$$F(T) = \int_0^T f(t)dt = 1 - e^{-0.2542T},\ T > 0$$

Se puede usar $F(T)$, la función de distribución acumulada, para calcular la función de distribución acumulada para $T = 0.5, 1.5, ...,$ y 11.5, para entonces compararla gráficamente con los valores empíricos F_i, $i = 1, 2, ..., 12$ que se dieron en el ejemplo 12.5-1. Por ejemplo,

$$F(0.5) = 1 - e^{-(0.2542\times 0.5)} \approx 0.12$$

La figura 12.9 muestra la comparación. Un examen comparativo de las dos gráficas parece indicar que en verdad los datos observados se pueden ajustar en forma razonable a la distribución exponencial.

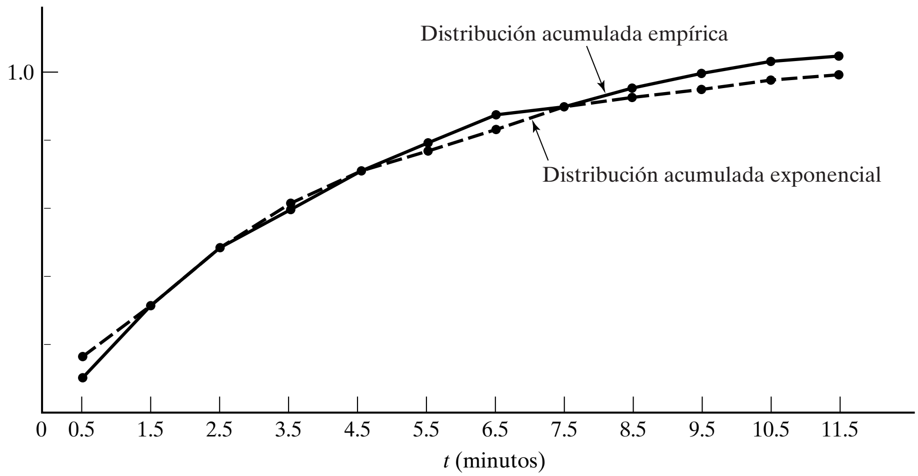


FIGURA 12.9
Comparación de las funciones de densidad acumulada empírica y teórica

El siguiente paso es implementar la prueba de bondad de ajuste. Hay dos pruebas para ello: 1) la prueba de **Kolmogrov-Smirnov,** y 2) la prueba **ji cuadrada**. Aquí limitaremos la presentación a la prueba ji cuadrada.

Esta prueba se basa en medir la desviación entre las frecuencias empírica y teórica que corresponden a los diversos intervalos del histograma obtenido. En forma específica, la frecuencia teórica n_i correspondiente a la frecuencia observada o_i en el intervalo i se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} n_i &= n\int_{I_{i-1}}^{I_i} f(t)dt \\ &= n(F(I_i) - F(I_{i-1})) \\ &= 60(e^{-0.2542I_{i-1}} - e^{-0.2542I_i}) \end{aligned}$$

Dadas o_i y n_i para el intervalo i del histograma, una medida de la desviación entre las frecuencias empírica y observada se calcula de esta forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(o_i - n_i)^2}{n_i}$$

A medida que $N \to \infty$, χ^2 tiene asintóticamente una función de densidad de probabilidades ji cuadrada, con $N - k - 1$ grados de libertad, siendo k la cantidad de parámetros estimados con los datos brutos o graficados, y se usa para definir la distribución teórica.

La hipótesis nula dice que la muestra observada se toma de la distribución teórica $f(t)$, y se acepta si

$$\chi^2 < \chi^2_{N-k-1,\, 1-\alpha}$$

donde $\chi^2_{N-k-1,\, 1-\alpha}$ es el valor de ji cuadrada para $N - k - 1$ grados de libertad, y α es el nivel de significado.

En la tabla siguiente se muestran los cálculos de la prueba

i	Intervalo	Frecuencia observada, o_i		Frecuencia teórica, n_i		$\frac{(o_i - n_i)^2}{n_i}$
1	(0, 1)	11		13.448		0.453
2	(1, 2)	8		10.435		0.570
3	(2, 3)	9		8.095		0.100
4	(3, 4)	7		6.281		0.083
5	(4, 5)	6	11	4.873	8.654	0.636
6	(5, 6)	5		3.781		
7	(6, 7)	4		2.933		
8	(7, 8)	2	9	2.276	6.975	0.588
9	(8, 9)	3		1.766		
10	(9, 10)	3		1.370		
11	(10, 11)	1	5	1.063	6.11	0.202
12	(11, ∞)	1		3.678		
Totales		$n = 60$		$n = 60$		χ^2-valor de $= 2.623$

Como regla general, el conteo de frecuencia teórica esperado en cualquier intervalo debe ser cuando menos 5. Este requisito se cumple normalmente combinando intervalos sucesivos hasta satisfacerlo, como se ve en la tabla. La cantidad resultante de intervalos es $N = 7$. Como se está estimando un parámetro (λ) con los datos observados, los grados de libertad de la ji cuadrada deben ser $7 - 1 - 1 = 5$. Si se supone un nivel de significado $\alpha = 0.05$, la tabla de ji cuadrada (ta- bla 3 del apéndice C) contiene el valor crítico $x^2_{5,\,0.005} = 11.07$. Como el valor de χ^2 $(= 2.623)$ es menor que el valor crítico, se acepta la hipótesis que la muestra se tomó de la función de densidad de probabilidades que se propuso.

Se puede automatizar el cálculo de la tabla anterior modificando los resultados en la hoja de cálculo del histograma (Figura 12.8). La figura 12.10 muestra cómo se logra esta tarea con el ejemplo que nos ocupa. Las columnas A, B y C son resultados del histograma (la columna C se convirtió al formato de punto decimal). Las fórmulas necesarias para hacer los cálculos en la columna D son específicas de la hipótesis. Una vez terminadas, las fórmulas de las columnas que restan deberían ser directas.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Bin*	*oi*	*cpi*	*ni*	*combined ni*	*combined oi*	*chi*
2	0.9999	11	0.183	13.448	13.448	11	0.446
3	1.9999	8	0.317	10.435	10.435	8	0.568
4	2.9999	9	0.467	8.096	8.096	9	0.101
5	3.9999	7	0.583	6.281	6.281	7	0.082
6	4.9999	6	0.683	4.873	8.654	11	0.636
7	5.9999	5	0.767	3.781			
8	6.9999	4	0.833	2.933	6.975	9	0.588
9	7.9999	2	0.867	2.276			
10	8.9999	3	0.917	1.766			
11	9.9999	3	0.967	1.370	6.111	5	0.202
12	10.9999	1	0.983	1.063			
13	100	1	1.000	3.678			
14	sum	60		60	60		2.623

FIGURA 12.10

Cálculos del estadístico ji cuadrada a partir de los resultados del histograma, en Excel

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.5A

1. Los datos siguientes representan los tiempos (en minutos) entre llegadas a una instalación de servicio:

4.3	3.4	0.9	0.7	5.8	3.4	2.7	7.8
4.4	0.8	4.4	1.9	3.4	3.1	5.1	1.4
0.1	4.1	4.9	4.8	15.9	6.7	2.1	2.3
2.5	3.3	3.8	6.1	2.8	5.9	2.1	2.8
3.4	3.1	0.4	2.7	0.9	2.9	4.5	3.8
6.1	3.4	1.1	4.2	2.9	4.6	7.2	5.1
2.6	0.9	4.9	2.4	4.1	5.1	11.5	2.6
0.1	10.3	4.3	5.1	4.3	1.1	4.1	6.7
2.2	2.9	5.2	8.2	1.1	3.3	2.1	7.3
3.5	3.1	7.9	0.9	5.1	6.2	5.8	1.4
0.5	4.5	6.4	1.2	2.1	10.7	3.2	2.3
3.3	3.3	7.1	6.9	3.1	1.6	2.1	1.9

a) Use Excel (u otra hoja de cálculo) para definir tres histogramas para los datos, con base en anchos de intervalo de 0.5, 1 y 1.5 minutos, respectivamente.

b) Haga una comparación gráfica de la función de distribución acumulada empírica para los datos y la de la distribución exponencial.

c) Pruebe la hipótesis que la muestra se tomó de una distribución exponencial. Use un nivel de confianza de 95 por ciento.

d) ¿Cuál de los tres histogramas es "el mejor" para fines de prueba de la hipótesis nula?

2. Los datos siguientes representan el periodo, en segundos, necesario para transmitir un mensaje.

25.8	67.3	35.2	36.4	58.7
47.9	94.8	61.3	59.3	93.4
17.8	34.7	56.4	22.1	48.1
48.2	35.8	65.3	30.1	72.5
5.8	70.9	88.9	76.4	17.3
77.4	66.1	23.9	23.8	36.8
5.6	36.4	93.5	36.4	76.7
89.3	39.2	78.7	51.9	63.6
89.5	58.6	12.8	28.6	82.7
38.7	71.3	21.1	35.9	29.2

Use Excel para obtener un histograma adecuado. Pruebe la hipótesis que esos datos se toman de una distribución uniforme, con un nivel de confianza de 95%, teniendo en cuenta la siguiente información adicional acerca de la distribución uniforme teórica:

a) El intervalo de la distribución es de 0 a 100.

b) El intervalo de la distribución se estima a partir de los datos muestrales.

c) El límite máximo del intervalo de la distribución es 100, pero su límite mínimo se debe estimar con los datos de la muestra.

3. Con un dispositivo automático se cuenta el volumen de tráfico en un crucero céntrico. El instrumento anota la hora en que un automóvil llega al crucero, en una escala continua que comienza en cero. La tabla siguiente muestra el tiempo (acumulado) de llegada (en minutos) para los primeros 60 vehículos. Use Excel para definir un histograma adecuado y a continuación pruebe la hipótesis que el tiempo entre llegadas se toma de una distribución exponencial. Use un nivel de confianza de 95 por ciento.

Llegada	Tiempo de llegada (min)	Llegada	Tiempo de llegada (min)	Llegada	Tiempo de llegada (min)	Llegada	Tiempo de llegada (min)
1	5.2	16	67.6	31	132.7	46	227.8
2	6.7	17	69.3	32	142.3	47	233.5
3	9.1	18	78.6	33	145.2	48	239.8
4	12.5	19	86.6	34	154.3	49	243.6
5	18.9	20	91.3	35	155.6	50	250.5
6	22.6	21	97.2	36	166.2	51	255.8
7	27.4	22	97.9	37	169.2	52	256.5
8	29.9	23	111.5	38	169.5	53	256.9
9	35.4	24	116.7	39	172.4	54	270.3
10	35.7	25	117.3	40	175.3	55	275.1
11	44.4	26	118.2	41	180.1	56	277.1
12	47.1	27	124.1	42	188.8	57	278.1
13	47.5	28	127.4	43	201.2	58	283.6
14	49.7	29	127.6	44	218.4	59	299.8
15	67.1	30	127.8	45	219.9	60	300.0

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2a. ed., vols. 1 y 2, Wiley, Nueva York, 1967.

Papoulis, A., *Probability and Statistics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.

Parzen, E., *Modern Probability Theory and Its Applications*, Wiley, Nueva York, 1960.

Paulos, J. A., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, Hill and Wand, Nueva York, 1988.

Ross, S., *Introduction to Probability Models*, 5a. ed., Academic Press, Nueva York, 1993.

C A P Í T U L O 13

Modelos de pronóstico

En la toma de decisiones se elaboran planes para el futuro. Entonces, los datos que describen la situación de la decisión deben representar lo que sucederá en el futuro. Por ejemplo, en el control de inventarios, las decisiones se basan en la naturaleza de la demanda del artículo controlado durante determinado horizonte de planeación. También, en la planeación financiera, se necesita pronosticar la pauta del flujo de efectivo a través del tiempo.

En este capítulo se presentan tres técnicas para pronosticar cambios futuros en el valor de determinada variable en función del tiempo. Son promedio móvil, suavización exponencial y regresión. También se presentan cálculos de esas técnicas, basados en hoja de cálculo Excel.*

13.1 TÉCNICA DEL PROMEDIO MÓVIL

En esta técnica se supone que la serie de tiempo[1] es estable en el sentido que su valor y_t para el periodo t sigue un proceso constante que se describe con:

$$y_t = b + \varepsilon_t$$

en donde

b = Parámetro constante desconocido, estimado a partir de datos históricos

ε_i = Componente aleatorio (ruido) para el periodo t, con media cero y varianza constante

La técnica supone que no están correlacionados los datos para los distintos periodos.

La técnica del promedio móvil supone que las n observaciones más recientes tienen igual importancia para estimar el parámetro b. Así, en determinado periodo t, si los datos para los n periodos más recientes son $y_{t-n+1}, y_{t-n+2}, \ldots, y_t$, entonces el valor *estimado* para el periodo $t + 1$ se calcula como sigue:

$$y^*_{t+1} = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \ldots + y_t}{n}$$

*N del R.T.: Lo mencionado en este capítulo está disponible en Excel en español. Hay que incluirlo al instalar Excel.

No hay una regla exacta para seleccionar n, la base del promedio móvil. Si las variaciones de la variable permanecen razonablemente constantes al paso del tiempo, se recomienda una n grande. En caso contrario, si los datos tienen pautas cambiantes, se aconseja un valor pequeño de n. En la práctica, ese valor va de 2 a 10.

Ejemplo 13.1-1

La demanda (en cantidad de unidades) de un artículo en inventario durante los últimos 24 meses se resume en la tabla 13.1. Use la técnica del promedio móvil para pronosticar la demanda del mes próximo ($t = 25$).

TABLA 13.1

Mes, t	*Demanda, y_t*	*Mes, t*	*Demanda, y_t*
1	46	13	54
2	56	14	42
3	54	15	64
4	43	16	60
5	57	17	70
6	56	18	66
7	67	19	57
8	62	20	55
9	50	21	52
10	56	22	62
11	47	23	70
12	56	24	72

Para seleccionar un valor "razonable" para n, la cantidad de periodos de cálculo del promedio móvil, se examina primero la naturaleza de los datos. Los datos de la tabla 13.1 muestran que la demanda y_t tiene una tendencia creciente respecto al tiempo. Hablando con generalidad, esa tendencia significa que el promedio móvil no sería un buen predictor durante un horizonte de planeación prolongado. En particular, el uso de una base grande n para el promedio móvil no se aconseja en este caso, porque suprimirá la tendencia de los datos. Eso quiere decir que es preferible usar aquí una n pequeña, porque permite capturar la tendencia de los datos.

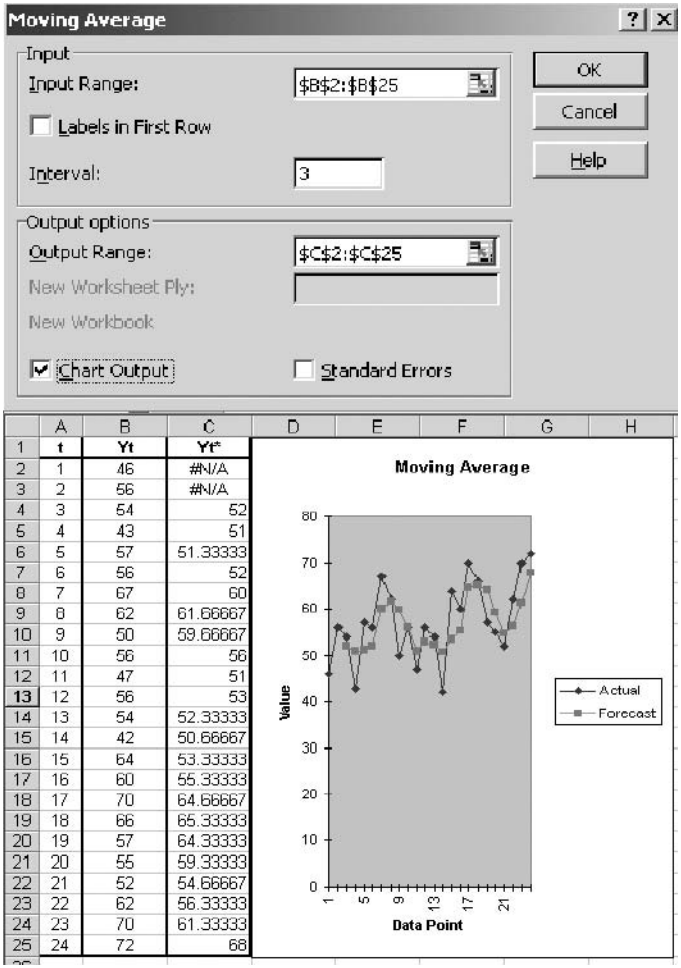
Si se usa $n = 3$, la demanda estimada para el mes próximo ($t = 25$) será igual al promedio de las demandas para los meses 22, 23 y 24, esto es

$$y^*_{25} = \frac{62 + 70 + 72}{3} = 68 \text{ unidades}$$

La demanda estimada para $t = 25$ se usa ahora para estimar la demanda para $t = 26$, como sigue:

$$y^*_{26} = \frac{70 + 72 + 68}{3} = 70 \text{ unidades}$$

Cuando se conozca la demanda *real* para $t = 25$, se debe usar para volver a estimar la demanda para $t = 26$, como promedio de los periodos 23, 24 y 25.



t	Yt	Yt*
1	46	#N/A
2	56	#N/A
3	54	52
4	43	51
5	57	51.33333
6	56	52
7	67	60
8	62	61.66667
9	50	59.66667
10	56	56
11	47	51
12	56	53
13	54	52.33333
14	42	50.66667
15	64	53.33333
16	60	55.33333
17	70	64.66667
18	66	65.33333
19	57	64.33333
20	55	59.33333
21	52	54.66667
22	62	56.33333
23	70	61.33333
24	72	68

FIGURA 13.1
Aplicación del método de suavización exponencial de Excel al Ejemplo 13.2-1

Los cálculos de promedio móvil son parte del paquete estadístico de Excel. Para usar ese módulo, primero se escriben los datos en celdas contiguas de una columna. A continuación, en la barra de menú de Excel se selecciona `Tools` ⇒ `Data Analysis` ⇒ `Moving Average` (Herramientas/Análisis de datos/Media móvil) para tener un cuadro de diálogo que permite especificar las celdas donde se guardan los datos, así como las celdas donde se desea tener los resultados.

La figura 13.1 muestra la aplicación del promedio móvil de Excel al ejemplo 13.1-1. La parte superior es el cuadro de diálogo. El diagrama se puede pedir como parte de los resultados.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.1A

1. En el ejemplo 13.1-1 estime la demanda para $t = 25$, basada en $n = 12$. ¿Suprime la tendencia de los datos un valor grande de n?

2. La cantidad de unidades de acondicionamiento de aire vendidas durante los últimos 24 meses aparece en la tabla 13.2. Analice los dados desde el punto de vista de la aplicabilidad de la técnica del promedio móvil.

TABLA 13.2

Mes	*Ventas*	*Mes*	*Ventas*
1	25	13	40
2	15	14	35
3	30	15	50
4	38	16	60
5	58	17	66
6	62	18	90
7	85	19	105
8	88	20	85
9	60	21	60
10	40	22	55
11	40	23	50
12	38	24	45

3. La tabla 13.3 muestra la cantidad de individuos que llegan a un centro turístico en automóvil y en avión, durante un periodo de 10 años. Analice los datos desde el punto de vista de la aplicabilidad de la técnica del promedio móvil.

TABLA 13.3

Año	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*
Auto	1042	1182	1224	1338	1455	1613	1644	1699	1790	1885
Avión	500	522	540	612	715	790	840	900	935	980

4. La tabla 13.4 contiene las ventas, en millones de $, de una tienda departamental. Analice los datos desde el punto de vista de la aplicabilidad de la técnica del promedio móvil.

TABLA 13.4

Año	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*
Ventas	21.0	23.2	23.2	24.0	24.9	25.6	26.6	27.4	28.5	29.6

5. La U de A ofrece cursos externos en cinco lugares distintos del estado. La tabla 13.5 es un resumen de los datos de inscripción durante un periodo de 6 años. Los datos de cada año se clasifican en semestres: otoño (1), primavera (2) y verano (3). Se desea usar esos datos para estimar la inscripción en el año próximo. Analice los datos desde el punto de vista de la aplicabilidad de la técnica del promedio móvil.

TABLA 13.5

Semestre		*Sitio del curso* 1	2	3	4	5
1989						
	1	288	136	48	165	59
	2	247	150	49	168	46
	3	117	69	14	61	15
1990						
	1	227	108	41	108	28
	2	239	106	46	128	43
	3	101	50	15	54	16
1991						
	1	240	126	31	104	46
	2	261	134	19	83	38
	3	138	48	9	56	32
1992						
	1	269	149	17	90	51
	2	301	113	25	54	28
	3	119	50	14	17	6
1993						
	1	226	102	22	16	30
	2	241	110	16	0	24
	3	125	46	7	0	12
1994						
	1	231	88	2	0	1
	2	259	66	3	0	27
	3	102	23	0	0	0

13.2 SUAVIZACIÓN EXPONENCIAL

En la técnica de suavización exponencial se supone que el proceso es constante o que cambia con lentitud al paso del tiempo; es la misma hipótesis que la que se usa en el método del promedio móvil. Sin embargo, el objeto es compensar un inconveniente del método del promedio móvil. En forma específica, la suavización exponencial asigna un peso mayor a la observación más reciente. Esto contrasta con el método del promedio móvil, en el que a todas las observaciones se asignan pesos iguales.

Se define α $(0 < \alpha < 1)$ como **constante de suavización** y se supone que los puntos de la serie del tiempo para los últimos t periodos son $y_1, y_2, ..., y_t$. Entonces y^*_{t+1}, el estimado para el periodo $t+1$, se calcula como sigue:

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \cdots$$

Como los coeficientes respectivos de $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$ son progresivamente menores, el nuevo procedimiento asigna más peso a los puntos de los datos más recientes.

La fórmula para calcular y^*_{t+1} se puede simplificar como sigue:

$$\begin{aligned} y^*_{t+1} &= \alpha y_t + (1-\alpha)\{\alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \cdots\cdots\} \\ &= \alpha y_t + (1-\alpha)y^*_t \end{aligned}$$

De esta forma se puede calcular y^*_{t+1} a partir de y^*_t. En forma recursiva. La ecuación recursiva se inicia saltándose la estimación y^*_1 en $t = 1$ y tomando el estimado para $t = 2$ como igual al dato real para $t = 1$; esto es, $y^*_2 = y_1$. En realidad, cualquier procedimiento razonable se puede usar para iniciar los cálculos. Por ejemplo, hay quienes sugieren estimar a y^*_0 como el promedio de una cantidad "razonable" de periodos al iniciar la serie de tiempo.

La selección de la constante de suavización α es básica para estimar los pronósticos del futuro. Un valor mayor de α implica que las observaciones más recientes tienen mayor peso. En la práctica, el valor de α va de 0.01 a 0.30.

Ejemplo 13.2-1

Aplicar la técnica de suavización exponencial a los datos del ejemplo 13.1-1. Usar $\alpha = 0.1$.

Los cálculos se hacen saltándose y^*_1 y suponiendo que $y^*_2 = y_1 = 46$ unidades. Para ilustrar los cálculos recursivos se tienen

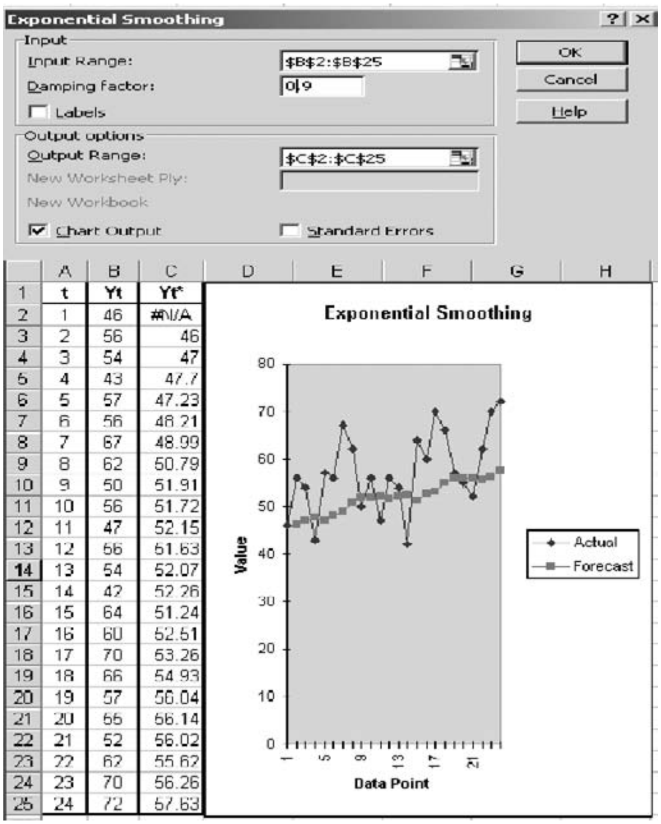
$$y^*_3 = \alpha y_2 + (1 - \alpha)y^*_2 = 0.1 \times 56 + 0.9 \times 46 = 47$$

$$y^*_4 = \alpha y_3 + (1 - \alpha)y^*_3 = 0.1 \times 54 + 0.9 \times 47 = 47.7$$

La figura 13.2 muestra el cuadro de diálogo y los resultados del módulo de suavización exponencial de Excel, aplicado a los datos del ejemplo 13.2-1. El módulo se accede con los

FIGURA 13.2

Aplicación del método de suavización exponencial de Excel al ejemplo 13.2-1



	A	B	C
1	t	Yt	Yt*
2	1	46	#N/A
3	2	56	46
4	3	54	47
5	4	43	47.7
6	5	57	47.23
7	6	56	48.21
8	7	67	48.99
9	8	62	50.79
10	9	50	51.91
11	10	56	51.72
12	11	47	52.15
13	12	56	51.63
14	13	54	52.07
15	14	42	52.26
16	15	64	51.24
17	16	60	52.51
18	17	70	53.26
19	18	66	54.93
20	19	57	56.04
21	20	55	56.14
22	21	52	56.02
23	22	62	55.62
24	23	70	56.26
25	24	72	57.63

mismos pasos que para el módulo de promedio móvil (Sección 13.1). Observe que Excel usa el **factor de amortiguamiento** ($= 1 - \alpha$), el complemento de la *constante de suavización* ($= \alpha$).

De acuerdo con los cálculos, la estimación para $t = 25$ es la siguiente:

$$y_{25}^* = \alpha y_{24} + (1 - \alpha)y_{24}^*$$
$$= 0.1(72) + 0.9(57.63) = 59.07 \text{ unidades}$$

Esta estimación es muy distinta de la que se obtuvo con promedio móvil (= 68 unidades). Un valor mayor de α producirá una estimación más cercana para $t = 25$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.2A

1. Aplique suavización exponencial con $\alpha = 0.2$ a los datos siguientes:

a) Del problema 2, conjunto de problemas 13.1a.

b) Del problema 3, conjunto de problemas 13.1a.

c) Del problema 4, conjunto de problemas 13.1a.

d) Del problema 5, conjunto de problemas 13.1a.

13.3 REGRESIÓN

El análisis de regresión determina la relación entre una variable *dependiente* (por ejemplo, la demanda de un artículo) y una variable *independiente* (por ejemplo, el tiempo). La fórmula general de regresión entre la variable independiente x y la variable dependiente y es

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \varepsilon$$

Las constantes $b_0, b_1, ..., b_n$ son parámetros desconocidos que se deben determinar a partir de los datos disponibles. El error aleatorio ε tiene media cero y desviación estándar constante.

La forma más sencilla de modelo de regresión supone que la variable dependiente varía en forma lineal respecto a la variable independiente, esto es, que

$$y^* = a + bx$$

Las constantes a y b se calculan aplicando el **criterio de los mínimos cuadrados**, que minimiza la suma del cuadrado de las diferencias entre los valores observados y los estimados. Dado el i-ésimo punto de dato (y_i, x_i), $i = 1, 2, ..., n$, la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores observados y estimados se define como

$$S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

Los valores de a y b se calculan resolviendo las siguientes condiciones necesarias para minimizar S:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i = 0$$

Con algo de manipulación algebraica se obtiene la siguiente solución:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

en donde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Estas ecuaciones indican que primero se necesita calcular b, a partir del cual se puede calcular a.

Las estimaciones de a y b son válidas para cualquier distribución de probabilidades de y_i. Sin embargo, si y_i tiene distribución normal con una desviación estándar constante, se puede establecer un intervalo de confianza para el valor medio del estimador en $x = x^0$ (es decir, $y^0 = a + bx^0$), que es

$$(a + bx^0) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2}{n - 2}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

Para los valores futuros (pronosticados) de y, la variable dependiente, interesa determinar su **intervalo de predicción** (y no el intervalo de confianza de su valor medio). Como era de esperarse, el intervalo de predicción de un valor futuro es más ancho que el intervalo de confianza del valor medio. En realidad, la fórmula del intervalo de predicción es igual que la del intervalo de confianza, excepto que el término $\frac{1}{n}$ bajo la segunda raíz cuadrada se sustituye con $\frac{(n + 1)}{n}$.

Se puede probar lo bien que se ajusta el estimador lineal $y^* = a + bx$ a sus datos calculando el **coeficiente de correlación**, r, con la fórmula

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

en donde $-1 \leq r \leq 1$.

Si $r = \pm 1$, existe un ajuste lineal perfecto entre x y y. En general, mientras más se acerque el valor de $|r|$ a 1, el ajuste lineal es mejor. Si $r = 0$, puede ser o puede no ser que x y y sean independientes, ya que dos variables *dependientes* pueden dar como resultado $r = 0$.

Ejemplo 13.3-1

Aplicar el modelo de regresión lineal a los datos del ejemplo 13.1-1, que se repiten en la tabla 13.6, para mayor comodidad.

TABLA 13.6

Mes, x_i	*Demanda*, y_i	*Mes*, x_i	*Demanda*, y_i
1	46	13	54
2	56	14	42
3	54	15	64
4	43	16	60
5	57	17	70
6	56	18	66
7	67	19	57
8	62	20	55
9	50	21	52
10	56	22	62
11	47	23	70
12	56	24	72

De acuerdo con los datos de la tabla 13.6,

$$\sum_{i=1}^{24} y_i x_i = 17{,}842, \ \sum_{i=1}^{24} x_i = 300, \ \sum_{i=1}^{24} x_i^2 = 4900, \ \sum_{i=1}^{24} y_i = 1374, \ \sum_{i=1}^{24} y_i^2 = 80{,}254$$

En consecuencia,

$$\bar{x} = 12.5$$

$$\bar{y} = 57.25$$

$$b = \frac{17{,}842 - 24 \times 57.25 \times 12.5}{4900 - 24 \times 12.5^2} = 0.58$$

$$a = 57.25 - 0.58 \times 12.5 = 50$$

Entonces, la demanda estimada es

$$y^* = 50 + 0.58x$$

Por ejemplo, con $x = 25$, $y^* = 50 + 0.58(25) = 64.5$ unidades.

El cálculo del coeficiente de correlación es como sigue:

$$r = \frac{17{,}842 - 24 \times 57.25 \times 12.5}{\sqrt{(4900 - 24 \times 12.5^2)(80{,}254 - 24 \times 57.25^2)}} = 0.493$$

El valor relativamente bajo de r indica que $y^* = 50 + 0.58x$ podría no ser un buen ajuste lineal para los datos. Usualmente, en un ajuste razonablemente bueno se requiere que $0.75 \leq |r| \leq 1$.

Suponga que deseamos calcular el intervalo a un 95% de confianza para un estimador lineal dado. Primero necesitamos calcular la suma de los cuadrados de las desviaciones con respecto de la línea de ajuste. La tabla 13.7 resume esta información.

En las tablas t, en el apéndice C, se ve que $t_{0.025,\,22} = 2.074$. Entonces, el intervalo de confianza que se busca se calcula como sigue:

$$(50 + 58x^0) \pm 2.074\sqrt{\frac{1205.64}{(24 - 2)}}\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{(x^0 - 12.5)^2}{4900 - 24 \times 12.5^2}}$$

TABLA 13.7

x	y	y^*	$(y - y^*)^2$
1	46	50.58	20.98
2	56	51.16	23.43
3	54	51.74	5.11
4	43	54.32	86.86
5	57	52.90	16.81
6	56	53.48	6.35
7	67	54.06	167.44
8	62	54.64	54.17
9	50	55.22	27.25
10	56	55.80	0.04
11	47	56.38	87.98
12	56	56.96	0.92
13	54	57.54	12.53
14	42	58.12	259.85
15	64	58.70	28.09
16	60	59.28	0.52
17	70	59.86	102.82
18	66	60.44	30.91
19	57	61.02	16.16
20	55	61.60	43.56
21	52	62.18	103.63
22	62	62.76	0.58
23	70	63.34	44.36
24	72	63.92	65.29

$$\sum_{i=1}^{24}(y_i - y_i^*)^2 = 1205.64$$

Que se puede simplificar a

$$(50 + 0.58x^0) \pm 15.35\sqrt{0.042 + \frac{(x^0 - 12.5)^2}{1150}}$$

Para ilustrar el cálculo del intervalo de predicción, supóngase que interesa establecer ese intervalo para el estimado de la demanda para el próximo mes ($x^0 = 25$). En ese caso, se debe reemplazar el coeficiente 0.042 por 1.042, y el cálculo del intervalo de predicción es (64.5 ± 16.66), o sea (47.84, 81.16). Entonces se dice que hay 95% de posibilidades de que la demanda en $x = 25$ sea entre 47.84 unidades y 81.16 unidades.

Los cálculos asociados con el análisis de regresión suelen ser tediosos. Por fortuna no se necesita hacerlos a mano. Excel (entre otros) tiene una forma cómoda de automatizarlos. La figura 13.3 muestra cómo se puede usar la hoja de cálculo para hacer análisis de regresión. Excel genera un informe completo en los resultados, que incluye toda la información necesaria. De nuevo, en Excel "Regresión" es un módulo de `Data Analysis` (Análisis de datos) del menú `Tools` (Herramientas).

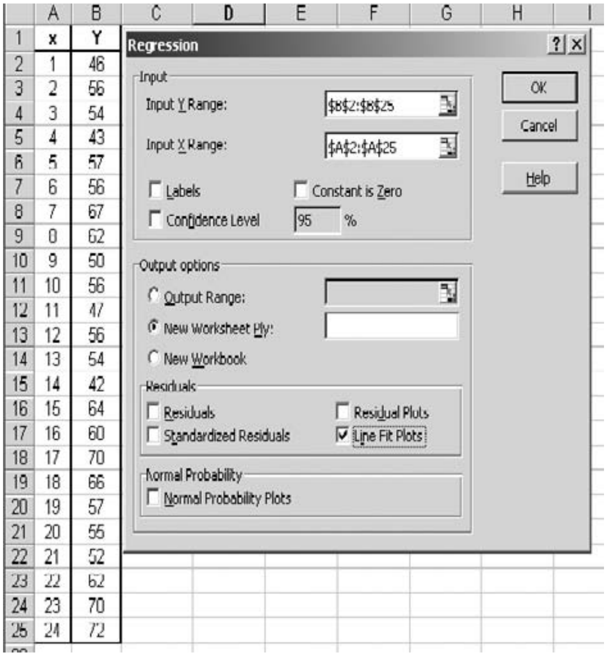


FIGURA 13.3

Aplicación de regresión Excel al ejemplo 13.2-3

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3A

1. Aplique la regresión lineal a los siguientes conjuntos de datos:
   a) Los del problema 2, conjunto de problemas 13.1a.
   b) Los del problema 3, conjunto de problemas 13.1a.
   c) Los del problema 4, conjunto de problemas 13.1a.
   d) Los del problema 5, conjunto de problemas 13.1a.
2. En la regresión lineal, demuestre que la suma de las diferencias entre los valores pronosticados y los estimados, para todos los datos, siempre es igual a cero, esto es, que

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*) = 0$$

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Brown, B. L. y R. T. O'Connell, *Forecasting and Time Series: An Applied Approach*, Duxbury Press, Belmont, CA, 1993.

Brown, R. G., *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1972.

Montgomery, D. y E. Peck, *Introduction to Linear Regression Analysis,* Wiley, Nueva York, 1991.

Willis, R. E., *A Guide to Forecasting for Planners and Managers*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

PROBLEMA INTEGRAL

13.1 Un argumento ya publicado dice que el incremento reciente de la calificación promedio de la prueba de aptitud SAT (*Scholastic Aptitude Test*), para alumnos de secundaria en Estados Unidos, se atribuye a razones demográficas más que a una mejoría de los métodos de enseñanza. En forma específica, el argumento indica que la disminución de la cantidad de hijos por familia ha creado ambientes en los que los niños interactúan con más frecuencia con los adultos (es decir, con sus padres), lo cual aumenta su destreza intelectual. Al revés, los hijos de grandes familias no están "privilegiados" intelectualmente a causa de la influencia inmadura de sus hermanos.

¿Cuál es la opinión de usted acerca de desarrollar una ecuación de regresión predictiva para las calificaciones SAT, basada en este argumento?

CAPÍTULO 14

Análisis de decisiones y juegos

En el análisis de decisiones se usa un proceso racional para seleccionar la mejor de varias alternativas. La "bondad" de una alternativa seleccionada depende de la calidad de los datos que se usen para describir el caso de la decisión. Desde este punto de vista, un proceso de toma de decisión puede caer en una de las tres categorías siguientes:

1. Toma de decisiones bajo certidumbre, en la que los datos se conocen en forma determinista.
2. Toma de decisiones bajo riesgo, en la que los datos se pueden describir con distribuciones de probabilidades.
3. Toma de decisiones bajo incertidumbre, en donde a los datos no se les puede asignar pesos o factores de ponderación que representen su grado de importancia en el proceso de decisión.

De hecho, bajo certidumbre, los datos están bien definidos y bajo incertidumbre, los datos son ambiguos. La toma de decisiones bajo riesgo representa entonces el caso de "la mitad del camino".

14.1 TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE: PROCESO DE JERARQUÍA ANALÍTICA (AHP)

Los modelos de programación lineal presentados en los capítulos 2 al 8 son ejemplos de toma de decisión bajo certidumbre, en donde todas las funciones están bien definidas. El proceso de jerarquía analítica (AHP, por sus siglas en inglés) está diseñado para casos en los que las ideas, sentimientos y emociones se cuantifican con base en juicios subjetivos para obtener una escala numérica para dar prioridades a las alternativas de decisión.

Antes de presentar los detalles del proceso de jerarquía analítica usaremos un ejemplo que muestra la idea general del método.

Ejemplo 14.1-1

Martin Hans, un brillante egresado de preparatoria, ha recibido tres ofertas de beca completa en tres instituciones: U de A, U de B y U de C. Para seleccionar una universidad, Martin

enuncia dos criterios principales: ubicación y reputación académica. Como es tan buen estudiante, juzga que la reputación académica es cinco veces más importante que el lugar, con lo que se tienen pesos aproximados de 17% de la ubicación y 83% de la reputación. A continuación usa un análisis sistemático (que detallaremos después) para categorizar las tres universidades desde el punto de vista del lugar y la reputación. La tabla siguiente clasifica los dos criterios para las tres universidades:

	Estimaciones de peso porcentual para		
Criterio	*U de A*	*U de B*	*U de C*
Ubicación	12.9	22.7	59.4
Reputación	54.5	27.3	18.2

La estructura del problema de decisión se resume en la figura 14.1. El problema implica una sola jerarquía (el nivel) con dos criterios (ubicación y reputación) y tres alternativas de decisión (U de A, U de B y U de C).

La calificación de las tres universidades se basa en calcular un factor de ponderación o peso *compuesto* para cada universidad, como sigue:

$$\text{U de A} = 0.17 \times 0.129 + 0.83 \times 0.545 = \mathbf{0.4743}$$
$$\text{U de B} = 0.17 \times 0.277 + 0.83 \times 0.273 = 0.2737$$
$$\text{U de C} = 0.17 \times 0.594 + 0.83 \times 0.182 = 0.2520$$

Con base en estos cálculos, la U de A tiene el mayor peso compuesto y en consecuencia representa la mejor elección de Martin.

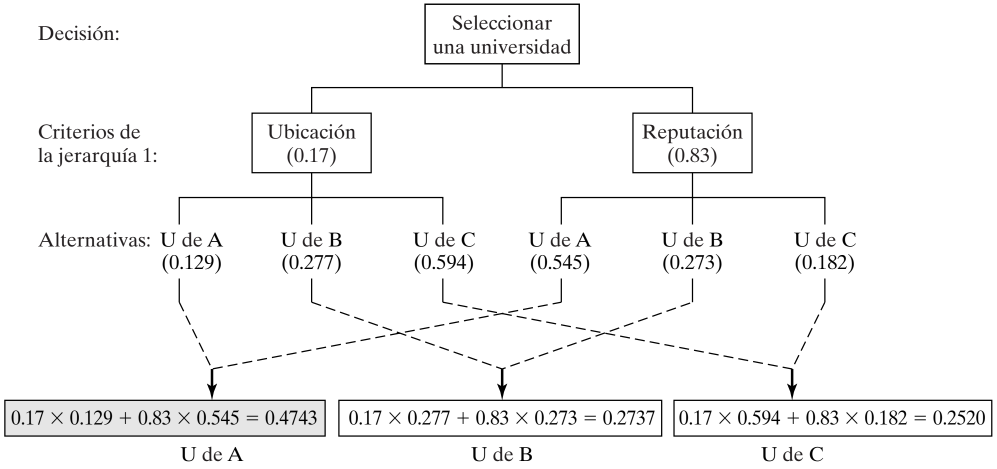


FIGURA 14.1

Resumen de cálculos del proceso de jerarquía analítica para el ejemplo 14.1-1

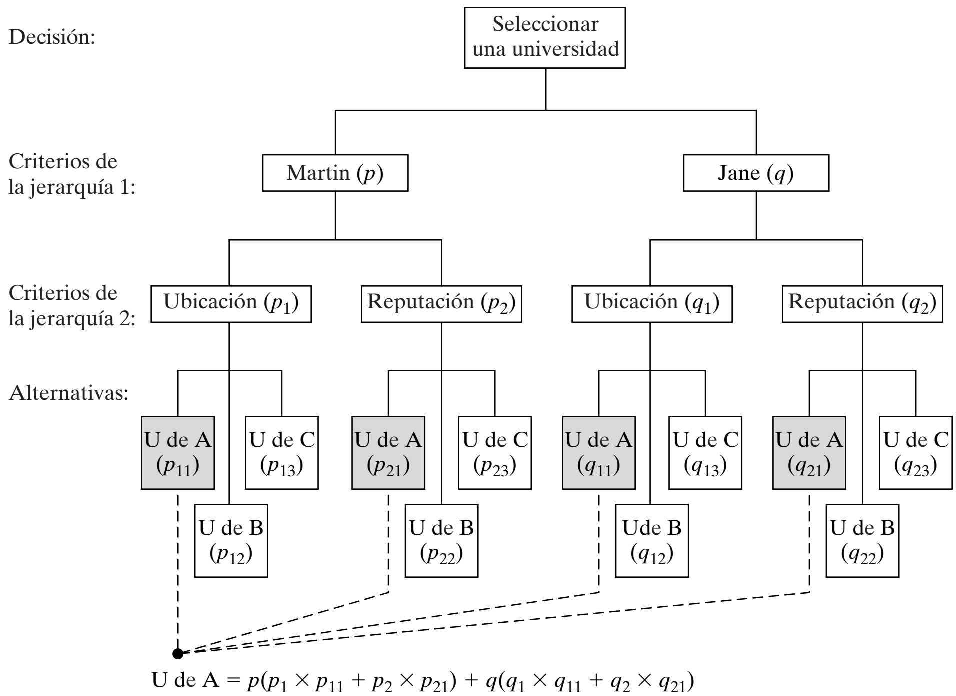


FIGURA 14.2

Refinamiento del problema de decisiones del ejemplo 14.1-1

La estructura general del proceso de jerarquía analítica puede comprender varias jerarquías de criterios. Supongamos que en el ejemplo 14.1-1, Jane, la hermana gemela de Martin, también fue aceptada con beca total en las tres universidades. Sin embargo, sus padres estipulan que los dos deben asistir a la misma universidad. La figura 14.2 muestra el problema de toma de decisiones, que ahora implica dos jerarquías de criterios. Los valores p y q (posiblemente iguales) en la primera jerarquía representan los pesos relativos asignados a las opiniones de Martin y de Jane acerca del proceso de selección. La segunda jerarquía usa los pesos (p_1, p_2) y (q_1, q_2) para reflejar las opiniones individuales de Martin y de Jane sobre los criterios de ubicación y reputación de cada universidad. El resto de la estructura de decisión se puede interpretar en forma parecida. Nótese que $p + q = 1$, $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$, $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$, $q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1$, y $q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1$. La determinación del peso compuesto de la U de A, que se ve en la figura 14.2, demuestra la manera en que se hacen los cálculos.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.1A

1. Suponga que se asignan los pesos siguientes para el caso de Martin y Jane:

$$p = 0.5,\ q = 0.5$$

$$p_1 = 0.17,\ p_2 = 0.83$$

$$p_{11} = 0.129,\ p_{12} = 0.277,\ p_{13} = 0.594$$
$$p_{21} = 0.545,\ p_{22} = 0.273,\ p_{23} = 0.182$$
$$q_1 = 0.3,\ q_2 = 0.7$$
$$q_{11} = 0.2,\ q_{12} = 0.3,\ q_{13} = 0.5$$
$$q_{21} = 0.5,\ q_{22} = 0.2,\ q_{23} = 0.3$$

Con base en esta información, clasificar las tres universidades.

Determinación de los factores de ponderación (pesos). El meollo del proceso de jerarquía analítica es la determinación de pesos relativos, como los que se usaron en el ejemplo 14.1 para clasificar las alternativas de decisión. Suponiendo que se manejan n criterios en una jerarquía determinada, el procedimiento establece una **matriz de comparación por pares**, **A**, de $n \times n$ que refleja el juicio de quien toma las decisiones acerca de la importancia relativa de los distintos criterios. La comparación apareada, o por pares, se hace de tal manera que el criterio en el renglón i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se califica en relación de cada uno de los criterios representados por las n columnas. Si a_{ij} define al elemento (i, j) de **A**, el proceso de jerarquía analítica usa una escala discreta de 1 a 9, en el que $a_{ij} = 1$ significa que i y j son *igualmente importantes*; $a_{ij} = 5$ significa que i es *mucho más importante* que j, y $a_{ij} = 9$ indica que i es *extremadamente más importante* que j. Los demás valores intermedios entre 1 y 9 se interpretan en consecuencia. En aras de la consistencia, $a_{ij} = k$ implica, automáticamente, que $a_{ji} = \frac{1}{k}$. También, todos los elementos diagonales a_{ii} de **A** deben ser iguales a 1, porque califican un criterio contra sí mismo.

Ejemplo 14.1-2

Para mostrar cómo se determina la matriz de comparaciones **A** en el problema de la decisión de Martin en el ejemplo 14.1-1, se comienza con la principal jerarquía correspondiente a los criterios de ubicación y reputación de una universidad. Según el juicio de Martin, la reputación de una universidad es *mucho más importante* que su ubicación, y en consecuencia asigna el valor $a_{21} = 5.$ al elemento (2, 1) de **A**. Esta asignación implica en forma automática que $a_{12} = \frac{1}{5}$. Si se usan los símbolos L y R para representar ubicación y reputación, la matriz de comparación correspondiente es

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ L \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los pesos relativos de L y R se pueden determinar a partir de **A** dividiendo los elementos de cada columna entre la suma de los elementos de la misma columna. Así, se dividen los elementos de la columna 1 entre $(1 + 5 = 6)$ y los de la columna 2 entre $(\frac{1}{5} + 1 = 1.2)$ para normalizar a **A**. Los pesos relativos que se buscan, w_R y w_L se calculan entonces como promedios de renglón de la **matriz normalizada** resultante. Así,

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \\ L \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.17 & 0.17 \\ 0.83 & 0.83 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Promedio de renglón} \\ w_L = \frac{0.17 + 0.17}{2} = 0.17 \\ w_R = \frac{0.83 + 0.83}{2} = 0.83 \end{array}$$

El resultado de los cálculos es $w_L = 0.17$ y $w_R = 0.83$, los pesos que se usaron en la figura 14.1. Las columnas de **N** son idénticas, característica que sólo se presenta cuando quien toma

las decisiones tiene una *consistencia* perfecta para especificar los elementos de la matriz de comparación **A**. Este punto se describirá más adelante en esta sección.

Los pesos relativos de las alternativas U de A, U de B y U de C se determinan con cada uno de los criterios L y R, usando las dos matrices de comparación siguientes, cuyos elementos se basan en el juicio de Martin acerca de la importancia relativa de las tres universidades.

$$\mathbf{A}_L = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{matrix} A & B & C \\ \left(\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{matrix}\right) \end{matrix} \qquad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{matrix} A & B & C \\ \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

Al sumar las columnas se llega a

$$\text{Suma de las columnas de } \mathbf{A}_L = (8, 3.5, 1.7)$$
$$\text{Suma de las columnas de } \mathbf{A}_R = (1.83, 3.67, 5.5)$$

Las siguientes matrices normalizadas se determinan dividiendo todos los elementos entre las respectivas sumas de columna:

$$\mathbf{N}_L = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{matrix} A & B & C \\ \left(\begin{matrix} 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ 0.250 & 0.286 & 0.294 \\ 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{matrix}\right) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{Promedios de renglón} \\ w_{LA} = \frac{0.125 + 0.143 + 0.118}{3} = 0.129 \\ w_{LB} = \frac{0.250 + 0.286 + 0.294}{3} = 0.277 \\ w_{LC} = \frac{0.625 + 0.571 + 0.588}{3} = 0.594 \end{matrix}$$

$$\mathbf{N}_R = \begin{matrix} \\ A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{matrix} A & B & C \\ \left(\begin{matrix} 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{matrix}\right) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{Promedios de renglón} \\ w_{RA} = \frac{0.545 + 0.545 + 0.545}{3} = 0.545 \\ w_{RB} = \frac{0.273 + 0.273 + 0.273}{3} = 0.273 \\ w_{RC} = \frac{0.182 + 0.182 + 0.182}{3} = 0.182 \end{matrix}$$

Los valores $(w_{LA}, w_{LB}, w_{LC}) = (0.129, 0.277, 0.594)$ son los pesos respectivos de la U de A, U de B y U de C desde el punto de vista de la ubicación. De igual forma $(w_{RA}, w_{RB}, w_{RC}) = (0.545, 0.273, 0.182)$ representan los pesos relativos acerca de la reputación académica.

Consistencia de la matriz de comparación. En el ejemplo 14.1-2, todas las columnas de las matrices normalizadas **N** y $\mathbf{N}_R$ son idénticas, y las de $\mathbf{N}_L$ no lo son. Entonces, se dice que las matrices originales de comparación **A** y $\mathbf{A}_R$ son *consistentes*, y que $\mathbf{A}_L$ no lo es.

Consistencia significa que quien toma decisiones muestra un juicio coherente en la especificación de la comparación por pares de los criterios o alternativas. Matemáticamente se dice que una matriz de comparación **A** es consistente si

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik} \text{ para todas } i, j \text{ y } k$$

Por ejemplo, en la matriz $\mathbf{A}_R$ del ejemplo 14.1-2, $a_{13} = 3$ y $a_{12}a_{23} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$. Esta propiedad requiere que todas las columnas (y todos los renglones) sean linealmente dependientes. En particular, las columnas de toda matriz de comparación de 2×2 son dependientes y en consecuencia una matriz de 2×2 siempre es consistente.

Es raro que todas las matrices de comparación sean consistentes. En realidad, como el juicio humano es la base de la construcción de esas matrices, cabe esperar cierto grado de inconsistencia, que se debe tolerar siempre que no sea “irrazonable”.

Para determinar si un nivel de consistencia es “razonable”, se debe establecer una medida cuantificable para la matriz de comparación **A**. En el ejemplo 14.1-2 se ha visto que una **A** perfectamente consistente produce una matriz normalizada **N** en la que todas las columnas son idénticas, esto es,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{pmatrix}$$

Se ve entonces que se puede determinar la matriz correspondiente de comparación **A** a partir de **N**, dividiendo los elementos de la columna i entre w_i (que es el proceso inverso de determinación de **N** a partir de **A**). Entonces se tiene que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la definición dada de **A**, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

En forma más compacta, si **w** es el vector columna de los pesos relativos w_i, $i = 1, 2, \dots, n$, se dice que **A** es consistente si, y sólo si

$$\mathbf{Aw} = n\mathbf{w}$$

Para el caso en que **A** no sea consistente, el peso relativo w_i se determina aproximadamente por el promedio de los n elementos del renglón i en la matriz normalizada **N** (véase el ejemplo 14.1-2). Si $\overline{\mathbf{w}}$ es la estimación calculada, se puede demostrar que

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{w}} = n_{\text{máx}}\overline{\mathbf{w}},\ n_{\text{máx}} \geq n$$

En este caso, mientras más se acerque $n_{\text{máx}}$ n, la matriz de comparación **A** es más consistente. En consecuencia, en el proceso de jerarquía analítica se calcula la **relación de consistencia** como sigue:

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

en donde

$$\begin{aligned} CI &= \text{índice de consistencia de } \mathbf{A} \\ &= \frac{n_{\text{máx}} - n}{n - 1} \\ RI &= \text{consistencia aleatoria de } \mathbf{A} \\ &= \frac{1.98(n - 2)}{n} \end{aligned}$$

El índice de consistencia aleatoria (o simplemente índice aleatorio), *RI*, se determina en forma empírica como el promedio del índice de consistencia (*CI*) de una muestra grande de matrices de comparación **A** generadas en forma aleatoria.

La relación *CR* se usa para probar la consistencia como sigue: si $CR \leq 0.1$, el nivel de inconsistencia se puede aceptar. En caso contrario, la inconsistencia en **A** es alta, y se debe pedir a quien toma decisiones que modifique los elementos a_{ij} de **A** para obtener una matriz más consistente.

El valor de $n_{\text{máx}}$ se calcula con $\mathbf{A}\overline{\mathbf{w}} = n_{\text{máx}}\overline{\mathbf{w}}$ observando que la *i*-ésima ecuación es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j = n_{\text{máx}}\overline{w}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Dado que $\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i = 1$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j\right) = n_{\text{máx}} \sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = n_{\text{máx}}$$

Eso quiere decir que se puede determinar el valor de $n_{\text{máx}}$ calculando primero el vector columna $\mathbf{A}\overline{\mathbf{w}}$ y sumando después sus elementos.

Ejemplo 14.1-3

En el ejemplo 14.1-2, la matriz $\mathbf{A}_L$ es inconsistente, porque las columnas de su $\mathbf{N}_L$ no son idénticas. Se determinará la inconsistencia de $\mathbf{N}_L$.

Se inicia calculando $n_{\text{máx}}$. En el ejemplo 14.1-2 se tiene

$$\overline{w}_1 = 0.129,\ \overline{w}_2 = 0.277,\ \overline{w}_3 = 0.594$$

Entonces,

$$\mathbf{A_L}\overline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{pmatrix}$$

Esto hace que

$$n_{\text{máx}} = 0.3863 + 0.8320 + 1.7930 = 3.0113$$

En consecuencia, para $n = 3$,

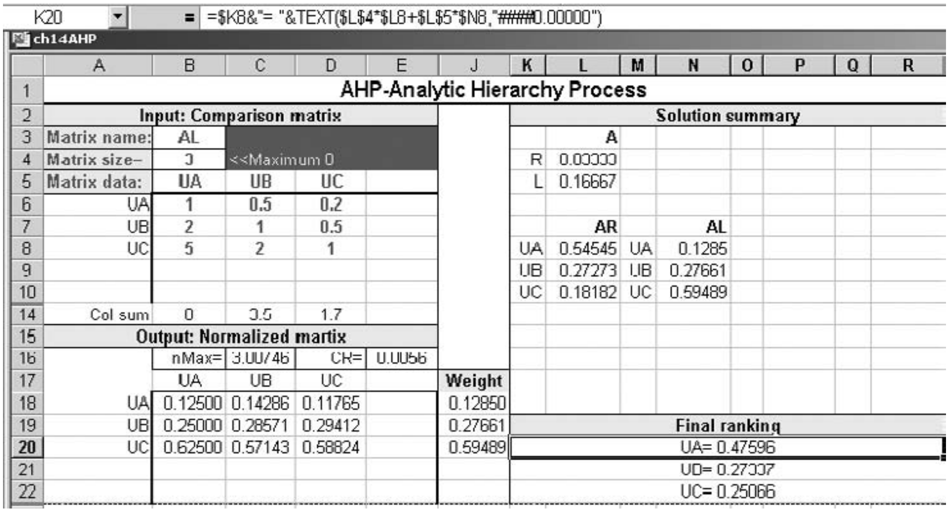
$$CI = \frac{n_{\text{máx}} - n}{n - 1} = \frac{3.0113 - 3}{3 - 1} = 0.00565$$

$$RI = \frac{1.98(n - 2)}{n} = \frac{1.98 \times 1}{3} = 0.66$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.00565}{0.66} = 0.00856$$

Como $CR < 0.1$, el nivel de inconsistencia en $\mathbf{A}_L$ es aceptable.

Solución del proceso de jerarquía analítica en hoja de cálculo. La plantilla ch14HP.xls está diseñada para manejar problemas en los que el tamaño máximo de una matriz de comparación sea de 8×8. Como en los modelos de Excel en los capítulos 10 y 11, se necesita la



K20 = =$K8&"= "&TEXT($L$4*$L8+$L$5*$N8,"####0.00000")

ch14AHP

	A	B	C	D	E	J	K	L	M	N
1	AHP-Analytic Hierarchy Process									
2	Input: Comparison matrix						Solution summary			
3	Matrix name:	AL						A		
4	Matrix size=	3	<<Maximum 0				R	0.03333		
5	Matrix data:	UA	UB	UC			L	0.16667		
6	UA	1	0.5	0.2						
7	UB	2	1	0.5				AR		AL
8	UC	5	2	1			UA	0.54545	UA	0.1285
9							UB	0.27273	UB	0.27661
10							UC	0.18182	UC	0.59489
14	Col sum	0	3.5	1.7						
15	Output: Normalized martix									
16		nMax=	3.00746	CR=	0.0056					
17		UA	UB	UC		Weight				
18	UA	0.12500	0.14286	0.11765		0.12850				
19	UB	0.25000	0.28571	0.29412		0.27661	Final ranking			
20	UC	0.62500	0.57143	0.58824		0.59489	UA= 0.47596			
21							UD= 0.27337			
22							UC= 0.25066			

FIGURA 14.3

Solución del ejemplo 14.1-2 con Excel

intervención del usuario para activar el modelo. La figura 14.3 muestra la aplicación del modelo al ejemplo 14.1-2.[1] Las matrices de comparación del problema se capturan *una por una* en la sección (superior) de datos, en la pantalla. No importa el orden en el que se capturen las matrices de comparación, aunque tiene más sentido considerarlas en su orden jerárquico natural. Después de teclear los datos de una matriz de comparación, la sección de resultados (la sección inferior) de la hoja de cálculo mostrará la matriz normalizada correspondiente junto con su relación de consistencia, *CR*. En este punto el usuario debe copiar los pesos *w* de la columna J y pegarlos en la zona de resumen de la solución (parte derecha de la hoja de cálculo. Recuerde usar `Pegado especial` ⇒ `Valores` al dar este paso, para garantizar que el registro que se cree sea permanente. El proceso se repite hasta haber creado un registro permanente de pesos para todas las matrices de comparación en la sección de resumen de solución de la hoja de cálculo (columnas K:R).

Una vez anotados los pesos de todas las matrices de comparación, se pueden usar esos datos para crear las fórmulas necesarias para comparar las distintas alternativas. Eso debería ser un ejercicio directo en Excel. En la figura 14.3, en las celdas (K20:K27) se ve la clasificación final. La fórmula en la celda K20 es

```
=$L$4*$L8+$L$5*$N8
```

Esta fórmula es la evaluación final de la alternativa UA (U de A). Una vez creada, cópiela y péguela en las celdas K21 y K22, las celdas inmediatas abajo de la K20, donde se guarda la fórmula de UA. Las fórmulas pegadas ajustarán las referencias en forma automática para obtener las alternativas UB y UC (U de B y U de C). Pero vea con cuidado cómo se plantea la

[1]Los resultados (más exactos) de la hoja de cálculo son un poco distintos de los de los ejemplos 14.1-2 y 14.1-3, debido al error de redondeo.

fórmula: la referencia de celdas para la alternativa UA debe tener columna fija (es decir, $L8 y $N8), mientras que *todas* las demás referencias deben tener renglón y columna fijos (es decir, $L$4 y $L$5). La validez de las fórmulas requiere que los pesos de las *alternativas* (columna fija) de cada matriz aparezcan en la misma columna, sin que haya celdas intermedias vacías. Por ejemplo, en la figura 14.3, los tres pesos AR en la columna L no se pueden repartir en dos columnas. Lo mismo se aplica a los pesos AL en la columna N. Por otro lado, no hay restricciones en la colocación de los pesos A, porque tienen renglón y columna fijos en la fórmula.

El lector puede embellecer la fórmula para capturar en forma directamente los nombres de las alternativas. La fórmula de la alternativa UA se debería teclear como sigue:

```
=$K8&"="&TEXT($L$4*$L8+$L$5*$N8,"####0.00000")
```

Observe que los nombres de las alternativas se guardan en K8:K10. Es responsabilidad del usuario asegurarse de que esas celdas contengan los nombres de las alternativas.

El procedimiento para evaluar alternativas se puede ampliar con facilidad a cualquier cantidad de niveles de jerarquía. Una vez planteada la fórmula en forma correcta para la primera alternativa, la misma fórmula se puede aplicar al resto de las alternativas, sólo copiándola en los renglones sucesivos (de la misma columna). Sólo se debe recordar que todas las referencias de celda en la fórmula debe ser de renglón y columna fijos, excepto las referencias de las alternativas, que sólo deben tener columna fija. En el problema 1, conjunto de problemas 14.1b, se le pide deducir la fórmula para un problema con tres niveles.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.1B[2]

1. Acerca de los datos del problema 1, conjunto de problemas 14.1a, cópielos en forma lógica en la sección de resumen de solución, de la hoja de cálculo ch14AHP.xls, para deducir entonces la fórmula para evaluar la primera alternativa, UA, y copiarla para evaluar las dos alternativas restantes.
2. El departamento de personal de C&H ha reducido la búsqueda de un prospecto de empleado a tres aspirantes: Steve (S), Jane (J) y Maisa (M). La selección final se basa en tres criterios: entrevista personal (I), experiencia (E) y referencias (R). El departamento usa la matriz **A** (véase abajo) para establecer las preferencias de acuerdo con los tres criterios. Después de entrevistar a los tres candidatos, y de reunir los datos sobre sus experiencias y referencias, se construyen las matrices $\mathbf{A}_I$, $\mathbf{A}_E$ y $\mathbf{A}_R$. ¿A cuál de los tres candidatos se debe contratar? Evalúe la consistencia de los datos.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} I \\ E \\ R \end{matrix}\overset{\begin{matrix} I & E & R \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \quad \mathbf{A}_I = \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix}\overset{\begin{matrix} S & J & M \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{A}_E = \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix}\overset{\begin{matrix} S & J & M \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix}\overset{\begin{matrix} S & J & M \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

---

[2]Se le encarece usar la hoja de cálculo ch114AHP.xls para comprobar sus cálculos.

3. Kevin y June Park (*K* y *J*) están comprando casa nueva. Hay disponibles tres casas, *A*, *B* y *C*. Los Park concuerdan en dos criterios para seleccionar la casa: acabado (*Y*) y cercanía al trabajo (*W*) y han formulado matrices de comparación. Clasifique las tres casas por prioridad, y calcule la relación de inconsistencia para cada matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & K & J \\ K & 1 & 2 \\ J & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_K = \begin{matrix} & Y & W \\ Y & 1 & \frac{1}{3} \\ W & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \mathbf{A}_J = \begin{matrix} & Y & W \\ Y & 1 & 4 \\ W & \frac{1}{4} & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{KY} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & 3 \\ B & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ C & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{KW} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ B & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ C & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{JY} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 4 & 2 \\ B & \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ C & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{JW} = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ B & 2 & 1 & 3 \\ C & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{matrix}$$

4. Un novel actor establece tres criterios para seleccionar al editor de su libro sobre Investigación de Operaciones: porcentaje de regalía (*R*), ventas (*M*) y adelanto (*A*). Hay dos editores, *H* y *P*, que se interesan en publicar su libro. Use las siguientes matrices de comparación para clasificar los dos editores, y evalúe la consistencia de la decisión.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & R & M & A \\ R & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ M & 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ A & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & 2 \\ P & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_M = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & \frac{1}{2} \\ P & 2 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_A = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & 1 \\ P & 1 & 1 \end{matrix}$$

5. Un profesor de ciencia política desea pronosticar el resultado de la elección de un director escolar. Para el puesto compiten tres candidatos: Ivy (*I*), Bahrn (*B*) y Smith (*S*). El profesor agrupa a los votantes en tres categorías: izquierda (*L*), derecha (*R*) y centro (*C*). Los candidatos se juzgan con base en tres factores: experiencia educativa (*E*), posición declarada en asuntos clave (*S*) y carácter personal (*P*). A continuación se muestran las matrices de comparación para la primera jerarquía: izquierda, centro y derecha.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & L & C & R \\ L & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ C & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ R & 2 & 5 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_L = \begin{matrix} & E & S & P \\ E & 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ S & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ P & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{matrix} & E & S & P \\ E & 1 & 2 & 2 \\ S & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ P & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} & E & S & P \\ E & 1 & 1 & 9 \\ S & 1 & 1 & 8 \\ P & \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{matrix}$$

El profesor pudo generar nueve matrices de comparación más para definir los tres candidatos en la segunda jerarquía, que representa experiencia, posición declarada en asuntos clave y

carácter personal. A continuación usó el proceso de jerarquía analítica para reducir esas matrices a los siguientes pesos relativos:

	Izquierda			Centro			Derecha		
Candidato	*E*	*S*	*P*	*E*	*S*	*P*	*E*	*S*	*P*
Ivy	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5	0.2	0.7	0.1	0.3
Bahrn	0.5	0.4	0.2	0.4	0.2	0.4	0.1	0.4	0.2
Smith	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3	0.4	0.2	0.5	0.5

Determine al candidato ganador y evalúe la consistencia de la decisión.

6. Un distrito escolar está urgido de reducir los gastos para cumplir con nuevas restricciones presupuestales en sus escuelas elementales. Hay dos opciones disponibles: eliminar el programa de educación física (*E*) o eliminar el programa de música (*M*). El superintendente del distrito ha formado un comité con representaciones iguales en votos, del Consejo Educativo (*S*) y de la Asociación de Padres y Maestros (*P*) para estudiar el caso y hacer una recomendación. El comité decidió estudiar el asunto desde el punto de vista de recorte de presupuesto (*B*) y de necesidades de alumnos (*N*). En el análisis se obtuvieron las siguientes matrices de comparación:

$$\mathbf{A}_S = \begin{matrix} & B & N \\ B & 1 & 1 \\ N & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \mathbf{A}_P = \begin{matrix} & B & N \\ B & 1 & \frac{1}{2} \\ N & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{SB} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & \frac{1}{2} \\ M & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \mathbf{A}_{SN} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & \frac{1}{3} \\ M & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{PB} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & \frac{1}{3} \\ M & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \mathbf{A}_{PN} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & 2 \\ M & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}$$

Analice el problema de decisiones y haga una recomendación.

7. Una persona va a comprar un automóvil y ha afinado las alternativas a tres modelos: *M*1, *M*2 y *M*3. Los factores de decisión son precio de compra (PP), costo de mantenimiento (MC), costo de uso en ciudad (CD) y costo en uso rural (RD). La tabla siguiente muestra los datos relevantes cuando la operación es de 3 años.

Modelo del auto	PP($)	MC($)	CD($)	RD($)
*M*1	6,000	1800	4500	1500
*M*2	8,000	1200	2250	750
*M*3	10,000	600	1125	600

Use los datos de costo para desarrollar las matrices de comparación. Valore la consistencia de las matrices y determine el modelo elegido.

14.2 TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO

En condiciones de riesgo, las ventajas asociadas a cada alternativa de decisión se describen con distribuciones de probabilidades. Por esta razón la toma de decisiones bajo riesgo se suele

basar en el *criterio de valor esperado*, en el que se comparan alternativas de decisión con base en la maximización de la utilidad esperada, o la minimización del costo esperado. Sin embargo, como el método tiene sus limitaciones, se modifica el criterio de valor esperado para enfrentar otras situaciones.

14.2.1 Criterio del valor esperado

El criterio del valor esperado busca la maximización de la utilidad (promedio) esperada o la minimización del costo esperado. En los datos del problema se supone que la retribución (o el costo) asociada con cada alternativa de decisión es probabilística.

Análisis con árbol de decisión. En el ejemplo que sigue se describen casos sencillos de decisión con una cantidad finita de alternativas de decisión con matrices explícitas de retribución.

Ejemplo 14.2-1

Suponga que desea invertir $10,000 en el mercado de valores, comprando acciones de una de dos compañías: *A* y *B*. Las acciones de la compañía *A* son arriesgadas, pero podrían producir un rendimiento de 50% sobre la inversión durante el año próximo. Si las condiciones del mercado de valores no son favorables (es decir, el mercado está "a la baja"), las acciones pueden perder el 20% de su valor. La empresa *B* proporciona utilidades seguras, de 15% en un mercado "a la alza" y sólo de 5% en un mercado "a la baja". Todas las publicaciones que consultó (¡siempre hay una gran abundancia de ellas al final del año!) predicen que hay 60% de probabilidades que el mercado esté "a la alza", y 40% de que esté "a la baja". ¿Dónde debería invertir su dinero?

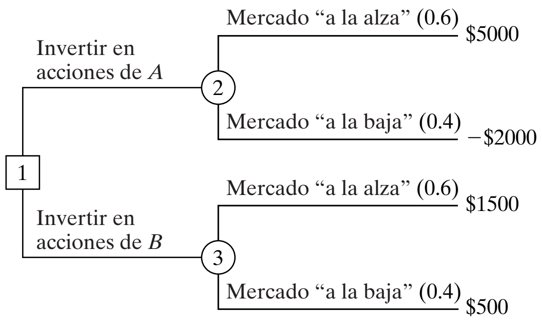
El problema de decisión se puede resumir como sigue:

	Rendimientos en un año por inversión de $10,000	
Alternativa de decisión	*Mercado "a la alza" ($)*	*Mercado "a la baja" ($)*
Acciones de la empresa A	5000	−2000
Acciones de la empresa B	1500	500
Probabilidad de ocurrencia	0.6	0.4

También se puede representar el problema mediante un **árbol de decisión**, como el que se ve en la figura 14.4. En ese árbol se usan dos clases de nodos: un cuadrado □ que representa un *punto de decisión*, o nodo de decisión y un círculo ○ que representa un *evento aleatorio* o

FIGURA 14.4

Representación del problema del mercado accionario con un árbol de decisión



nodo de evento. Así, dos ramas emanan del nodo de decisión 1, y representan las dos alternativas de invertir en las acciones de A o de B. A continuación, las dos ramas que emanan de los nodos de evento 2 y 3 representan los mercados "a la alza" y "a la baja", con sus probabilidades y retribuciones respectivas.

De acuerdo con la figura 14.3, los rendimientos esperados en 1 año, para las dos alternativas, son:

$$\text{Para las acciones } A = \$5000 \times 0.6 + (-2000) \times 0.4 = \$\mathbf{2200}$$

$$\text{Para las acciones } B = \$1500 \times 0.6 + \$500 \times 0.4 = \$1100$$

Con base en estos cálculos, su decisión es invertir en las acciones de A.

En la terminología de la teoría de decisiones, los mercados "a la alza" y "a la baja" del ejemplo anterior se llaman **estados de la naturaleza**, cuyas posibilidades de ocurrencia son probabilísticas (0.6, en comparación con 0.4). En general, un problema de decisión puede incluir n estados de la naturaleza y m alternativas. Si p_j (> 0) es la probabilidad de ocurrencia para el estado j de la naturaleza y a_{ij} es la retribución de la alternativa i dado el estado de la naturaleza j $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$, la retribución esperada para alternativa i se calcula como sigue:

$$EV_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Por definición, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

La mejor alternativa es la relacionada con $EV_i^* = \text{máx}_i\{EV_i\}$ o $EV_i^* = \text{mín}_i\{EV_i\}$ dependiendo, respectivamente, de si la retribución del problema representa utilidad (ingreso) o pérdida (gasto).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.2A

1. Lo han invitado a jugar a la Rueda de la Fortuna en TV. La rueda funciona electrónicamente con dos botones que producen un giro rápido (H) o lento (S). La rueda misma está dividida en regiones semicirculares blanca (W) y roja (R). Le han dicho que la rueda debe detenerse con una probabilidad de 0.3 en la región blanca y de 0.7 en la región roja. La retribución que recibe en el juego es

	W	R
H	\$800	\$200
S	− \$2500	\$1000

Trace el árbol de decisión correspondiente y especifique qué va a hacer.

2. El agricultor McCoy puede sembrar maíz o soya. Las probabilidades de que los precios de la siguiente cosecha suban, bajen o queden igual son 0.25, 0.30 y 0.45, respectivamente. Si los precios suben, la cosecha de maíz equivaldrá a \$30,000, y la de soya producirá \$10,000. Si los precios no cambian, McCoy saldrá apenas sin pérdidas. Pero si los precios bajan, las cosechas de maíz y de soya tendrán pérdidas respectivas de \$35,000 y \$5000, respectivamente.

a) Represente el problema de McCoy con un árbol de decisión.

b) ¿Qué cultivo debe sembrar McCoy?

3. Tiene usted oportunidad de invertir en tres fondos de ahorro: servicios, de crecimiento agresivo y globales. El valor de su inversión cambiará, dependiendo de las condiciones del mercado. Hay 10% de probabilidades de que el mercado baje, 50% de probabilidades de que quede estable,

y 40% de probabilidades de que suba. La tabla siguiente muestra el cambio porcentual en el valor de la inversión bajo las tres condiciones:

	Rendimiento porcentual sobre la inversión		
Alternativa	*Mercado baja (%)*	*Mercado moderado (%)*	*Mercado sube (%)*
Servicios	+5	+7	+8
Crecimiento agresivo	−10	+5	+30
Global	+2	+7	+20

a) Represente el problema con un árbol de decisión.

b) ¿Cuál fondo de ahorro debería seleccionar?

4. Tiene usted la oportunidad de invertir su dinero en un bono al 7.5% que se vende a valor nominal o en acciones de crecimiento agresivo, que sólo pagan dividendos de 1%. Si se presenta inflación, la tasa de interés subirá hasta 8%, en cuyo caso el valor nominal del bono bajará 10% y el valor de las acciones bajará 20%. Si se materializa una recesión, la tasa de interés bajará al 6%. Bajo estas condiciones, se espera que el valor nominal del bono suba 5% y que el valor de las acciones aumente 20%. Si la economía no cambia, el valor de las acciones subirá 8% y el valor nominal del bono permanecerá constante. Los economistas estiman que las probabilidades de que la inflación suba son 20% y las de que entre una recesión son 15%. Suponga que basa su decisión de invertir en las condiciones económicas del año venidero.

a) Represente el problema con un árbol de decisión.

b) ¿Invertiría usted en acciones o en bonos?

5. AFC está a punto de lanzar su cadena nacional de restaurantes Wings'N Things, de comida rápida. El departamento de investigación está convencido de que la cadena será un gran éxito, y desea introducirla de inmediato en todas las tiendas AFC, sin anunciarlo. El departamento de mercadotecnia "lo ve distinto" y desea realizar una intensa campaña de publicidad. Esta campaña costaría $100,000 y si tuviera éxito produciría ingresos por $950,000. Si la campaña no tuviera éxito (hay 30% de probabilidades de que no lo tenga), se estima que los ingresos sólo sean de $200,000. Si no hay publicidad, los ingresos se estiman en $400,000, con probabilidades de 0.8 si los clientes se convencen, y de $200,000 si no son receptivos.

a) Trace el árbol de decisión correspondiente.

b) ¿Qué debe hacer AFC para lanzar su nuevo producto?

6. Se lanza tres veces sucesivas una moneda no cargada. Usted recibirá $1.00 por cada cabeza (*H*) que salga, y $0.25 más por cada una de dos caras sucesivas que salgan (recuerde que *HHH* consta de dos conjuntos de *HH*). Sin embargo, usted paga $1.10 por cada cruz que salga. Tiene la opción de entrar o no entrar al juego.

a) Trace el árbol de decisión para el juego.

b) ¿Entraría usted a ese juego?

7. Tiene usted la opción de jugar lo siguiente en un casino: se tira dos veces un dado no cargado y entonces hay cuatro resultados posibles: 1) las dos tiradas tienen números pares iguales, 2) las dos tiradas tienen números impares iguales, 3) las dos tiradas salen par-impar o impar-par y 4) todos los demás resultados. Se le permite apostar exactamente a dos resultados, con cantidades iguales de $. Por ejemplo, puede apostar $ iguales a pares iguales (resultado 1), impares iguales (resultado 2). El premio por cada $ que se apuesta es $2 por el primer resultado, $1.95 por el segundo y tercer resultado y $1.50 por el cuarto resultado.

a) Trace el árbol de decisión para este juego.

b) ¿Alguna vez ganará algo en este juego?

8. Acme Manufacturing fabrica lotes de un artículo con 0.8%, 1%, 1.2% y 1.4% de piezas defectuosas, con las probabilidades correspondientes 0.4, 0.3, 0.25 y 0.05. Se contrata con tres clientes, *A*, *B* y *C*, para recibir lotes con no más de 0.8%, 1.2% y 1.4% de piezas defectuosas, respectivamente. Acme tendrá que pagar $1000 de multa por cada punto porcentual si el porcentaje de piezas defectuosas es mayor que el especificado en el contrato. A la inversa, si suministra lotes de mayor calidad que la requerida, el costo para Acme es de $500 por punto porcentual. Suponga que no se inspeccionan los lotes antes de enviarlos.

a) Trace el árbol de decisión correspondiente.

b) ¿Cuál de los pedidos de los tres clientes se debe recibir con máxima prioridad?

9. TriStar quiere abrir una fábrica nueva en Arkansas. La empresa puede operar una planta grande ahora, o bien una planta pequeña que se puede ampliar en 2 años si prevalecen las condiciones de gran demanda. El horizonte de tiempo para el problema de decisión es 10 años. TriStar estima que la probabilidad de que la demanda sea alta o baja, durante los 10 años próximos, es 0.75 y 0.25, respectivamente. El costo de la construcción inmediata de una fábrica grande es de $5 millones, y una planta pequeña cuesta $1 millón. La ampliación de una fábrica pequeña en 2 años cuesta $4.2 millones. El ingreso de la operación durante los 10 años próximos se ve en la tabla siguiente:

	Ingreso anual estimado (en $1000)	
Alternativa	*Demanda alta*	*Demanda baja*
Planta grande ahora	1000	300
Planta pequeña ahora	250	200
Ampliar planta en 2 años	900	200

a) Forme el árbol de decisión correspondiente, si después de 2 años TriStar tiene la opción de ampliar o no la planta pequeña.

b) Formule una estrategia de construcción para TriStar durante los siguientes 10 años. Para simplificar, no tenga en cuenta el valor del dinero en función del tiempo.

10. Vuelva a hacer el problema 9, suponiendo que la tasa de interés anual es 10%, y que se toman las decisiones teniendo en cuenta el valor del dinero en función del tiempo. (*Nota*: para resolver este problema necesita tablas de interés compuesto.)

11. Vuelva a hacer el problema 9, suponiendo que la demanda puede ser alta, media y baja, con probabilidades respectivas de 0.7, 0.2 y 0.1, respectivamente. La ampliación de la fábrica pequeña sólo si la demanda en los primeros 2 años es alta. La tabla siguiente muestra el ingreso anual. No tenga en cuenta el valor del dinero en función del tiempo.

	Ingreso anual estimado (en $1000)		
Alternativa	*Demanda alta*	*Demanda media*	*Demanda baja*
Planta grande ahora	1000	500	300
Planta pequeña ahora	400	280	150
Ampliar planta en 2 años	900	600	200

12. Sunray Electric Co-op usa una flotilla de 20 camiones para dar servicio a su red eléctrica. La empresa desea establecer mantenimiento preventivo periódico para esa flotilla. La probabilidad de que haya descomposturas en el año 1 es cero. Para el periodo 2, la probabilidad de descom-

posturas es 0.03, y aumenta 0.01 en cada uno de los años 3 a 10. Después del año 10, la probabilidad de descompostura es constante, igual a 0.13. Una descompostura cuesta en promedio $200 por camión, y un mantenimiento programado sólo cuesta $75 por camión. Sunray desea determinar el periodo óptimo, en meses, entre los mantenimientos preventivos programados.

a) Determine el árbol de decisiones correspondiente.

b) Determine la duración del ciclo óptimo de mantenimiento.

13. La demanda diaria de piezas de pan en un almacén se especifica con la siguiente distribución de probabilidades:

n	100	150	200	250	300
p_n	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10

El almacén paga la pieza a 55 centavos y la vende a $1.20. Todas las piezas que no se venden al terminar el día se desechan a 25 centavos cada una. Suponga que se restringen las existencias a uno de los niveles de demanda especificados para p_n.

a) Forme el árbol de decisión correspondiente.

b) ¿Cuántas piezas se deben pedir diariamente?

14. En el problema 13 suponga que el almacén quiere ampliar el problema de decisión a un horizonte de 2 días. Las alternativas para el segundo día dependen de la demanda en el primer día. Si la demanda en el día 1 es igual a la cantidad suministrada, el almacén continuará pidiendo la misma cantidad para el día 2; si es mayor que la cantidad suministrada, el almacén puede pedir cualquiera de los niveles mayores, y si es menor que la cantidad suministrada, sólo puede pedir cualquiera de los niveles menores. Formule el árbol de decisión correspondiente y determine la estrategia óptima de pedidos.

15. Una máquina automática produce α miles de unidades de un producto por día. Al aumentar α, la proporción de piezas defectuosas p sube de acuerdo con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(p) = \begin{cases} \alpha p^{\alpha-1}, & 0 \leq p \leq 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Cada pieza defectuosa incurre en una pérdida de $50. Una pieza correcta produce una utilidad de $5.

a) Formule un árbol de decisión para este problema.

b) Determine el valor de α que maximice la utilidad esperada.

16. El diámetro exterior d de un cilindro que se procesa en una máquina automática tiene límites de tolerancia superior e inferior de $d + t_U$ y $d - t_L$. El proceso de producción se puede describir como distribución normal con media μ y desviación estándar σ. Un cilindro de mayor tamaño se reprocesa con un costo de $\$c_1$. Uno de menor diámetro se debe desechar a un costo de $\$c_2$. Formule el árbol de decisión para determinar el ajuste óptimo d de la máquina.

17. *Criterio del nivel de aspiración.* Acme Manufacturing usa una sustancia industrial en uno de los procesos. La vida en almacén de la sustancia es 1 mes, al cabo del cual todo lo que quede se debe destruir. El uso (en galones) de la sustancia en Acme es aleatorio de acuerdo con la siguiente distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{200}{x^2}, & 100 \leq x \leq 200 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

El consumo real de la sustancia se hace en forma instantánea al comenzar el mes. Acme desea determinar la cantidad de la sustancia que satisfaga los dos criterios (o niveles de aspiración)

opuestos: la cantidad promedio en exceso para el mes no debe rebasar de 20 galones, y la cantidad promedio de faltante en el mes no debe rebasar de 40 galones.

14.2.2 Variaciones del criterio del valor esperado

En esta sección se describen dos asuntos relacionados con el criterio del valor esperado. El primero trata de la determinación de las *probabilidades a posteriori* con base en la experimentación, y el segundo con la determinación de la *utilidad* en función del valor real del dinero.

Probabilidades a posteriori (de Bayes). Las probabilidades que se usaron en el criterio del valor esperado en realidad se obtienen con datos históricos (véase la sección 12.5). En algunos casos se pueden modificar con ventaja esas probabilidades usando muestreo o experimentos. Las probabilidades que resultan se llaman **probabilidades a posteriori (o de Bayes)**, en contraste con las **probabilidades a priori** que se determinan a partir de los datos en bruto. El ejemplo siguiente indica cómo se puede modificar el criterio del valor esperado presentado en la sección 14.2.1 para aprovechar la nueva información proporcionada por las probabilidades a posteriori.

Ejemplo 14.2-2

En el ejemplo 14.2-1 las probabilidades (a priori) de 0.6 y 0.4 para un mercado "a la alza" y "a la baja", respectivamente, se determinaron en publicaciones financieras a la mano. Ahora suponga que más que sólo confiar en esas publicaciones, ha decidido usted hacer una investigación más "personal" consultando a un amigo que ha tenido éxito en el mercado de valores. El amigo ofrece la opinión general de "a favor" o "en contra" de invertir. Esa opinión se cuantifica además de la siguiente manera: si es un mercado "a la alza" hay un 90% de probabilidades que el voto sea "a favor". Si es un mercado "a la baja", la probabilidad de un voto "a favor" baja a 50%. ¿Cómo usaría usted esta información adicional?

La afirmación de su amigo proporciona probabilidades condicionales para "a favor/en contra" dado que los estados de la naturaleza son mercados "a la alza" y "a la baja". Para simplificar la presentación se usarán los siguientes símbolos:

$$\begin{aligned} v_1 &= \text{voto “a favor”} \\ v_2 &= \text{voto “en contra”} \\ m_1 &= \text{mercado “a la alza”} \\ m_2 &= \text{mercado “a la baja”} \end{aligned}$$

La afirmación de su amigo se puede escribir en forma de planteos de probabilidades como sigue:

$$P\{v_1|m_1\} = 0.9,\ P\{v_2|m_1\} = 0.1$$
$$P\{v_1|m_2\} = 0.5,\ P\{v_2|m_2\} = 0.5$$

Con esta información adicional, el problema de decisión se puede resumir como sigue:

1. Si la recomendación del amigo es "a favor", ¿invertiría usted en las acciones de *A* o en las de *B*?
2. Si la recomendación del amigo es "en contra", ¿invertiría usted en las acciones de *A* o en las de *B*?

En realidad, el problema se puede resumir en un árbol de decisión, como el que se ve en la figura 14.5. El nodo 1 es un evento aleatorio que representa las probabilidades "a favor" y

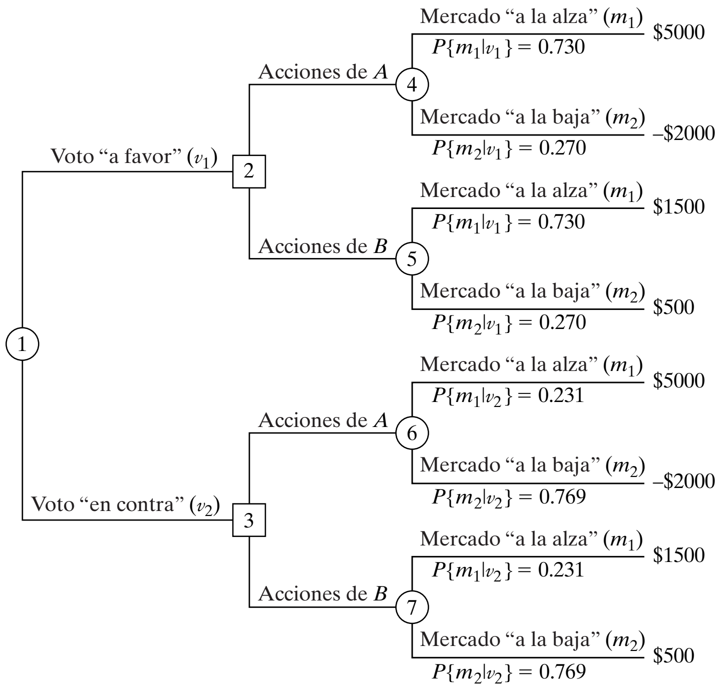


FIGURA 14.5

Árbol de decisión para el problema del mercado accionario, con probabilidades a posteriori

"en contra". Los nodos 2 y 3 son puntos de decisión para elegir entre las acciones de A o de B, dado el voto "a favor" o "en contra" de su amigo, respectivamente. Por último, los nodos 4 a 7 son eventos aleatorios que representan a los mercados "a la alza" y "a la baja".

Para evaluar las distintas alternativas en la figura 14.5, es necesario calcular las probabilidades *a posteriori* $P\{m_i|v_j\}$ que se muestran en las ramas de m_1 y m_2 asociadas a los nodos aleatorios 4, 5, 6 y 7. Esas probabilidades a posteriori se calculan teniendo en cuenta la información adicional que proporciona la recomendación "a favor" o "en contra" de su amigo, y se calcula con los siguientes pasos generales:

Paso 1. Las probabilidades condicionales $P\{v_j|m_i\}$ del problema se pueden resumir como sigue:

	v_1	v_2
m_1	0.9	0.1
m_2	0.5	0.5

Paso 2. Calcular las probabilidades conjuntas como sigue:

$$P\{m_i, v_j\} = P\{v_j|m_i\}P\{m_i\}, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Dadas las probabilidades *a priori* $P\{m_1\} = 0.6$ y $P\{m_2\} = 0.4$, las probabilidades conjuntas se calculan multiplicando el primero y segundo renglones de la tabla en el paso 1 por 0.6 y 0.4, respectivamente. Así se obtiene

	v_1	v_2
m_1	0.54	0.06
m_2	0.20	0.20

La suma de todos los elementos de la tabla es igual a 1.

Paso 3. Calcular las probabilidades absolutas como sigue:

$$P\{v_j\} = \sum_{\text{toda } i} P\{m_i, v_j\}, \text{ para toda } j$$

Estas probabilidades se calculan a partir de la tabla del paso 2, sumando las columnas respectivas, lo cual produce

$P\{v_1\}$	$P\{v_2\}$
0.74	0.26

Paso 4. Determinar las probabilidades a posteriori que se buscan, como sigue:

$$P\{m_i|v_j\} = \frac{P\{m_j, v_j\}}{P\{v_j\}}$$

Esas probabilidades se calculan dividiendo cada columna de la tabla del paso 2 entre el elemento de la columna correspondiente de la tabla del paso 3, con lo que se obtiene (redondeando a 3 dígitos):

	v_1	v_2
m_1	0.730	0.231
m_2	0.270	0.769

Éstas son las propiedades que muestra la figura 14.5. Son distintas de las probabilidades originales $P\{m_1\} = 0.6$ y $P\{m_2\} = 0.4$.

Ya se pueden evaluar las alternativas con base en las percepciones esperadas para los nodos 4, 5, 6 y 7; son las siguientes:

Voto "a favor"

Acciones de A en el nodo 4 $= 5000 \times 0.730 + (-2000) \times 0.270 \times\ = \$\mathbf{3110}$

Acciones de B en el nodo 5 $= 1500 \times 0.730 + 500 \times 0.270 = 1230$

Decisión. Invertir en las acciones de A.

Voto "en contra"

Acciones de A en el nodo 6 $= 5000 \times 0.231 + (-2000) \times 0.769 = -\$383$

Acciones de B en el nodo 7 $= 1500 \times 0.231 + 500 \times 0.769 = \$\mathbf{731}$

Decisión. Invertir en las acciones de *B*.

Tenga en cuenta que las decisiones anteriores equivalen a decir que las retribuciones esperadas en los nodos de decisión 2 y 3 son de \$3110 y de \$731, respectivamente (véase la figura 14.5). Así, dadas las probabilidades $P\{v_1\} = 0.74$ y $P\{v_2\} = 0.26$ calculadas en el paso 3, se puede calcular la retribución esperada para todo el árbol de decisión (véase el problema 3, conjunto de problemas 14.2b).

Cálculo de las probabilidades a posteriori de Bayes en hoja de cálculo. El archivo ch14BayesPosterior.xls de Excel está diseñado para determinar las probabilidades a posteriori de Bayes para matrices de probabilidad condicional con tamaños hasta de 10×10. Los datos incluyen $P\{m\}$ y $P\{v|m\}$. En la figura 14.6 se ve la aplicación del modelo al problema del ejemplo 14.2-2 (los renglones F:K y O:U se ocultaron para ahorrar espacio).

FIGURA 14.6

Cálculo de probabilidades a posteriori de Bayes, para el ejemplo 14.2-2, con Excel

	A	B	C	D	E	L	M	N
1	Bayes Posterior Probabilities							
2	Input Data						Output Results	
3			$P\{v \mid m\}$ (10 x 10) maximum					P{v,m}
4	P{m}		v1	v2			v1	v2
5	m1	0.6	0.9	0.1			0.5400	0.0600
6	m2	0.4	0.5	0.5			0.2000	0.2000
15	Input Data Error Messages						P{v}	
16							0.7400	0.2600
17							$P\{m \mid v\}$	
18						m1	0.7297	0.2308
19						m2	0.2703	0.7692

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.2B

1. En una universidad local, los datos indican que el 75% de los alumnos nuevos que estudiaron cálculo en preparatoria salen bien, en comparación con el 50% de quienes no tomaron cálculo. Los ingresos en el año académico actual indican que sólo el 30% de los alumnos nuevos han terminado un curso de cálculo. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno de nuevo ingreso se desempeñe bien en la universidad?

2. Elektra recibe el 75% de sus componentes electrónicos del proveedor *A* y el 25% restante del vendedor *B*. Los porcentajes de artículos defectuosos de los proveedores *A* y *B* son 1 y 2%, respectivamente. Cuando se inspecciona una muestra aleatoria de tamaño 5 en un lote recibido, sólo se encuentra defectuosa una unidad. Determine la probabilidad de que el lote se haya recibido del proveedor *A*. Haga lo mismo para el proveedor *B*. (*Sugerencia*: la probabilidad de que haya una pieza defectuosa en una muestra es binomial.)

3. En el ejemplo 14.2-2, suponga que tiene la opción adicional de invertir los \$10,000 en un certificado de depósito, que es seguro y produce el 8% de interés. El consejo de su amigo sólo se aplica a la inversión en el mercado de acciones.

a) Forme el árbol de decisión correspondiente.

b) ¿Cuál es la decisión óptima en este caso? (*Sugerencia:* use $P\{v_1\}$ y $P\{v_2\}$ del paso 3 en el ejemplo 14.2-2 para determinar el valor esperado de invertir en el mercado accionario.)

4. Usted es el autor de lo que promete ser una novela exitosa. Tiene la opción de publicarla con sus propios medios, o de recurrir a un editor. El editor le ofrece $20,000 por firmar un contrato de publicación. Si la novela tiene éxito, venderá 200,000 ejemplares. Si no lo tiene, sólo venderá 10,000 ejemplares. El editor le paga una regalía de $1 por ejemplar. Una encuesta de mercado por parte del editor indica que hay 70% de probabilidades de que la novela tenga éxito. Si en caso contrario, usted la publica con sus propios medios, le costará $90,000 imprimirla y distribuirla, pero cada ejemplar le rendirá $2 netos.

a) Con base en esta información, ¿aceptaría la oferta del editor, o publicaría usted mismo la novela?

b) Suponga que contrató a un agente literario para hacer una encuesta acerca del éxito potencial de la novela. Según su experiencia, el agente le dice que cuando una novela tiene éxito, la encuesta será errónea el 20% de las veces. Cuando la novela no tiene éxito, la encuesta será acertada el 85% de las veces. ¿Cómo afectaría esta información a su decisión?

5. En el caso de la decisión del agricultor McCoy del problema 2, conjunto de problemas 14.2a, este señor tiene la opción adicional de usar el terreno como de pastoreo, en cuyo caso se le garantiza una retribución de $7500. El agricultor también se ha conseguido información de un comerciante, acerca de la estabilidad de los precios en el futuro. La evaluación del comerciante es "favorable" y "desfavorable" y entonces se cuantifica con las siguientes probabilidades condicionales:

$P\{a_j \mid s_i\} =$	a_1	a_2
s_1	0.85	0.15
s_2	0.50	0.50
s_3	0.15	0.85

Los símbolos a_1 y a_2 representan las evaluaciones de "favorable" y "desfavorable" por parte del comerciante, y s_1, s_2 y s_3 representan, respectivamente, los cambios a la alza, sin cambio y a la baja en los precios futuros.

a) Forme el árbol de decisión correspondiente.

b) Describa la decisión óptima en este problema.

6. En el problema 5, conjunto de problemas 14.2, suponga que la administración de AFC ha decidido probar el mercado de sus tiendas Wings'N Things en determinados lugares. El resultado de la prueba puede ser "bueno" (a_1) o "malo" (a_2). La prueba produce las siguientes probabilidades condicionales, con y sin la campaña de publicidad:

$P\{a_j \mid v_i\}$ con campaña	a_1	a_2
v_1	0.95	0.05
v_2	0.3	0.7

$P\{a_j \mid w_i\}$ sin campaña	a_1	a_2
w_1	0.8	0.2
w_2	0.4	0.6

Los símbolos v_1 y v_2 representan "éxito" y "no éxito", y w_1 y w_2 representan "receptivo" y "no receptivo".

a) Formule el árbol de decisión correspondiente.

b) Determine las mejores acciones para AFC.

7. Según los datos históricos de Acme Manufacturing, se estima una probabilidad del 5% de que un lote de artículos que fabricó no sean aceptables (malos). Un lote malo tiene 15% de piezas

defectuosas y un lote bueno tiene sólo 4% de piezas defectuosas. Si $a = \theta_1$ $(= \theta_2)$ indica que el lote es bueno (malo), las probabilidades a priori correspondientes son

$$P\{a = \theta_1\} = 0.95 \text{ y } P\{a = \theta_2\} = 0.05$$

En lugar de mandar lotes sólo en base a sus probabilidades a priori, se usa una muestra de dos artículos, que puede tener tres resultados: 1) los dos artículos son buenos (z_1), 2) un artículo es bueno (z_2) y 3) los dos artículos son malos (z_3).

a) Calcule las probabilidades a posteriori $P\{\theta_i|z_j\}$, $i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$.

b) Suponga que el fabricante manda lotes a dos clientes, *A* y *B*. Los contratos especifican que las piezas defectuosas para *A* y *B* no deben rebasar el 5 y 8%, respectivamente. Se incurre en una multa de $100 por cada punto porcentual arriba del límite máximo. Si se suministran lotes con mejor calidad que la que pide el contrato, le cuesta al fabricante $50 por punto porcentual de mejoría. Formule el árbol de decisión y a continuación determine una estrategia de prioridades para mandar sus lotes.

Funciones de utilidad. En la explicación anterior se ha aplicado el criterio del valor esperado a casos en los que la retribución es dinero *contante y sonante*. Hay casos en donde se debe usar la *conveniencia* o *utilidad*, y no el valor real del dinero, en el análisis. Para ilustrar este punto supongamos que hay 50-50 de probabilidades de que una inversión de $20,000 produzca una ganancia de $40,000, o de que se pierda por completo. La ganancia esperada correspondiente es $40,000 \times 0.5 - 20,000 \times 0.5 = \$10,000$. Aunque hay una ganancia neta esperada, las diferentes personas pueden interpretar el resultado en distintas formas. Un inversionista que admite riesgos puede acometer la inversión diciendo que hay 50% de probabilidades de obtener $40,000 de ganancia. A la inversa, un inversionista conservador no tomará el riesgo de perder $20,000. Desde este punto de vista, se dice que distintas personas tienen distintas actitudes hacia el riesgo. Esto se traduce diciendo que las personas expresan distinta *conveniencia* o *utilidad* con respecto al riesgo.

La determinación de la utilidad o conveniencia es subjetiva. Depende de la actitud acerca de aceptar el riesgo. En esta sección presentaremos un procedimiento para cuantificar el grado de tolerancia hacia el riesgo, de quien toma las decisiones. El resultado final es una función de utilidad que sustituye al dinero real.

En este ejemplo de inversión, la mejor retribución es de $40,000, y la peor es de −$20,000. De este modo se establece una escala de utilidad arbitraria, aunque lógica *U*, de 0 a 100, en la que 0 es la retribución de −$20,000 y 100 es la utilidad de $40,000; esto es, $U(-\$20,000) = 0$ y $U(\$40,000) = 100$. A continuación se determina la utilidad para valores intermedios de −$20,000 y $40,000. El objetivo es establecer la forma general de la función de utilidad.

Si la actitud de quien toma la decisión es indiferente con respecto al riesgo, la función de utilidad resultante será una recta que una a (0, −$20,000) con (100, $40,000). En este caso, tanto el dinero real como su utilidad deben producir decisiones consistentes. Para los casos más realistas, la función de utilidad puede adoptar otras formas, que reflejen la actitud hacia el riesgo de quien toma decisiones. La figura 14.7 ilustra los casos de los individuos *X*, *Y* y *Z*. El individuo *X* es **precavido** (o cauteloso) porque tiene mayor sensibilidad a pérdidas que a ganancias. El individuo *Z* es lo contrario; es una persona **arrojada**. La figura muestra que para la persona precavida *X*, la caída en la utilidad que corresponde a una pérdida de $10,000 es mayor que el aumento asociado con una ganancia de $10,000; esto es, $bc > ab$. Para los mismos cambios de ± $10,000 el arrojado *Z* muestra un comportamiento opuesto, porque $de > ef$.

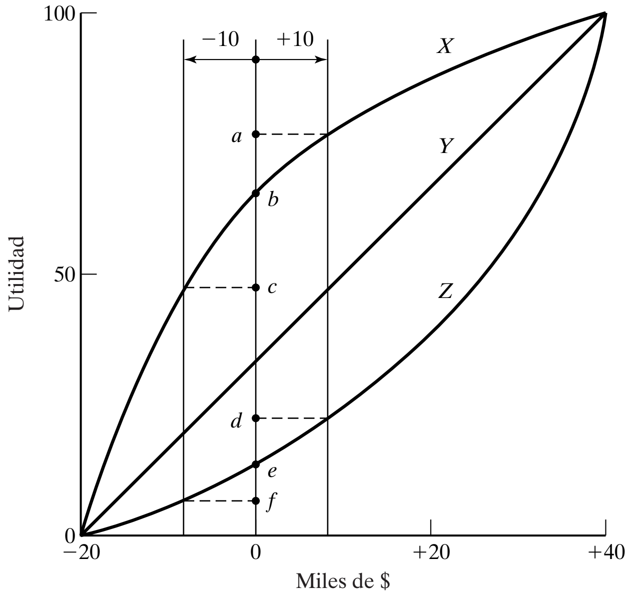


FIGURA 14.7
Funciones de utilidad para tomadores de decisiones precavidos (X), indiferentes (Y) y arriesgados (Z)

Además el individuo *Y* es **neutral**, porque los cambios sugeridos producen cambios iguales en la utilidad. En general, un individuo puede ser precavido y arrojado al mismo tiempo, en cuyo caso la curva de conveniencia tendrá la forma de una *S* alargada.

Las curvas de utilidad como las de la figura 14.7 se determinan "cuantificando" la actitud del tomador de decisiones hacia el riesgo, para distintos niveles de dinero en efectivo. En nuestro ejemplo, el intervalo deseado es (−$20,000 a $40,000), y el intervalo correspondiente de utilidad es (0 a 100). ¿Y si quisiéramos especificar la utilidad correspondiente a los valores intermedios de dinero en efectivo, por ejemplo −$10,000, $0, $10,000, $20,000 y $30,000? El procedimiento comienza estableciendo una **lotería** para una cantidad monetaria *x*, cuya utilidad esperada se define como:

$$\begin{aligned} U(x) &= pU(-20{,}000) + (1 - p)U(\$40{,}000),\ 0 \le p \le 1 \\ &= 0p + 100(1 - p) \\ &= 100 - 100p \end{aligned}$$

Para determinar $U(x)$, se pide a quien toma decisiones que defina una preferencia entre una cantidad de dinero *garantizada* x y la oportunidad de jugar en una lotería, en la que se incurre en una pérdida de −$20,000 con probabilidad p, y una utilidad de $40,000 con una probabilidad $1 - p$. Quien toma las decisiones traduce la preferencia especificando el valor de p que transforme en indiferentes a las dos opciones. Por ejemplo, si $x = \$20{,}000$, el tomador de decisiones puede decir que los $20,000 en efectivo garantizados y la lotería tienen para él igual atractivo si $p = 0.8$. En este caso se calcula la utilidad de $x = \$20{,}000$ como sigue:

$$U(\$20{,}000) = 100 - 100 \times 0.8 = 20$$

De este modo se continúa hasta haber generado los puntos suficientes [$U(x)$ en función de x] para identificar la forma de la función de utilidad. A continuación se podrá determinar

esa función mediante análisis de regresión, o tan sólo con interpolación lineal entre los puntos generados.

Aunque se está usando un procedimiento cuantitativo para determinar la función de utilidad, el procedimiento está muy lejos de ser científico. El hecho de que el procedimiento se base sólo en la opinión aportada por quien toma las decisiones produce dudas sobre la fiabilidad del proceso. En particular, en el procedimiento se supone, en forma implícita, que quien toma las decisiones es racional, y ese requisito no siempre se puede reconciliar con los grandes cambios en el comportamiento y humor que caracterizan a los humanos. A este respecto, los tomadores de decisiones deben tomar el concepto de utilidad en el sentido amplio, según el cual los valores monetarios no debieran ser el único factor crítico en la toma de decisiones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.2C

1. Usted es alumno de la Universidad de Arkansas, y con desesperación desea asistir al siguiente juego de básquetbol de los Razorbacks. El problema es que el boleto cuesta $10, y usted sólo tiene $5. Puede apostar sus $5 en un juego de póquer, con una probabilidad de 50-50 de duplicar su dinero, o de perderlo.

a) Con base en el valor real del dinero, ¿estaría usted tentado a participar en el juego de póquer?

b) Con base en su deseo ardiente de ver el juego, traduzca el valor real del dinero en una función de utilidad.

c) Con base en la función de utilidad que definió usted en b), ¿estaría tentado a participar en el juego de póquer?

2. La familia Golden acaba de mudarse a una zona sísmica. Desean definir si deben construir su casa usando el reglamento para zonas sísmicas con normas muy estrictas. Esta construcción les costará $850,000; en cualquier otro caso, una casa equivalente se puede construir sólo con $350,000. Si sucede un terremoto (hay una probabilidad de 0.001 de que ocurra), costaría $900,000 reparar una casa construida sin normas estrictas. Defina la lotería correspondiente a este caso, suponiendo una escala de conveniencia de 0 a 100.

3. Una inversión de $10,000 en una empresa de alto riesgo tiene probabilidades de 50-50 de aumentar a $14,000 durante el año próximo, o de bajar a $8000. Eso quiere decir que la ganancia neta puede ser de $4000 o de −$2000.

a) Suponga que un inversionista es neutral al riesgo, y que la escala de utilidad es de 0 a 100; determine la utilidad asociada a un *rendimiento neto* de $0 sobre la inversión, y la probabilidad correspondiente de indiferencia.

b) Suponga que dos inversionistas, *A* y *B*, han mostrado las siguientes probabilidades de indiferencia:

	Probabilidad de indiferencia	
Ingresos netos ($)	*Inversionista A*	*Inversionista B*
−2000	1.00	1.00
−1000	0.30	0.90
0	0.20	0.80
1000	0.15	0.70
2000	0.10	0.50
3000	0.05	0.40
4000	0.00	0.00

Grafique las funciones de utilidad para los inversionistas *A* y *B*, y clasifíquelos en precavidos o arrojados (adversos o propensos al riesgo, respectivamente).

c) Suponga que el inversionista *A* tiene la posibilidad de invertir en una de dos empresas, I y II. La empresa I puede producir una ganancia neta de $3000 con probabilidad de 0.4, o una ganancia neta de $1000 con probabilidad de 0.6. La empresa II puede producir una ganancia neta de $2000 con probabilidad de 0.6 y cero ganancia con probabilidad 0.4. Con base en la función de utilidad que obtuvo en b), use el criterio de la utilidad esperada para determinar cuál empresa debe seleccionar el inversionista *A*. ¿Cuál es el valor monetario esperado para la segunda empresa (usando interpolación lineal en la función de utilidad)?

d) Repita la parte c) con el inversionista *B*.

14.3 DECISIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

La toma de decisiones bajo incertidumbre, al igual que bajo riesgo, implica acciones alternativas cuyas retribuciones dependen de los *estados de la naturaleza* (aleatorios). En forma específica, la matriz de retribución de un problema de decisión con *m* acciones alternativas y *n* estados de la naturaleza, se puede representar como sigue:

	s_1	s_2	$\cdots$	s_n
a_1	$v(a, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	$\cdots$	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_1, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	$\cdots$	$v(a_2, s_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	$\cdots$	$v(a_m, s_n)$

El elemento a_i representa la acción *i*, y el elemento s_j representa el estado de la naturaleza *j*. La retribución o resultado asociado con la acción a_i y el estado s_j es $v(a_i, s_j)$.

La diferencia entre tomar una decisión bajo riesgo y bajo incertidumbre es que en el caso de la incertidumbre, la distribución de probabilidades correspondiente a los estados s_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, se desconoce o no se puede determinar. Esta falta de información ha conducido a desarrollar los criterios siguientes para analizar el problema de decisiones:

1. Laplace
2. Minimax
3. Savage
4. Hurwicz

Esos criterios difieren en el grado de conservadurismo que presente quien toma decisiones al encarar la incertidumbre.

El criterio de **Laplace** se basa en el **principio de la razón insuficiente**. Como no se conocen las distribuciones de probabilidades de los estados de la naturaleza, $P\{s_j\}$, no hay razón para creer que sean distintas. Así, las alternativas se evalúan con la hipótesis *optimista* de que es igualmente probable que ocurra cualquiera de todos los estados, esto es, que $P\{s_1\} = P\{s_2\} = \ldots = P\{s_n\} = \frac{1}{n}$. Dado que la retribución $v(a_i, s_j)$ representa ganancia, la mejor alternativa es la que produce

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j)\right\}$$

Si $v(a_i, s_j)$ representa una pérdida, entonces la minimización sustituye a la maximización.

El criterio **maximin (minimax)** se basa en la actitud conservadora de elegir la mejor entre las peores condiciones posibles. Si $v(a_1, s_1)$ es una pérdida, se selecciona la acción que corresponde al criterio *minimax*

$$\min_{a_i}\{\max_{s_j} v(a_i, s_j)\}$$

Si $v(a_i, s_j)$ es ganancia, se usa el criterio *maximin*, definido por

$$\max_{a_i}\{\min_{s_j} v(a_i, s_j)\}$$

El criterio de **pesadumbre** o **arrepentimiento de Savage** trata de moderar el conservadurismo del criterio *minimax* (*maximin*) reemplazando la matriz de retribución (de ganancia o pérdida) $v(a_i, s_j)$ por una matriz de *pérdida* (o pesadumbre) mediante la siguiente transformación:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} v(a_i, s_j) - \min_{a_k}\{v(a_k, s_j)\}, \text{ si } v \text{ es pérdida} \\ \max_{a_k}\{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), \text{ si } v \text{ es ganancia} \end{cases}$$

Para ver cómo el criterio de Savage "modera" el criterio minimax (maximin), veamos la siguiente matriz de *pérdida* $v(a_i, s_j)$:

	s_1	s_2	Máx. de renglón
a_1	\$11,000	\$90	\$11,000
a_2	\$10,000	\$10,000	**\$10,000** ← Minimax

La aplicación del criterio minimax indica que es preferible a_2, con una pérdida segura de \$10,000. Sin embargo, podríamos optar por a_1, porque hay una probabilidad de sólo perder \$90 si ocurre s_2.

Veamos lo que sucede si se usa la siguiente matriz de pesadumbre/arrepentimiento, $r(a_i, v_i)$:

	s_1	s_2	Máx. de renglón
a_1	\$1000	\$0	**\$1000** ← Minimax
a_2	\$0	\$9910	\$9910

El criterio minimax, cuando se aplica a la matriz de pesadumbre/arrepentimiento, seleccionará a a_1, que era lo que se buscaba.

El criterio de **Hurwicz** está diseñado para reflejar las actitudes de toma de decisiones que vayan desde la más optimista hasta la más pesimista. Se define $0 \leq \alpha \leq 1$, y se supone que $v(a_i, s_j)$ representa una ganancia. Entonces, la acción que se seleccione debe estar asociada con

$$\max_{a_i}\{\alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\}$$

El parámetro α es el **índice de optimismo**. Si $\alpha = 0$, el criterio es conservador, porque se aplica el criterio minimax normal. Si $\alpha = 1$, el criterio produce resultados optimistas, porque busca *la mejor de las mejores* condiciones. Se puede ajustar el grado de optimismo (o de pesimismo) seleccionando un valor adecuado de α en el intervalo (0, 1). En ausencia de una fuerte preferencia al optimismo o al pesimismo, una elección adecuada sería $\alpha = 0.5$

Si $v(a_i, s_j)$ representa una pérdida, entonces el criterio cambia a

$$\min_{a_i}\{\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha)\max_{s_j} v(a_i, s_j)\}$$

Ejemplo 14.3-1

National Outdoors School (NOS) prepara un campamento de verano en el corazón de Alaska, para adiestrar a las personas en supervivencia en la naturaleza. Estima que la asistencia puede estar en una de cuatro categorías: 200, 250, 300 y 350 personas. El costo del campamento será mínimo si se construye para adaptarse exactamente a la demanda. Las variaciones de más o menos de la demanda ideal incurren en costos adicionales, debidos a construcciones sobrantes (no usadas) o a ingresos perdidos, cuando no cabe toda la demanda. Si a_1 a a_4 representan los tamaños de los campamentos (200, 250, 300 y 350 personas) y s_1 a s_4 la asistencia, la tabla siguiente resume la matriz de costo (en miles de $) en este caso.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

El problema se analizará con los cuatro criterios.

Laplace. Dada $P\{s_j\} = \frac{1}{4}$, $j = 1, 2, 3, 4$, los valores esperados para las diversas acciones se calculan como sigue:

$$E\{a_1\} = \tfrac{1}{4}(5 + 10 + 18 + 25) = \$14{,}500$$

$$E\{a_2\} = \tfrac{1}{4}(8 + 7 + 12 + 23) = \$\mathbf{12{,}500} \leftarrow \text{Óptimo}$$

$$E\{a_3\} = \tfrac{1}{4}(21 + 18 + 12 + 21) = \$18{,}000$$

$$E\{a_4\} = \tfrac{1}{4}(30 + 22 + 19 + 15) = \$21{,}500$$

Minimax. El criterio minimax produce la siguiente matriz:

	s_1	s_2	s_3	s_4	Máx. de renglón
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	**21** ← Minimax
a_4	30	22	19	15	30

Savage. La matriz de pesadumbre/arrepentimiento se determina restando 5, 7, 12 y 15 de las columnas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Entonces,

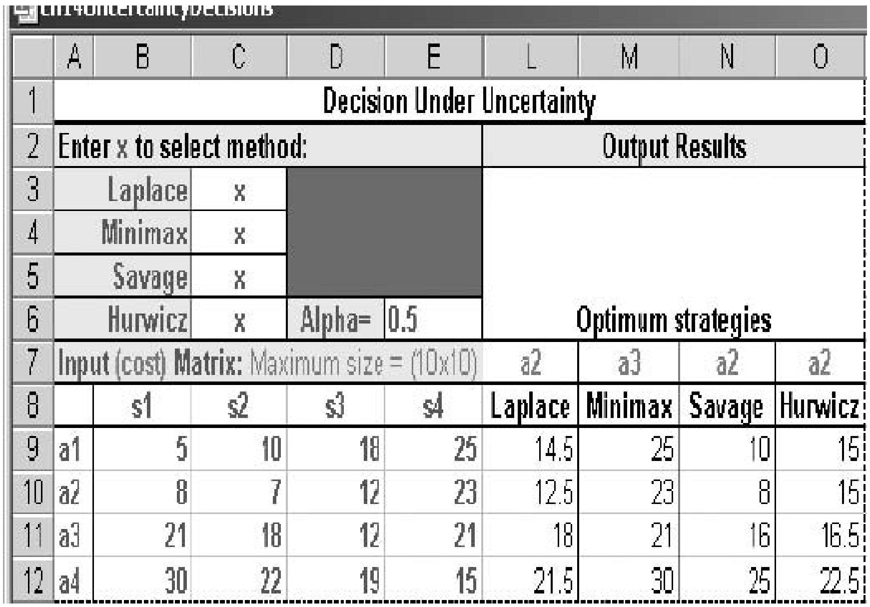
	s_1	s_2	s_3	s_4	Máx. de renglón
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	**8** ← Minimax
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Hurwicz. La tabla siguiente es un resumen de los cálculos.

Alternativa	Mín. de renglón	Máx. de renglón	α (Mín. de renglón) + $(1 - \alpha)$(Máx. de renglón)
a_1	5	25	$25 - 20\alpha$
a_2	7	23	$23 - 16\alpha$
a_3	12	21	$21 - 9\alpha$
a_4	15	30	$30 - 15\alpha$

Si se usa una α, adecuada, se puede determinar la alternativa óptima. Por ejemplo, con $\alpha = 0.5$, a_1 o a_2 producirán el óptimo; y si $\alpha = 0.25$, a_3 lo óptimo será a_3.

Solución de decisión bajo incertidumbre con hoja de cálculo. Se puede usar el modelo ch14UncertaintyDecision.xls de Excel para automatizar los cálculos con criterios de Laplace, maximin, de Savage y de Hurwicz. La hoja se basa en el uso de una matriz de *costo*. Para usar una matriz de recompensa se deben multiplicar todos los elementos por -1. La figura 14.8 muestra la aplicación de la plantilla al ejemplo 14.3-1. El tamaño máximo de la matriz es (10×10) (se han omitido las columnas F:K para ahorrar espacio).



	A	B	C	D	E	L	M	N	O
1	Decision Under Uncertainty								
2	Enter x to select method:					Output Results			
3		Laplace	x						
4		Minimax	x						
5		Savage	x						
6		Hurwicz	x	Alpha=	0.5	Optimum strategies			
7	Input (cost) Matrix: Maximum size = (10x10)					a2	a3	a2	a2
8		s1	s2	s3	s4	Laplace	Minimax	Savage	Hurwicz
9	a1	5	10	18	25	14.5	25	10	15
10	a2	8	7	12	23	12.5	23	8	15
11	a3	21	18	12	21	18	21	16	16.5
12	a4	30	22	19	15	21.5	30	25	22.5

FIGURA 14.8

Solución del ejemplo 14.3-1 con Excel

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.3A

1. Hank es un alumno inteligente, y normalmente obtiene buenas calificaciones, siempre que tenga la oportunidad de repasar el curso la noche anterior al examen. Para el examen de mañana, Hank

tiene un pequeño problema. Sus compañeros organizan una fiesta que durará toda la noche, a la que él quisiera ir. Tiene entonces tres opciones:

a_1 = Estar de fiesta toda la noche

a_2 = Dividir por igual la noche en el estudio y en la fiesta

a_3 = Estudiar toda la noche

El profesor que hará la prueba mañana es impredecible, porque el examen puede ser fácil (s_1), moderado (s_2) o difícil (s_3). Dependiendo de la dificultad del examen y de lo que haya repasado Hank, se pueden prever las siguientes calificaciones:

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

a) Recomiende a Hank lo que debe hacer, con base en cada uno de los cuatro criterios de decisión bajo incertidumbre.

b) Suponga que a Hank le interesa más obtener la mejor calificación, en letras. Las equivalencias de las calificaciones de aprobado de A a D son 90, 80, 70 y 60, respectivamente. ¿Cambiará esta actitud hacia las calificaciones con letra la decisión de Hank?

2. Para la próxima siembra, el agricultor McCoy tiene cuatro opciones:

a_1 = Sembrar maíz

a_2 = Sembrar trigo

a_3 = Sembrar soya

a_4 = Usar la tierra para pastoreo

Las recompensas correspondientes a las distintas acciones se ven influidas por la cantidad de lluvia, que podría ser uno de los cuatro estados siguientes:

s_1 = Lluvias abundantes

s_2 = Lluvias moderadas

s_3 = Lluvias escasas

s_4 = Sequía

Se estima que la matriz de recompensa, en miles de $, es la siguiente:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	−20	60	30	−5
a_2	40	50	35	0
a_3	−50	100	45	−10
a_4	12	15	15	10

Describa las acciones que debe emprender el campesino McCoy.

3. Se debe seleccionar una de N máquinas para fabricar Q unidades de determinado producto. Las demandas mínima y máxima del producto son Q^* y Q^{**}, respectivamente. El costo total de producir Q artículos en la máquina i se compone de un costo fijo K_i y un costo variable por unidad c_i, y es el siguiente:

$$TC_i = K_i + c_iQ$$

a) Llegue a una solución para el problema, bajo cada uno de los cuatro criterios de decisión bajo incertidumbre.

b) Para $1000 \leq Q \leq 4000$, resuelva el problema para el siguiente conjunto de datos:

Máquina i	K_i($)	C_i($)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

14.4 TEORÍA DE JUEGOS

La teoría de juegos maneja situaciones de decisión en las que hay dos oponentes *inteligentes* que tienen objetivos contrarios. Entre los ejemplos característicos están lanzamientos de campañas de publicidad para productos que compiten, y la planeación de estrategias bélicas de los ejércitos contrarios. Estas situaciones contrastan con las que hemos estudiado hasta ahora, en las que no se considera que la *naturaleza* sea un oponente malévolo.

En un conflicto de juego hay dos oponentes, llamados **jugadores**, y cada uno tiene una cantidad (finita o infinita) de alternativas o **estrategias**. Asociada con cada par de estrategias hay una **recompensa** que paga un jugador al otro. A esos juegos se les llama **juegos entre dos personas con suma cero**, porque la ganancia de un jugador es igual a la pérdida del otro. Si se representan los dos jugadores con A y B, con m y n estrategias, respectivamente, el juego se suele representar con la matriz de recompensa para el jugador A, que es la siguiente:

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

La representación indica que si A usa la estrategia i y B usa la estrategia j, la recompensa para A es a_{ij}, y entonces la recompensa para B es $-a_{ij}$.

14.4.1 Solución óptima de juegos de dos personas con suma cero

Como los juegos tienen su base en el conflicto de intereses, la solución óptima escoge una o más estrategias para cada jugador, de tal modo que cualquier cambio en las estrategias elegidas no mejore la recompensa para cualquiera de los jugadores. Esas soluciones pueden tener la forma de una sola estrategia pura, o varias estrategias mezcladas de acuerdo con probabilidades predeterminadas. Los dos ejemplos siguientes muestran los dos casos.

Ejemplo 14.4-1

Dos empresas, *A* y *B*, venden dos marcas de vacuna para la gripe. La empresa *A* se anuncia en radio (A_1), en televisión (A_2) y en los periódicos (A_3). La empresa *B*, además de usar la radio (B_1), la televisión (B_2) y los periódicos (B_3), también envía folletos por correo (B_4). De acuerdo con el ingenio y la intensidad de la campaña publicitaria, cada empresa puede capturar una parte del mercado que correspondía a la otra. La matriz siguiente es un resumen del porcentaje del mercado capturado o perdido por la empresa *A*.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Mín. de renglón
A_1	8	−2	9	−3	−3
A_2	6	**5**	6	8	**5** Maximin
A_3	−2	4	−9	5	−9
Máx. de columna	8	**5**	9	8	
		Minimax			

La solución del juego se basa en el principio de asegurar lo *mejor de lo peor* para cada jugador. Si la empresa *A* selecciona la estrategia A_1, entonces, independientemente de lo que haga *B*, lo peor que puede suceder es que *A* pierda el 3% del mercado, que adquiere *B*. Esto se representa con el valor mínimo de los elementos en el renglón 1. De igual modo, el peor de los resultados de la estrategia A_2 para *A*, es que *B* le gane el 9% del mercado. Los resultados se ponen en la columna "mín de renglón". Para lograr *lo mejor* de *lo peor*, la empresa *A* escoge la estrategia A_2, porque corresponde al valor maximin, o sea el elemento mayor de la columna "mín de renglón".

A continuación veamos la estrategia de la empresa *B*. Como la matriz de recompensa dada es para *A*, el criterio de *lo mejor de lo peor* de *B* requiere determinar el valor minimax, para lo cual *B* debe seleccionar la estrategia B_2.

La solución óptima del juego pide seleccionar las estrategias A_2 y B_2, esto es, ambas empresas deben usar publicidad por televisión. La recompensa favorecerá a la empresa *A*, porque su parte del mercado aumentará 5%. En este caso, se dice que el **valor del juego** es 5%, y que *A* y *B* están usando una solución de estrategia pura de **punto de silla**.

La solución de punto de silla garantiza que ninguna empresa tenga la tentación de seleccionar una estrategia mejor. Si *B* pasa a otra estrategia (B_1, B_3 o B_4), la empresa *A* puede permanecer con la estrategia A_2, con la que asegura que *B* pierda una parte del mercado (6% u 8%). Por la misma razón, *A* no desea usar una estrategia distinta, porque si *A* pasa a la estrategia A_3, *B* puede cambiar a B_3 y realizar un aumento de 9% en su parte del mercado. Se llega a una conclusión parecida si *A* cambia a A_1.

La solución óptima de un punto de silla para un juego no necesita estar caracterizada por estrategias puras. En su lugar, la solución puede requerir una mezcla aleatoria de dos o más estrategias, como se verá en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 14.4-2

Dos jugadores, *A* y *B*, juegan a tirar la moneda. Cada jugador, desconocido para el otro, escoge una cara (*H*) o una cruz (*T*). Los dos jugadores dicen su elección al mismo tiempo. Si coinciden (*HH* o *TT*), el jugador *A* recibe \$1 del jugador *B*. En cualquier otro caso, *A* paga \$1 a *B*.

La siguiente matriz de recompensa para el jugador A muestran los valores mínimo de renglón y máximo de columna que corresponden a las estrategias de A y de B, respectivamente.

	B_H	B_T	Mín. de renglón
A_H	1	−1	−1
A_T	−1	1	−1
Máx. de columna	1	1	

Los valores maximin y minimax de los juegos son $-\$1$ y $\$1$, respectivamente. Como los dos valores no son iguales, el juego no tiene solución de estrategia pura. En particular, si el jugador A usa A_H, el jugador B seleccionará B_T para recibir \$1 de A. Si eso sucede, A puede cambiar a la estrategia A_T para invertir el resultado del juego, y recibir \$1 de B. La tentación constante de los dos jugadores, de cambiar de estrategia, muestra que no se acepta una solución de estrategia pura. En lugar de ello, ambos jugadores deben usar mezclas aleatorias de sus estrategias respectivas. En este caso, el valor óptimo del juego estará en algún punto entre los valores maximin y minimax del juego, esto es,

$$\text{valor maximin (inferior)} \leq \text{valor del juego} \leq \text{valor minimax (superior)}$$

(véase el problema 5, conjunto de problemas 14.4a). Así, en el ejemplo de lanzar la moneda, el valor del juego debe estar entre $-\$1$ y $+\$1$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4A

1. Determine la solución de punto de silla, las estrategias puras asociadas y el valor del juego para cada uno de los juegos siguientes. Las recompensas son para el jugador A.

a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	−4	−5	6
A_2	−3	−4	−9	−2
A_3	6	7	−8	−9
A_4	7	3	−9	5

2. Los juegos siguientes muestran las recompensas de A. Determine los valores de p y de q que hagan que el punto (2,2) de cada juego sea un punto de silla:

a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	q	6
A_2	p	5	10
A_3	6	2	3

b)

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	10	7	q
A_3	4	p	6

3. Especifique el intervalo de valores del juego en cada uno de los casos siguientes, suponiendo que la recompensa es para el jugador A:

a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	9	6	0
A_2	2	3	8	4
A_3	−5	−2	10	−3
A_4	7	4	−2	−5

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	9	6	8
A_2	−2	10	4	6
A_3	5	3	0	7
A_4	7	−2	8	4

c)

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	1
A_2	5	2	3
A_3	4	2	−5

d)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	1	3
A_2	4	8	0	−6
A_3	6	−9	−2	4

4. Dos empresas anuncian dos productos (uno cada una) que compiten. En la actualidad, cada producto controla el 50% del mercado. Debido a las mejoras recientes en los dos productos, cada empresa se prepara para lanzar una campaña publicitaria. Si ninguna empresa anuncia, seguirán las partes iguales en el mercado. Si cualquiera de ellas lanza una campaña más intensa, es seguro de la otra perderá un porcentaje proporcional de sus clientes. El estudio de mercado indica que con televisión se puede llegar al 50% de los clientes potenciales, con periódicos al 30%, y con la radio al 20 por ciento.

a) Formule el problema como un juego entre dos personas con suma cero y seleccione los medios publicitarios adecuados, para cada una de las dos empresas.

b) Determine un intervalo del valor del juego. ¿Puede operar cada empresa con una sola estrategia pura?

5. Sea a_{ij} el elemento (i,j)-ésimo de una matriz de recompensa con m estrategias para el jugador A y n estrategias para el jugador B. La recompensa es para el jugador A. Demuestre que

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

14.4.2 Solución de juegos con estrategia mixta

Se pueden resolver en forma gráfica o con programación lineal los juegos con estrategias mixtas. La solución gráfica es adecuada para juegos en los que al menos un jugador tiene exactamente dos estrategias puras. El método es interesante, porque explica en forma gráfica la idea de un punto de silla. Se puede usar la programación lineal para resolver cualquier juego entre dos personas con suma cero.

Solución gráfica de juegos. Comenzaremos con el caso de juegos $(2 \times n)$ en los que el jugador A tiene dos estrategias. La recompensa es para el jugador A.

	y_1 B_1	y_2 B_2	$\cdots$ $\cdots$	y_n B_n
x_1: A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
$1 - x_1$: A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}

En el juego se supone que el jugador A mezcla las estrategias A_1 y A_2 con las probabilidades respectivas x_1 y $1 - x_1$, $0 \leq x_1 \leq 1$. El jugador B mezcla las estrategias $B_1, B_2, \ldots, B_n$ con las probabilidades $y_1, y_2, \ldots$, siendo $y_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, y $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. En este caso, la recompensa esperada por A correspondiente a la j-ésima estrategia pura de B se calcula como sigue:

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 - a_{2j},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

El jugador A trata así de determinar el valor de x_1 que maximice las recompensas mínimas esperadas, esto es,

$$\max_{x_1} \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 - a_{2j}\}$$

Ejemplo 14.4-3

Se tiene el siguiente juego de 2×4. La recompensa es para el jugador A.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	−1
A_2	4	3	2	6

El juego no tiene solución de estrategia pura, y en consecuencia en la solución se deben mezclar estrategias. Las recompensas esperadas por A, correspondientes a las estrategias puras de B, son

Estrategia pura de *B*	Recompensa esperada por *A*
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

La figura 14.9 muestra la gráfica de las cuatro rectas correspondientes a las estrategias puras de *B*, obtenidas con TORA (archivo ch14ToraGamesEx14-4-3.txt).[3] Para determinar lo *mejor de lo peor*, la envolvente de las cuatro líneas (delineada por bandas verticales) representa la recompensa esperada mínima (la peor) para *A*, independientemente de lo que haga *B*. El máximo (lo mejor) de la envolvente inferior corresponde al punto de solución maximin en $x_1^* = .5$. Este punto es la intersección de las rectas correspondientes a las estrategias B_3 y B_4. La solución óptima del jugador A pide mezclar A_1 y A_2 con las probabilidades 0.5 y 0.5, respectivamente. El valor v correspondiente del juego se determina sustituyendo $x_1 = 0.5$ en cualquiera de las funciones de las líneas B_3 y B_4, con lo que se obtiene

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, & \text{del renglón } B3 \\ -7(\frac{1}{2}) + 6 = \frac{5}{2}, & \text{del renglón } B4 \end{cases}$$

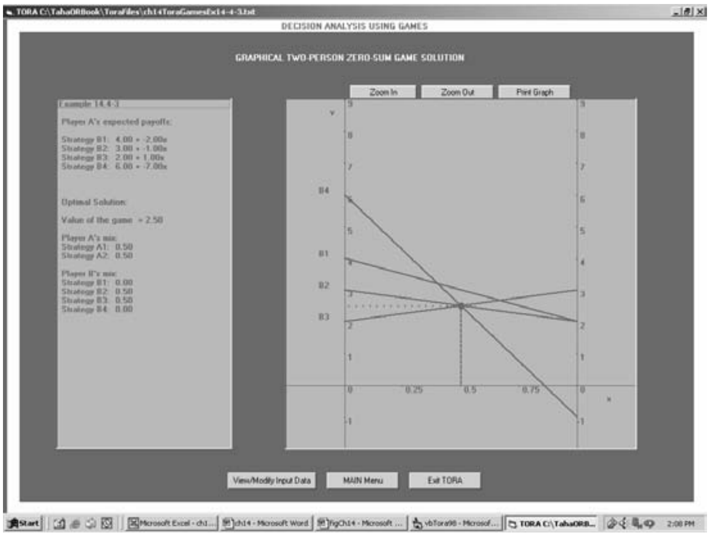


FIGURA 14.9

Solución gráfica del juego entre dos personas con suma cero, ejemplo 14.4-3, con TORA

---

[3]En `Menú principal` seleccione `Juegos de suma cero` y capture los datos del problema; a continuación seleccione `Gráfica` del menú `Resolver/modificar`.

La mezcla óptima para el jugador *B* está determinada por las dos estrategias que definen la envolvente inferior de la gráfica. Esto quiere decir que *B* puede mezclar las estrategias B_3 y B_4, en cuyo caso $y_1 = y_2 = 0$ y $y_4 = 1 - y_3$. El resultado es que las recompensas esperadas por *B*, correspondientes a las estrategias puras de *A* son

Estrategia pura de *A*	Recompensa esperada por *B*
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

La solución *mejor de las peores* para *B* es el punto mínimo en la envolvente *superior* de las dos rectas dadas (el lector verá que es instructivo graficar las dos rectas e identificar la envolvente superior). Este proceso equivale a resolver la ecuación

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

La solución es $y_3 = \frac{7}{8}$, que produce el valor del juego $v = 4 \times \left(\frac{7}{8}\right) - 1 = \frac{5}{2}$.

La solución del juego indica que el jugador *A* mezcle A_1 y A_2 con iguales probabilidades, y que el jugador *B* mezcle B_3 y B_4 con las probabilidades $\frac{7}{8}$ y $\frac{1}{8}$. En realidad, el juego tiene soluciones alternativas para *B*, porque el punto maximin de la figura 14.9 está determinado por más de dos líneas. Toda combinación no negativa de esas soluciones alternativas también es una solución legítima.

Para los juegos en los que el jugador *A* tiene *m* estrategias y el jugador *B* sólo tiene dos, la situación se puede manejar en forma parecida. La única diferencia es que se graficará la recompensa esperada por *B*, correspondiente a las estrategias puras de *A*. El resultado es que se estará buscando el punto minimax, y no el maximin, de la *envolvente superior* de las líneas graficadas. Sin embargo, para resolver el problema con TORA es necesario que la recompensa sea para el jugador con dos estrategias. Eso se puede lograr multiplicando por -1 la matriz de recompensa, si es necesario.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4B[4]

1. Resuelva gráficamente el juego de lanzar la moneda en el ejemplo 14.4-2.

2. Robin, quien viaja con frecuencia entre dos ciudades, tiene dos rutas alternativas: la ruta *A* es una autopista de cuatro carriles, y la ruta *B* es una carretera larga y tortuosa. La patrulla de caminos tiene personal limitado. Si todas las unidades se asignan a alguna de las rutas, Robin, con su pasión por la velocidad, seguramente recibirá una multa de $100 por exceso de velocidad. Si las unidades se dividen en 50-50 entre las dos rutas, hay una probabilidad de 50% de que la multen en la ruta *A* y sólo de 30% de que la multen en la ruta *B*. Formule una estrategia para Robin y para la policía.

3. Resuelva gráficamente los siguientes juegos. La recompensa es para el jugador *A*.

a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	−3	7
A_2	2	4	−6

[4]Se pide al lector que use el módulo Zero-sum Games (juegos de suma cero) de TORA para comprobar sus resultados.

b)

	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	6	5
A_3	5	7

4. Se tiene el siguiente juego entre dos personas con suma cero:

	B_1	B_2	B_3
A_1	5.0	50.0	50.0
A_2	1.0	1.0	0.1
A_3	10.0	1.0	10.0

a) Compruebe que las estrategias $(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6})$ para A y $(\frac{49}{54}, \frac{5}{54}, 0)$ para B son óptimas y determine el valor del juego.

b) Demuestre que el valor óptimo del juego es igual a

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j$$

Solución de juegos con programación lineal. La teoría de los juegos está muy relacionada con la programación lineal, en el sentido de que un juego entre dos personas con suma cero se puede expresar como programa lineal, y viceversa. De hecho, G. Dantzig (1963, pág. 24) dice que J. von Neumann, padre de la teoría de los juegos, al introducir por primera vez el método símplex en 1947, reconoció de inmediato esta relación, y además señaló y destacó el concepto de *dualidad* en la programación lineal. En esta sección se ilustra la solución de juegos mediante programación lineal.

Las probabilidades óptimas $x_1, x_2, \ldots,$ y x_m, del jugador A se pueden determinar resolviendo el siguiente problema maximin:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Ahora bien, sea

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$$

La ecuación implica que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

El problema del jugador A se puede escribir entonces como sigue:

$$\text{Maximizar } z = v$$

sujeta a

$$v - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$v \text{ sin restricción}$$

Observe que el valor del juego, v, no tiene restricción de signo.

Las estrategias óptimas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se determinan resolviendo el problema

$$\min_{y_j}\left\{\text{máx}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j\right)\right\}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Con un procedimiento parecido al del jugador A, el problema de B se reduce a

$$\text{Minimizar } w = v$$

sujeta a

$$v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$v \text{ sin restricción}$$

Los dos problemas optimizan la misma variable v (sin restricción), el valor del juego. La razón es que el problema de B es el dual del problema de A (se pide al lector, en el problema 6, conjunto de problemas 14.4c, que demuestre esta afirmación, con la definición de dualidad en el capítulo 4). Eso quiere decir que la solución óptima de un problema produce en forma automática la solución óptima del otro.

Ejemplo 14.4-4

Resolver el siguiente juego con programación lineal.

	B_1	B_2	B_3	Mín. de renglón
A_1	3	−1	−3	−3
A_2	−2	4	−1	**−2**
A_3	−5	−6	2	−6
Máx. de columna	3	4	**2**	

El valor v del juego está entre −2 y 2.

Programa lineal del jugador A

$$\text{Maximizar } z = v$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 0 \\
v + x_1 - 4x_2 + 6x_3 &\leq 0 \\
v + 3x_1 + x_2 - 2x_2 &\leq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, &\geq 0 \\
v \text{ sin restricción}
\end{aligned}$$

La solución óptima es $x_1 = 0.39,\ x_2 = 0.31,\ x_3 = 0.29$, y $v = -0.91$.

Programa lineal del jugador B

$$\text{Minimizar } z = v$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
v - 3y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 0 \\
v + 2y_1 - 4y_2 + y_3 &\geq 0 \\
v + 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 &\geq 0 \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\
v \text{ sin restricción}
\end{aligned}$$

La solución es $y_1 = 0.32,\ y_2 = 0.08,\ y_3 = 0.60$, y $v = -0.91$.

Para resolver cualquier juego entre dos personas con suma cero se puede usar `Juegos de suma cero` ⇒ `Resolver` ⇒ `con base en PL` de TORA. La figura 14.10 muestra el resultado para este problema (archivo ch14ToraGamesEx14-4-4). Incluye el valor del juego y las estrategias óptimas, al igual que una definición del programa lineal de A.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4C

1. En un *picnic*, se forman equipos de dos personas para jugar al escondite. Hay cuatro escondites (A, B, C y D) y los dos miembros del equipo que se esconde pueden hacerlo por separado en dos lugares cualesquiera de los cuatro. El otro equipo tendrá oportunidad de buscar en dos lugares cualesquiera. El equipo de búsqueda gana un punto si encuentra a los dos miembros del equipo que se esconde. Si fallan los dos, pierden un punto. En cualquier otro caso, el juego se empata.
   a) Formule el problema como un juego entre dos personas con suma cero.
   b) Determine la estrategia óptima y el valor del juego.
2. UA y DU están afinando sus estrategias para el campeonato nacional colegial de básquetbol. Al evaluar las capacidades de sus "bancas" respectivas, cada *coach* diseñó cuatro estrategias para rotación de sus jugadores durante el juego. La capacidad de cada equipo de anotar 2 puntos, 3 puntos y tiros libres es un factor clave para determinar el marcador final del juego. La tabla

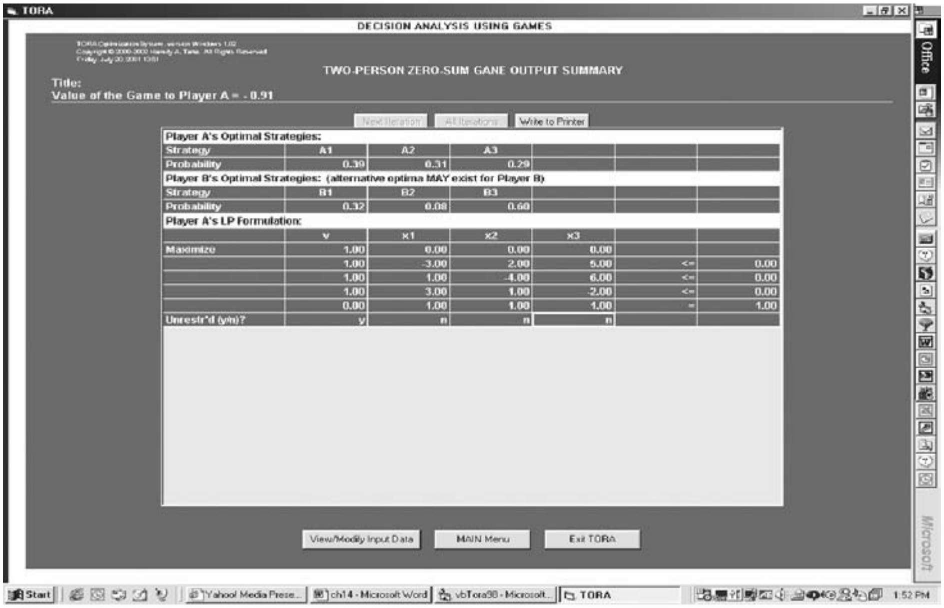


FIGURA 14.10

Resultados del juego entre dos personas con suma cero, ejemplo 14.4-4, obtenidos con TORA

siguiente es un resumen de los puntos netos que UA anotará por posesión, en función de las distintas estrategias que dispone cada equipo:

	DU_1	DU_2	DU_3	DU_4
UA_1	3	−2	1	2
UA_2	2	3	−3	0
UA_3	−1	2	−2	2
UA_4	−1	−2	4	1

a) Resuelva el problema con programación lineal y determine una estrategia para el juego de campeonato.

b) Con base en esta información, ¿cuál de los dos equipos probablemente gane el juego?

c) Suponga que en todo el juego habrá un total de 60 posesiones, 30 por cada equipo. Pronostique la cantidad esperada de puntos con que se ganará el campeonato.

3. El ejército del coronel Blotto está luchando por el control de dos lugares estratégicos. Blotto tiene dos regimientos, y el enemigo tiene tres. Un ejército capturará un lugar si tiene más regimientos. En cualquier otro caso, la batalla será un empate.

a) Formule el problema como juego entre dos personas con suma cero, y resuélvalo con programación lineal.

b) ¿Cuál ejército ganará la batalla?

4. En el juego Morra, entre dos personas y con dos dedos, cada jugador muestra uno o dos dedos, y en forma simultánea adivina la cantidad de dedos que mostrará el oponente. El jugador que adivine en forma correcta gana una cantidad igual al número de dedos que muestre. En caso contrario, el juego es un empate. Formule el problema como un juego entre dos personas con suma cero y resuélvalo con programación lineal.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Chen, S. y C. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making,* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Clemen, R. J. y T. Reilly, *Making Hard Decisions: An introduction to Decision Analysis*, 2a. ed., Duxbury, Pacific Grove, CA, 1996.

Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Meyerson, R., *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1991.

Saaty, T. L., *Fundamentals of Decision Making,* RWS Publications, Pittsburgh, PA, 1994.

PROBLEMAS INTEGRALES

14.1[5] Un jefe de taller está examinando tres alternativas para una fresadora disponible:

a) Adaptarle un avance motorizado (PF).

b) Comprar una fresadora nueva con función de diseño asistido por computadora (CAD).

c) Cambiar la fresadora por un centro de maquinado (MC).

Las tres alternativas se evalúan con base en dos criterios: monetario y de funcionamiento. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes:

Criterio	PF	CAD	MC
Monetario			
Costo inicial ($)	12,000	25,000	120,000
Costo de mantenimiento ($)	2000	4000	15,00
Costo de adiestramiento ($)	3000	8000	20,00
Funcionamiento			
Capacidad (unidades/día)	8	14	40
Tiempo de preparación (min)	30	20	3
Desechos (libras/día)	440	165	44

El jefe supone que el criterio monetario es 1 1/2 veces más importante que el criterio de funcionamiento. Además, la capacidad de producción es 2 veces más importante que el tiempo de preparación, y 3 veces más importante que los desechos. Se considera que el tiempo de preparación es 4 veces más importante que los desechos. En cuanto al criterio monetario, el jefe estima que los costos de mantenimiento y adiestramiento tienen igual importancia, y que el costo inicial es 2 veces más importante que cualquiera de estos dos últimos costos.

Analice la situación y haga la recomendación adecuada.

[5]Basado en S. Weber, "A modified Analytic Hierarchy Process for Automated Manufacturing Decisions", Interfaces, vol. 23, núm. 4, págs. 75-84, 1993.

14.2[6] Una empresa tiene ventas por catálogo que abarcan más de 200,000 artículos, almacenados en muchas bodegas regionales. Antes, la empresa consideraba esencial mantener registros exactos de las existencias reales en cada bodega. El resultado era que se ordenaba un conteo total de inventario cada año, actividad intensa e ingrata que se hace de mala gana en todas las bodegas. La empresa hacía después una auditoría que muestreaba más o menos 100 artículos por bodega, para comprobar la calidad de la operación logística en cada región. De acuerdo con la auditoría, sólo el 64% de los artículos en cada bodega coincidían con el inventario real, lo cual era inaceptable. Para remediar la situación, la empresa ordenaba conteos más frecuentes de los artículos más costosos y los de movimiento rápido. Se asignó a un analista de sistemas la tarea de establecer los procedimientos para determinar esos artículos.

En lugar de responder en forma directa a la solicitud de la empresa, de identificar cuáles serían los artículos, el analista de sistemas decidió identificar la causa del problema. Terminó cambiando el objetivo del estudio de "¿cómo podemos aumentar la frecuencia de conteos de inventario?" a "¿cómo podemos aumentar la exactitud de los conteos de inventario?". El estudio condujo al siguiente análisis: como la proporción de artículos bien contados en una bodega es p, es razonable suponer que un artículo que haya sido bien contado en la primera ocasión tiene 95% de probabilidades de que sea contado en forma correcta en un conteo siguiente. Para la proporción $1 - p$ que no fue contada en forma correcta en la primera ronda, la probabilidad de un segundo conteo correcto es 80%. Con esta información, el analista formó un árbol de decisión para hacer una gráfica de punto de equilibrio, donde se compara la exactitud del conteo en la primera y segunda rondas. El resultado final fue que las bodegas cuya exactitud era mayor que el umbral de equilibrio no debieron volver a contar el inventario. El sorprendente resultado de la solución propuesta fue un celoso esfuerzo de parte de cada bodega de tener el conteo correcto la primera vez, con una resonante mejora de la exactitud de conteo en todas las bodegas.

¿Cómo convenció el analista a la administración de la viabilidad del umbral propuesto para el reconteo?

14.3[7] En las aerolíneas, las horas de trabajo se determinan mediante convenios con los sindicatos. En especial, la longitud máxima de vuelo puede limitarse a 16 horas para los vuelos en Boeing 747, y a 14 horas en Boeing 707. Si se rebasan estos límites por demoras inesperadas, se debe reemplazar a la tripulación por otra fresca. Las aerolíneas mantienen tripulaciones de reserva para esas eventualidades. El costo anual promedio de una tripulación de reserva se estima en $30,000. Al revés, una demora de una noche debida a no disponibilidad de tripulación de reserva podría costar hasta $50,000. Un miembro de tripulación está de guardia 12 horas consecutivas por día, durante 4 días por semana, y podrá no ser llamado durante los 3 días restantes en la semana. La tripulación de un Boeing 747 puede formarse con dos tripulaciones de Boeing 707.

La tabla siguiente es un resumen de las probabilidades de llamadas a tripulaciones de reserva, con base en datos históricos durante 3 años.

[6]Basado en I. Millet, "A Novena to Saint Anthony, or How to Find Inventory by Not Looking", *Interfaces*, vol. 24, núm. 2, págs. 69-75, 1994.
[7]Basado en A. Gaballa, "Planning Callout Reserves for Aircraft Delays", *Interfaces*, vol. 9, núm. 2, parte 2, págs. 78-86, 1979.

		Probabilidad de llamada	
Categoría de vuelo	*Hrs. de vuelo*	*B-747*	*B-707*
1	14.0	0.014	0.072
2	13.0	0.0	0.019
3	12.5	0.0	0.006
4	12.0	0.016	0.006
5	11.5	0.003	0.003
6	11.0	0.002	0.003

Por ejemplo, según los datos, de viajes de 14 horas, la probabilidad de una llamada es 0.014 para un Boeing 747 y de 0.072 para un Boeing 707.

El siguiente es un programa normal para un día pico:

Hora del día	Avión	Categoría de vuelo
8:00	707	3
9:00	707	6
	707	2
10:00	707	3
11:00	707	2
	707	4
15:00	747	6
16:00	747	4
19:00	747	1

La política actual de tripulaciones de guardia usa dos tripulaciones (de siete miembros) entre las 5:00 y las 11:00, cuatro entre las 11:00 y las 17:00, y dos entre las 17:00 y las 23:00.

Evalúe la eficacia de la actual política de tripulaciones de guardia. En forma específica, el tamaño actual de la tripulación de reserva es ¿demasiado grande, demasiado pequeño o el correcto?

CAPÍTULO 15

Programación dinámica probabilística

La programación dinámica probabilística difiere de la determinística (Capítulo 10) en que los estados y los retornos o retribuciones en cada etapa son probabilísticos.[1] La programación dinámica probabilística se origina en especial en el tratamiento de modelos estocásticos de inventario y en los procesos markovianos de decisión. Estos dos temas se describen por separado en los capítulos 16 y 19. Este capítulo presentará algunos ejemplos generales, con objeto de hacer resaltar la naturaleza estocástica de la programación dinámica.

15.1 UN JUEGO ALEATORIO

En una variación del juego de la ruleta rusa, se hace girar una rueda con marcas de n números consecutivos: 1 a n, en su periferia. La probabilidad de que la rueda se detenga en el número i después de un giro es p_i. Un jugador paga \$$x$ por el privilegio de hacer girar la rueda un máximo de m giros. La recompensa para el jugador es el doble de la cantidad obtenida en el *último* giro. Suponiendo que el juego se repite (hasta con m giros cada vez) una cantidad razonablemente grande de veces, propone una estrategia óptima para el jugador.

Se puede formular el problema como un modelo de programación dinámica con las siguientes definiciones:

1. La *etapa* i se representa con el giro i, $i = 1, 2, \ldots, m$.
2. Las *alternativas* en cada etapa incluyen hacer girar la rueda una vez más o terminar el juego.
3. El *estado* j del sistema en la etapa i se representa con uno de los números de 1 a n que se haya obtenido en el *último* giro.

[1]Este capítulo es continuación del material en el capítulo 10, sobre programación dinámica determinística.

Sea

$f_i(j) =$ Ingreso máximo esperado cuando el juego está en la etapa (el giro) i y el resultado del *último* giro fue j

En este caso se tiene que

$$\begin{pmatrix}\text{Recompensa esperada en la etapa } i \\ \text{dado el resultado } j \text{ del último giro}\end{pmatrix} = \begin{cases} 2j, & \text{si termina el juego} \\ \sum_{k=1}^{n} p_k f_{i+1}(k), & \text{si continúa el juego}\end{cases}$$

Entonces, la ecuación recursiva se puede escribir como sigue:

$$f_{m+1}(j) = 2j$$

$$f_i(j) = \text{máx}\left\{\begin{array}{l}\text{Fin: } 2j, \\ \text{Giro: } \sum_{k=1}^{n} p_k f_{i+1}(k)\end{array}\right\} i = 2, 3, \ldots, m$$

$$f_1(0) = \sum_{k=1}^{n} p_k f_2(k)$$

La lógica de la ecuación recursiva es que en el primer giro ($i = 1$), el estado del sistema es $j = 0$, porque acaba de comenzar el juego. En consecuencia, $f_1(0) = p_1 f_2(1) + p_2 f_2(2) + \ldots + p_n f_2(n)$. Después del último giro ($i = m$), el juego debe terminar independientemente del resultado j del m-ésimo giro. Por tanto, $f_{m+1}(j) = 2j$.

Los cálculos recursivos comienzan con f_{m+1} y terminan con $f_1(0)$, produciendo $m + 1$ etapas de cómputo. Como $f_1(0)$ es el ingreso esperado por los m giros, y dado que el juego cuesta \$$x$, el ingreso neto es $f_1(0) - x$.

Ejemplo 15.1-1

Suponga que el perímetro de la rueda de la ruleta rusa está marcado con los números 1 a 5. La probabilidad de detenerse en el número i es $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.25$, $p_3 = 0.2$, $p_4 = 0.15$ y $p_5 = 0.1$. El jugador paga \$5 para hacer un máximo de cuatro giros. Determine la estrategia óptima para cada uno de los cuatro giros, y el ingreso neto esperado correspondiente.

Etapa 5.

$$f_5(j) = 2j$$

	Solución óptima	
Resultado j del giro 4	$f_5(j)$	*Decisión*
1	2	Terminar
2	4	Terminar
3	6	Terminar
4	8	Terminar
5	10	Terminar

Etapa 4.

$$\begin{aligned} f_4(j) &= \text{máx}\{2j,\ p_1f_5(1) + p_2f_5(2) + p_3f_5(3) + p_4f_5(4) + p_5f_5(5)\} \\ &= \text{máx}\{2j,\ 0.3 \times 2 + 0.25 \times 4 + 0.2 \times 6 + 0.15 \times 8 + 0.1 \times 10\} \\ &= \text{máx}\{2j,\ 5\} \end{aligned}$$

	Ingreso esperado		Solución óptima	
Resultado j del giro 3	*Terminar*	*Girar*	$F_4(j)$	*Decisión*
1	2	5	5	Girar
2	4	5	5	Girar
3	6	5	6	Terminar
4	8	5	8	Terminar
5	10	5	10	Terminar

Etapa 3.

$$\begin{aligned} f_3(j) &= \text{máx}\{2j,\ p_1f_4(1) + p_2f_4(2) + p_3f_4(3) + p_4f_4(4) + p_5f_4(5)\} \\ &= \text{máx}\{2j,\ 0.3 \times 5 + 0.25 \times 5 + 0.2 \times 6 + 0.15 \times 8 + 0.1 \times 10\} \\ &= \text{máx}\{2j,\ 6.15\} \end{aligned}$$

	Ingreso esperado		Solución óptima	
Resultado j del giro 2	*Terminar*	*Girar*	$f_3(j)$	*Decisión*
1	2	6.15	6.15	Girar
2	4	6.15	6.15	Girar
3	6	6.15	6.15	Girar
4	8	6.15	8.00	Terminar
5	10	6.15	10.00	Terminar

Etapa 2.

$$\begin{aligned} f_2(j) &= \text{máx}\{2j,\ p_1f_3(1) + p_2f_3(2) + p_3f_3(3) + p_4f_3(4) + p_5f_3(5)\} \\ &= \text{máx}\{2j,\ 0.3 \times 6.15 + 0.25 \times 6.15 + 0.2 \times 6.15 + 0.15 \times 8 + 0.1 \times 10\} \\ &= \text{máx}\{2j,\ 6.8125\} \end{aligned}$$

	Ingreso esperado		Solución óptima	
Resultado j del giro 1	*Terminar*	*Girar*	$f_3(j)$	*Decisión*
1	2	6.8125	6.8125	Girar
2	4	6.8125	6.8125	Girar
3	6	6.8125	6.8125	Girar
4	8	6.8125	8.0000	Terminar
5	10	6.8125	10.0000	Terminar

Etapa 1.

$$\begin{aligned} f_1(0) &= p_1 f_2(1) + p_2 f_2(2) + p_3 f_2(3) + p_4 f_2(4) + p_5 f_2(5) \\ &= 0.3 \times 6.8125 + 0.25 \times 6.8125 + 0.2 \times 6.8125 + 0.15 \times 8 + 0.1 \times 10 \\ &= 7.31 \end{aligned}$$

La única opción disponible al iniciar el juego es girar.

De acuerdo con los cuadros anteriores, la solución óptima es

Giro Núm.	Estrategia óptima
1	Comienza el juego, girar
2	Continuar si el giro 1 produce 1, 2 o 3. Si no, terminar el juego
3	Continuar si el giro 2 produce 1, 2 o 3. Si no, terminar el juego
4	Continuar si el giro 3 produce 1 o 2. Si no, terminar el juego
	Ingreso neto esperado = \$7.31 − \$5.00 = \$2.31

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.1A

1. En el ejemplo 15.1-1 suponga que la rueda está marcada con los números del 1 al 8, y que se detendrá en cualquiera de ellos con probabilidades iguales. Suponiendo que cada juego tiene un total de cinco giros, proponga una estrategia óptima para el juego.
2. Me gustaría vender mi automóvil usado a quien ofrezca más. Al estudiar el mercado, llegué a la conclusión de que es probable que reciba tres clases de ofertas, con probabilidades iguales: baja, en unos \$1050, intermedia en unos \$1900 y alta, en unos \$2500. Decidí anunciarlo durante 3 días consecutivos. Al final de cada día decidiré aceptar o no la mejor oferta que me hagan. ¿Cuál debe ser mi estrategia óptima para aceptar una oferta?

15.2 PROBLEMA DE INVERSIÓN

Una persona desea invertir hasta \$*C* miles en el mercado accionario durante los *n* años siguientes. El plan de inversión es comprar las acciones al comenzar el año, y venderlas al finalizar el mismo año. Entonces se puede usar el dinero acumulado para reinvertirlo (todo o en parte) al comienzo del año próximo. El grado de riesgo en la inversión se representa expresando el ingreso en forma probabilística. Un estudio de mercado indica que el retorno sobre la inversión está afectado por *m* condiciones (favorables o desfavorables) del mercado, y que la condición *i* produce un ingreso r_i, con probabilidad p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. ¿Cómo se debe invertir la cantidad *C* para obtener la máxima acumulación al final de *n* años?

Se definirán

x_i = Cantidad de fondos disponibles para invertir al iniciar el año *i* ($x_1 = C$)

y_i = Cantidad invertida realmente al comenzar el año *i* ($y_i \leq x_i$)

Los elementos del modelo de programa dinámico se pueden describir como sigue:

1. La *etapa i* está representada por el año *i*.
2. Las *alternativas* en la etapa *i* son y_i.
3. El *estado* en la etapa *i* es x_i.

Sea

$$f_i(x_i) = \text{Fondos esperados máximos para los años } i,\ i+1, \ldots,\ \text{y } n, \text{ dada } x_i \text{ al comenzar el año } i$$

Para la condición k del mercado,

$$x_{i+1} = (1 + r_k)y_i + (x_i - y_i) = x_i + r_k y_i,\ k = 1, 2, \ldots, m$$

Como la condición del mercado k se presenta con la probabilidad p_k, la ecuación recursiva de programación dinámica es la siguiente:

$$f_i(x_i) = \max_{0 \le y_i \le x_i} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k f_{i+1}(x_i + r_k y_i) \right\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

en donde $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}$ porque después del año n no se hace inversión. Por lo anterior,

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= \max_{0 \le y_n \le x_n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k (x_n + r_k y_n) \right\} \\ &= x_n + \max_{0 \le y_n \le x_n} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} p_k r_k \right) y_n \right\} \end{aligned}$$

Sea

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{m} p_k r_k$$

entonces se obtiene

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{r} \le 0 \\ x_n, & \text{si } \bar{r} > 0 \end{cases}$$

$$f_n(x_n) = \begin{cases} x_n, & \text{si } \bar{r} \le 0 \\ (1 + \bar{r})x_n, & \text{si } \bar{r} > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 15.2-1

En este modelo de inversión, hay que suponer que se desea invertir $10,000 durante los 4 años venideros. Hay 50% de probabilidades de que el dinero aumente al doble, 20% de probabilidades de salir a mano y 30% de probabilidades de perder la cantidad invertida. Proponer una estrategia óptima de inversión.

Al usar la notación del modelo se tiene que

$$C = \$10{,}000,\ n = 4,\ m = 3$$
$$p_1 = 0.4,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.4$$
$$r_1 = 1,\ r_2 = 0,\ r_3 = -1$$

Etapa 4.

$$\bar{r} = 0.5 \times 1 + 0.2 \times 0 + 0.3 \times -1 = 0.2$$

Entonces,

$$f_4(x_4) = 1.2x_4$$

La solución óptima se resume como sigue:

	Solución óptima	
Estado	$f_4(x_4)$	y_4^*
x_4	$1.2x_4$	x_4

Etapa 3.

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le y_3 \le x_3} \{p_1 f_4(x_3 + r_1 y_3) + p_2 f_4(x_3 + r_2 y_3) + p_3 f_4(x_3 + r_3 y_3)\}$$
$$= \max_{0 \le y_3 \le x_3} \{0.5 \times 1.2(x_3 + y_3) + 0.2 \times 1.2(x_3 + 0y_3) + 0.3 \times 1.2[x_3 + (-1)y_3]\}$$
$$= \max_{0 \le y_3 \le x_3} \{1.2x_3 + 0.24y_3\}$$
$$= 1.44x_3$$

Así se llega a

	Solución óptima	
Estado	$f_3(x_3)$	y_2^*
x_3	$1.44x_3$	x_3

Etapa 2.

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} \{p_1 f_3(x_2 + r_1 y_2) + p_2 f_3(x_2 + r_2 y_2) + p_3 f_3(x_2 + r_3 y_2)\}$$
$$= \max_{0 \le y_2 \le x_2} \{0.5 \times 1.44(x_2 + y_2) + 0.2 \times 1.44(x_2 + 0y_2) + 0.3 \times 1.44[x_2 + (-1)y_2]\}$$
$$= \max_{0 \le y_2 \le x_2} \{1.44x_2 + 0.288y_2\}$$
$$= 1.728x_2$$

Entonces se obtiene

	Solución óptima	
Estado	$f_2(x_2)$	y_2^*
x_2	$1.728x_2$	x_2

Etapa 1.

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le y_1 \le x_1} \{p_1 f_2(x_1 + r_1 y_1) + p_2 f_2(x_1 + r_2 y_1) + p_3 f_2(x_1 + r_3 y_1)\}$$
$$= \max_{0 \le y_1 \le x_1} \{0.5 \times 1.728(x_1 + y_1) + 0.2 \times 1.728(x_1 + 0y_1) + 0.3 \times 1.728[x_1 + (-1)y_1]\}$$

$$= \max_{0 \leq y_1 \leq x_1} \{1.728x_1 + 0.3456y_1\}$$

$$= 2.0736x_1$$

Y así se obtiene

	Solución óptima	
Estado	$f_1(x_1)$	y_1^*
x_1	$2.0736x_1$	x_1

Entonces, la política óptima de inversión se puede resumir como sigue: como $y_i^* = x_i$ para $i = 1$ a 4, la solución óptima es invertir todos los fondos disponibles al iniciar cada año. Los fondos acumulados al final de 4 años son $2.0736x_1 = 2.0736$ (\$10,000) = \$20,736.

En realidad, se puede demostrar por inducción que el problema tiene la siguiente solución general en la etapa i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$f_i(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{si } \bar{r} \leq 0 \\ (1 + \bar{r})^{n-i+1}, & \text{si } \bar{r} > 0 \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{r} \leq 0 \\ x & \text{si } \bar{r} > 0 \end{cases}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.2A

1. En el ejemplo 15.2-1, determine la estrategia óptima de inversión, suponiendo que las probabilidades p_k y el ingreso r_k varían durante los 4 años, de acuerdo con los datos siguientes:

Año	r_1	r_2	r_3	p_1	p_2	p_3
1	2	1	0.5	0.1	0.4	0.5
2	1	0	−1	0.4	0.4	0.2
3	4	−1	−1	0.2	0.4	0.4
4	0.8	0.4	0.2	0.6	0.2	0.2

2. Está disponible un compartimiento de 10 m^3 para guardar tres artículos. Los volúmenes necesarios para guardar una unidad de los artículos 1, 2 y 3 son 2, 1 y 3 m^3, respectivamente. La demanda probabilística de los artículos es la siguiente:

	Probabilidad de la demanda		
Núm. de unidades	*Art. 1*	*Art. 2*	*Art. 3*
1	0.5	0.3	0.3
2	0.5	0.4	0.2
3	0.0	0.2	0.5
4	0.0	0.1	0.0

Los costos de escasez por unidad de los artículos 1, 2 y 3 son \$8, \$10 y \$5, respectivamente. ¿Cuántas unidades de cada artículo se deben guardar en el compartimiento?

3. HiTec acaba de comenzar a producir supercomputadoras durante un periodo limitado a 4 años. La demanda anual D de la nueva computadora se describe con la siguiente distribución:

$$P(D = 1) = 0.5,\ P(D = 2) = 0.3,\ P(D = 3) = 0.2$$

La capacidad de producción de la fábrica es tres computadoras por año, a un costo de $5 millones cada una. La cantidad real de computadoras producidas por año podrá no ser exactamente igual a la demanda. Una computadora no vendida al final de un año incurre en costos de almacenamiento y mantenimiento de $1 millón. Si la entrega de una computadora se demora un año, se incurre en una pérdida de $2 millones. HiTec no acepta pedidos nuevos después del año 4, pero continuará su producción en el año 5 para satisfacer cualquier demanda no satisfecha al terminar el año 4. Determine el programa de producción anual óptimo para HiTec.

4. La empresa PackRat Outdoors Company posee tres clubes deportivos en el centro de Little Rock. En el día de Pascua, pasear en bicicleta es una actividad deportiva preferida. La empresa posee un total de ocho bicicletas para rentar, para asignar a los clubes, con el objeto de maximizar los ingresos. La demanda de bicicletas, y la tarifa de renta por hora varían de acuerdo con el lugar, y se describen con las siguientes distribuciones:

	Probabilidad de la demanda		
Núm. de bicicletas	*Centro 1*	*Centro 2*	*Centro 3*
0	0.1	0.02	0
1	0.2	0.03	0.15
2	0.3	0.10	0.25
3	0.2	0.25	0.30
4	0.1	0.30	0.15
5	0.1	0.15	0.10
6	0	0.05	0.025
7	0	0.05	0.025
8	0	0.05	0
Renta/hr ($)	6	7	5

¿Cómo debe asignar PackRat las ocho bicicletas a los tres clubes?

15.3 MAXIMIZACIÓN DEL EVENTO DE LOGRAR UNA META

En la sección 15.2 nos interesó maximizar el ingreso óptimo esperado. Otro criterio útil para el problema es maximizar la probabilidad de lograr cierta cantidad de ingreso. Se aprovechará el caso de la inversión, de la sección 15.2, para ilustrar la aplicación del nuevo criterio.

Como en la sección 15.2, las definiciones *etapa* i, *alternativa* y_i y *estado* x_i no varían. El nuevo criterio busca maximizar la probabilidad de obtener una cantidad de dinero S al final de n años. Se define

$f_i(x_i) =$ Probabilidad de obtener (realizar) la cantidad S, dado que x_i es la cantidad de fondos disponibles al iniciar el año i, y dado que se implementa una política óptima para los años $i, i + 1, ..., $ y n

Entonces, la ecuación recursiva de programación dinámica es

$$f_n(x_n) = \max_{0 \le y_n \le x_n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k P\{x_n + r_k y_n \ge S\} \right\}$$

$$f_i(x_i) = \max_{0 \le y_i \le x_i} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k f_{i+1}(x_i + r_k y_i) \right\}, \; i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

La fórmula recursiva se basa en la ley de probabilidad condicional:

$$P\{A\} = \sum_{j=1}^{m} P\{A|B_j\}P\{B_j\}$$

En este caso, $f_{i+1}(x_i + r_k y_i)$ desempeña el papel de $P\{A|B_j\}$.

Ejemplo 15.3-1

Una persona desea invertir $2000. Dispone de las opciones de duplicar la cantidad invertida, con una probabilidad de 0.3, o de perder todo con una probabilidad de 0.7. Las inversiones se venden al final del año, y las reinversiones, que pueden ser torales o parciales, comienzan al principiar el año siguiente. El proceso se repite durante tres años consecutivos. El objetivo es maximizar la probabilidad de obtener $4000 al final del tercer año. Para simplificar, suponer que todas las inversiones son en múltiplos de $1000.

Si se usa la notación del modelo, se dice que $r_1 = 1$ con probabilidad 0.3, y que $r_2 = -1$ con probabilidad 0.7.

Etapa 3. En la etapa 3, el estado x_3 puede ser tan pequeño como 0, y tan grande como $8000. El valor mínimo se realiza cuando se pierde toda la inversión, y el máximo se presenta cuando la inversión sube al doble al final de cada uno de los primeros 2 años. La ecuación recursiva para la etapa 3 se escribe, en consecuencia, como sigue:

$$f_3(x_3) = \max_{y_3 = 0,1,\ldots,x_3} \{0.3P(x_3 + y_3 \ge 4) + 0.7P(x_3 - y_3 \ge 4)\}$$

en donde $x_3 = 0, 1, \ldots, 8$.

La tabla 15.1 muestra los detalles de los cálculos para la etapa 3. Todos los elementos sombreados son no factibles, porque no satisfacen la condición $y_3 \le x_3$. También, al hacer los cálculos, se observa que

$$P(x_3 + y_3 \ge 4) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_3 + y_3 < 4 \\ 1, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$P(x_3 - y_3 \ge 4) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_3 - y_3 < 4 \\ 1, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Aunque la tabla 15.1 muestra que existen óptimos alternativos para $x_3 = 1, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8, la columna de óptimo (la última) sólo indica el óptimo mínimo y_3. En este caso la hipótesis es que el inversionista no va a invertir más que lo que sea absolutamente necesario para lograr el objetivo que persigue.

Etapa 2.

$$f_2(x_2) = \max_{y_2 = 0, 1, \ldots, x_2} \{0.3f_3(x_2 + y_2) + 0.7f_3(x_2 - y_2)\}$$

Los cálculos correspondientes se ven en la tabla 15.2.

TABLA 15.1

	$0.3P(x_3 + y_3 \geq 4) + 0.7P(x_3 - y_3 \geq 4)$									Óptimo	
x_3	$y_3 = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	f_3	y_3
0	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$									0	0
1	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$								0	0
2	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$							0.3	2
3	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$						0.3	1
4	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$					1	0
5	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$				1	0
6	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.31 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$			1	0
7	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$		1	0
8	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	1	0

TABLA 15.2

	$0.3f_3(x_2 + y_2) + 0.7f_3(x_2 - y_2)$					Óptimo	
x_2	$y_2 = 0$	1	2	3	4	f_2	y_2
0	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$					0	0
1	$0.3 \times 0 + 0.7 \times 0 = 0$	$0.3 \times 0.3 + 0.7 \times 0 = 0.9$				0.09	1
2	$0.3 \times 0.3 + 0.7 \times 0.3 = 0.3$	$0.3 \times 0.3 + 0.7 \times 0 = 0.09$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$			0.30	0
3	$0.3 \times 0.3 + 0.7 \times 0.3 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0.3 = 0.51$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$		0.51	1
4	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 1 = 1$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0.3 = 0.51$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0.3 = 0.51$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3$	1	0

Etapa 1.

$$f_1(x_1) = \max_{y_1=0,1,2} \{0.3f_3(x_1 + y_1) + 0.7f_2(x_1 - y_1)\}$$

La tabla 15.3 muestra los cálculos correspondientes.

TABLA 15.3

	$0.3f_2(x_1 + y_1) + 0.7f_2(x_1 - y_1)$			Óptimo	
x_1	$y_1 = 0$	1	2	f_1	y_1
2	$0.3 \times 0.3 + 0.7 \times 0.3 = 0.3$	$0.3 \times 0.51 + 0.7 \times 0.09 = 0.216$	$0.3 \times 1 + 0.7 \times 0 = 0.3 = 0.3$	0.3	0

La estrategia óptima se determina como sigue: como la inversión inicial $x_1 = \$2000$, la etapa 1 (Tabla 15.3) da como resultado $y_1 = 0$, que quiere decir que en el año 1 no se debe invertir. La decisión de no invertir en el año 1 deja al inversionista con \$2000 al iniciar el año 2. De la etapa 2 (Tabla 15.2), $x_2 = 2$ produce $y_2 = 0$, indicando que de nuevo no se debe hacer inversión en el año 2. A continuación, usando $x_3 = 2$, la etapa 3 (Tabla 15.1) muestra que $y_3 = 2$, que equivale a invertir toda la cantidad en la etapa 3. La probabilidad máxima correspondiente a realizar la meta $S = 4$ es $f_1(2) = 0.3$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.3A

1. En el ejemplo 15.3-1, la etapa 1 indica los óptimos alternativos $y_1 = 2$ y $y_1 = 0$. Demuestre que $y_1 = 0$ (es decir, invertir todo en el año 1) seguirá conduciendo a la misma estrategia para los 3 años, es decir, que la probabilidad máxima correspondiente permanece igual a 0.3.

2. Resuelva el ejemplo 15.3-1 con los siguientes datos: el objetivo del inversionista es maximizar la probabilidad de obtener un mínimo de $3000 al final del año 3. La cantidad que dispone es $1000, y la probabilidad de que el dinero se duplique en cualquier año es 0.6.

3. Usted y su amigo apuestan lo siguiente en el Casino Tropicana. Usted apuesta cierta cantidad de dinero, y cada uno de ustedes lanza una moneda, en forma independiente. Por cada $1 que apueste, Tropicana pagará $3 (con lo que la ganancia neta es $2) si el resultado es *HH*. En cualquier otro caso, usted pierde la cantidad que apostó. Suponiendo que usted y su amigo tienen $1 en total, determine la estrategia del juego si el objetivo es maximizar la probabilidad de terminar con $4 después de tres juegos.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bertsekas, D., *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

Cooper, L. y M. Cooper, *Introduction to Dynamic Programming*, Pergamon Press, Nueva York, 1981.

Smith, D., *Dynamic Programming: A Practical Introduction*, Ellis Horwood, Londres, 1991.

PROBLEMA INTEGRAL

15.1 UPPS usa camiones para entregar pedidos a los clientes. La empresa desea establecer una política de cambio para su flotilla durante los próximos 5 años. El costo anual de operación de un camión nuevo se distribuye normalmente con un promedio de $300 y una desviación estándar de $50. Después, el promedio y la desviación estándar del costo de operación aumentan 10% al año. El precio actual de un camión nuevo es de $20,000, y se espera que aumente 12% por año. Debido al uso intenso de un camión, hay posibilidad de que en cualquier momento se descomponga, sin posibilidad de reparación. El valor de recuperación de un camión depende de si está descompuesto o está trabajando. Al iniciar el año 6, el camión se vende y su valor de recuperación también depende de su estado (descompuesto o trabajando). La tabla siguiente muestra los datos del caso, en función de la edad del camión:

Edad del camión (años)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad de descompostura	0.01	0.05	0.10	0.16	0.25	0.40	0.60

Si el camión está trabajando, su valor de recuperación después de 1 año de operación es 70% del precio de compra, y en adelante disminuye 15% por año. Si está descompuesto, esa recuperación disminuye en 50%. El valor de recuperación del camión al comenzar el año 6 es $200 si está trabajando, y $50 si está descompuesto. Formule la política óptima de reemplazo del camión.

CAPÍTULO 16

Modelos probabilísticos de inventario

El capítulo 11 da las bases del modelado de inventario bajo condiciones determinísticas.[1] Este capítulo trata los modelos estocásticos de inventario, en los que la demanda se describe mediante una distribución de probabilidades. Los modelos que se presentan se clasifican, en el sentido amplio, en situaciones de revisión continua y *periódica*. Los modelos de revisión periódica incluyen tanto casos de un solo periodo como de varios periodos. Las soluciones propuestas van desde el uso de una versión probabilística de la cantidad económica de pedido (CEP o EOQ, de *economic order quantity*) determinística hasta casos más complejos que se resuelven con programación dinámica. La naturaleza probabilística de la demanda conduce a modelos complejos que quizá no sean útiles en la práctica. Sin embargo, en las publicaciones se han reportado buenas implementaciones de inventario probabilístico.

16.1 MODELOS DE REVISIÓN CONTINUA

Esta sección presenta dos modelos: 1) una versión "probabilizada" de la cantidad económica de pedido (CEP, sección 11.2.1) que usa una existencia de reserva para tener en cuenta la demanda probabilista, y 2) un modelo probabilístico de CEP que incluye a la demanda probabilística directamente en la formulación.

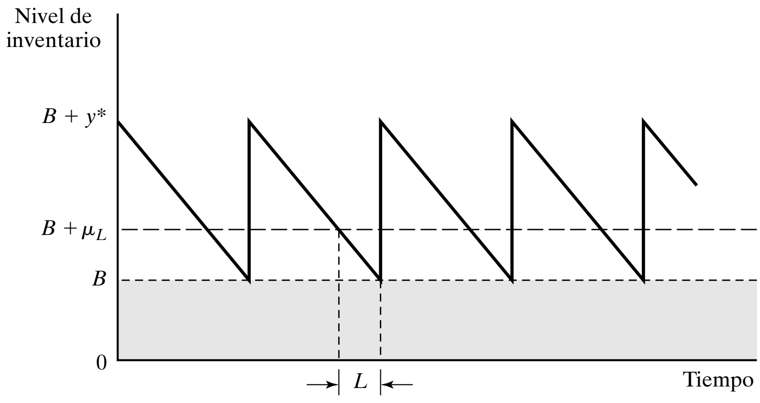
16.1.1 Modelo "probabilizado" de cantidad económica de pedido

Algunos profesionistas han tratado de adaptar el modelo determinístico de cantidad económica de pedido (Sección 11.2.1) para que refleje la naturaleza probabilista de la demanda, usando una aproximación que sobrepone una existencia constante de reserva sobre el nivel del inven-

[1]Este capítulo es una continuación del material del capítulo 11, acerca de los modelos deterministas de inventario.

FIGURA 16.1

Reserva de inventario impuesto al modelo clásico de CEP



tario en todo el horizonte de planeación. El tamaño de la reserva se determina de tal modo que la probabilidad de que se agote la existencia *durante el tiempo de entrega* (el periodo entre la colocación y la recepción de un pedido) no sea mayor que un valor especificado.

Sean

L = Tiempo de entrega entre la colocación y la recepción de un pedido

x_L = Variable aleatoria que representa la demanda durante el tiempo de entrega

μ_L = Demanda promedio durante el tiempo de entrega

σ_L = Desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega

B = Tamaño de la existencia de reserva

α = Probabilidad máxima admisible de que se agote la existencia durante el tiempo de entrega

La hipótesis principal del modelo es que x_L, la demanda durante el tiempo de entrega L, tiene distribución normal, con promedio μ_L y desviación estándar σ_L, esto es, $N(\mu_L, \sigma_L)$.

La figura 16.1 muestra la relación entre la reserva de existencia B y los parámetros del modelo determinista de CEP, que incluyen el tiempo de entrega L, la demanda promedio durante el tiempo de entrega μ_L y la CEP, cantidad económica de pedido y^*. Observe que L debe ser igual al tiempo de entrega *efectivo*, como se definió en la sección 11.2.1.

La formulación de la probabilidad que se usa para determinar B se puede escribir como sigue:

$$P\{x_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha$$

Se puede convertir x_L en una variable aleatoria normal estándar $N(0, 1)$ con la siguiente sustitución (véase la sección 12.4.4):

$$z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$$

Entonces,

$$P\left\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha$$

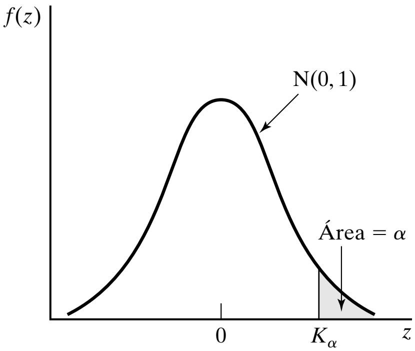


FIGURA 16.2
Probabilidad de que se agote la existencia, $P\{z \geq K_\alpha\} = \alpha$

La figura 16.2 define a K_α, que se determina con las tablas normal estándar (véase el apéndice C), de tal modo que

$$P\{z \geq K_\alpha\} = \alpha$$

En consecuencia, el tamaño de la reserva debe satisfacer

$$B \geq \sigma_L K_\alpha$$

La demanda durante el tiempo de entrega L se suele describir con una función de densidad de probabilidades *por unidad de tiempo* (es decir, por día o por semana), a partir de la que se pueda determinar la distribución de la demanda durante L. Dado que la demanda por unidad de tiempo es normal, con media D y desviación estándar σ, la media μ_L y la desviación estándar σ_L de la demanda, durante el tiempo de entrega L, se calculan como sigue:

$$\mu_L = DL$$
$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L}$$

En la fórmula de σ_L se requiere que L sea un valor (redondeado a) entero.

Ejemplo 16.1-1

En el ejemplo 11.2-1, acerca de determinar la política de inventario de luces de neón, se determinó que la cantidad económica de pedido era CEP = 100 unidades. Si la demanda *diaria* es normal, con promedio $D = 100$ luces y la desviación estándar $\sigma = 10$ luces, esto es, $N(100, 10)$, determine el tamaño de la reserva tal que la probabilidad de que se agote la existencia sea menor que $\alpha = 0.05$.

De acuerdo con el ejemplo 11.2-1, el tiempo efectivo de retraso es $L = 2$ días. Entonces,

$$\mu_L = DL = 100 \times 2 = 200 \text{ unidades}$$
$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 \times 2} = 14.14 \text{ unidades}$$

De acuerdo con las tablas de distribución normal (apéndice C), $K_{0.05} = 1.645$. En consecuencia, se calcula el tamaño de la reserva como sigue:

$$B \geq 14.14 \times 1.645 \approx 23 \text{ luces de neón}$$

Como la CEP $y^* = 1000$ luces, la política óptima de inventario con una reserva B establece comprar 1000 unidades siempre que el nivel de inventario baje a 223 ($= B + \mu_L = 23 + 2 \times 100$) unidades.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.1A

1. En el ejemplo 16.1-1, determine la política óptima de inventario en los siguientes casos:
   a) Tiempo de entrega = 15 días
   b) Tiempo de entrega = 23 días
   c) Tiempo de entrega = 8 días
   d) Tiempo de entrega = 10 días
2. Una tienda de música ofrece un CD de gran demanda. La demanda diaria del disco tiene una distribución aproximadamente normal, con una media de 200 discos y desviación estándar de 20 discos. El costo de tener los discos en la tienda es de $0.04 por cada uno y por día. A la tienda le cuesta $100 hacer un nuevo pedido. El proveedor suele especificar un tiempo de entrega de 7 días. Suponiendo que la tienda quiera limitar la probabilidad de que se le acaben los discos durante el tiempo de entrega a no más de 0.02, determine la política óptima de inventarios en la tienda.
3. La demanda diaria de películas fotográficas en una tienda de regalos, en un sitio turístico, tiene distribución normal con 30 rollos de película promedio y 5 rollos de desviación estándar. El costo de mantener un rollo de película en la tienda es de $0.02 por día. La tienda incurre en un costo fijo de $30 cada vez que hace un pedido de rollos de película. La política de inventarios de la tienda establece pedir 150 rollos cuando el nivel de inventario baja a 80 unidades, y simultáneamente mantener en todo momento una reserva constante de 20 rollos.
   a) Para esta política de inventario, determine la probabilidad de que se acaben los rollos durante el tiempo de entrega.
   b) Con estos datos, recomiende a la tienda una política de inventario, suponiendo que la probabilidad de quedarse sin rollos durante el tiempo de entrega no es mayor que 0.10.

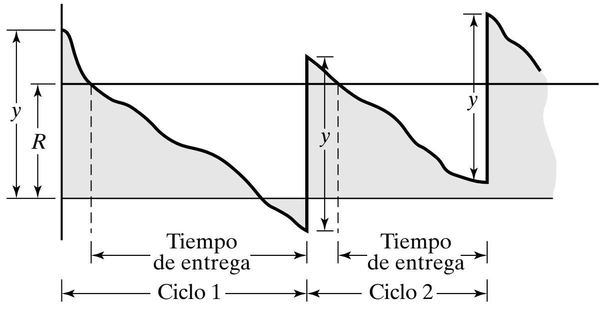
16.1.2 Modelo probabilístico de cantidad económica de pedido

No hay razón para creer que el modelo "probabilizado" de cantidad económica de pedido en la sección 16.1.1 produzca una política óptima de inventario. El hecho de que la información acerca de la naturaleza probabilística de la demanda no se tiene en cuenta al principio, sólo para "revivirla" en una forma totalmente independiente en una etapa posterior de los cálculos, basta para refutar la optimalidad. Para remediar la situación se presentará un modelo más exacto, en el que se incluye la naturaleza probabilística de la demanda en forma directa, para formular el modelo.

A diferencia del caso de la sección 16.1.1, el nuevo modelo permite faltante durante la demanda, como se ve en la figura 16.3. La política establece pedir la cantidad y siempre que

FIGURA 16.3

Modelo probabilístico de inventario con faltante



el inventario baja al nivel R. Como en el caso determinístico, el nivel para pedir R (nivel de "reorden") es una función del tiempo de entrega entre la colocación y la recepción de un pedido. Los valores óptimos de y y R se determinan minimizando el costo esperado por unidad de tiempo, que incluye la suma de los costos de preparación, posesión (almacenamiento) y de faltante.

El modelo tiene tres hipótesis.

1. La demanda no satisfecha durante el tiempo de entrega se acumula.
2. No se permite más de un pedido vigente.
3. La distribución de la demanda durante el tiempo de entrega permanece estacionaria (no cambia) con el tiempo.

Para deducir la función de costo total por unidad de tiempo, sean

$f(x)$ = Función de distribución de probabilidades de la demanda x durante el tiempo de entrega
D = Demanda esperada por unidad de tiempo
h = Costo de almacenamiento por unidad de inventario y por unidad de tiempo
p = Costo de faltante por unidad de inventario
K = Costo de preparación por pedido

Con base en estas definiciones, se determinarán ahora los elementos de la función de costo.

1. *Costo de preparación.* La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es $\frac{D}{y}$, por lo que el costo aproximado de preparación por unidad de tiempo es $\frac{KD}{y}$.

2. *Costo esperado de almacenamiento*. El inventario promedio es

$$I = \frac{(y + E\{R - x\}) + E\{R - x\}}{2} = \frac{y}{2} + R - E\{x\}$$

La fórmula se basa en el promedio de los inventarios esperados inicial y final de un ciclo, $y + E\{R - x\}$ y $E\{R - x\}$, respectivamente. Como aproximación, en la ecuación no se tiene en cuenta el caso en el que $R - E\{x\}$ pueda ser negativo. El costo esperado por mantener en inventario por unidad de tiempo es entonces igual a hI.

3. *Costo esperado por faltante*. Hay faltante cuando $x > R$. Así, la cantidad esperada de faltante por ciclo es

$$S = \int_R^\infty (x - R)f(x)dx$$

Como se supone que p sólo es proporcional a la cantidad de faltante, el costo esperado de faltante por ciclo es pS, y para $\frac{D}{y}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo de faltante por unidad de tiempo es $\frac{pDS}{y}$.

La función de costo total por unidad de tiempo que resulta es

$$\text{TCU}(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - E\{x\}\right) + \frac{pD}{y}\int_R^\infty (x - R)f(x)dx$$

Las soluciones para y^* y R^* óptimas se determinan con las ecuaciones

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y}\right)\int_R^\infty f(x)dx = 0$$

Así se llega a

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}} \qquad (1)$$

$$\int_{R^*}^\infty f(x)dx = \frac{hy^*}{pD} \qquad (2)$$

En vista de que y^* y R^* no se pueden determinar en formas cerradas a partir de las ecuaciones (1) y (2), se usa un algoritmo numérico, desarrollado por Hadley y Whitin (1963, págs. 169-175) para determinar las soluciones. El algoritmo converge en una cantidad finita de iteraciones, siempre y cuando exista una solución factible.

Para $R = 0$, las dos últimas ecuaciones dan como resultado, respectivamente

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pE\{x\})}{h}}$$

$$\tilde{y} = \frac{pD}{h}$$

Si $\tilde{y} \geq \hat{y}$, existen valores óptimos únicos de y y R. En el método de solución se reconoce que el valor mínimo de y^* es $\sqrt{\frac{2KD}{h}}$, que se alcanza cuando $S = 0$.

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

Paso 0. Usar la solución inicial $y_1 = y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, y hacer $R_0 = 0$. Igualar $i = 1$ y seguir en el paso i.

Paso *i*. Usar y_i para determinar R_i con la ecuación (2). Si $R_i \approx R_{i-1}$, detenerse; la solución óptima es $y^* = y_i$ y $R^* = R_i$. En caso contrario, usar R_i en la ecuación (1) para calcular y_i. Igualar $i = i + 1$ y repetir el paso i.

Ejemplo 16.1-2

Electro usa 1000 galones de resina por mes en el proceso de manufactura. Le cuesta \$100 hacer un pedido para un lote nuevo. El costo de almacenamiento por galón y por mes es de \$2, y el costo de faltante por galón es de \$10. Los datos históricos indican que la demanda, durante el tiempo de entrega, es uniforme dentro del intervalo (0, 100) galones. Determine la política óptima de pedidos para Electro.

Se usan los símbolos del modelo y entonces

$D = 1000$ galones por mes

$K = \$100$ por pedido

$h = \$2$ por galón y por mes
$p = \$10$ por galón
$f(x) = \frac{1}{100},\ 0 \leq x \leq 100$
$E\{x\} = 50$ galones

Primero se necesita comprobar que el problema tenga una solución factible. Se aplican las ecuaciones de $\hat{y}$ y $\tilde{y}$ para obtener

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10 \times 50)}{2}} = 774.6 \text{ galones}$$

$$\tilde{y} = \frac{10 \times 1000}{2} = 5000 \text{ galones}$$

Como $\tilde{y} \geq \hat{y}$, existen soluciones únicas para y^* y R^*.

La ecuación de S se calcula como sigue:

$$S = \int_R^{100} (x - R)\frac{1}{100}dx = \frac{R^2}{200} - R + 50$$

Se usa S en las ecuaciones (1) y (2), para obtener

$$y_i = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10S)}{2}} = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000S} \text{ galones} \tag{3}$$

$$\int_R^{100} \frac{1}{100}dx = \frac{2y_i}{10 \times 1000}$$

La última ecuación da como resultado

$$R_i = 100 - \frac{y_i}{50} \tag{4}$$

Ahora se determinará la solución con las ecuaciones (3) y (4).

Iteración 1

$$y_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 100}{2}} = 316.23 \text{ galones}$$

$$R_1 = 100 - \frac{316.23}{50} = 93.68 \text{ galones}$$

Iteración 2

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = 0.19971 \text{ galones}$$

$$y_2 = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000 \times 0.19971} = 319.37 \text{ galones}$$

En consecuencia,

$$R_2 = 100 - \frac{319.39}{50} = 93.612$$

ch16ContinuousReviewModel

	B	C	D	E
1	**Continuous Review Model**			
2	**Input data:**			
3	Demand rate, D =	1000		
4	Setup cost, K =	100		
5	Unit holding cost, h=	2		
6	Unit penalty cost, p=	10		
7	Uniform limits(a, b)=	0	100	
8	Tolerance =	0.000001		
9	**Optimum solution:**			
10	Order quantity, y* =	319.438282		
11	Reorder point, R* =	93.611234		
12	Total expected cost =	826.10		
13	**Iteratvie calculations:**			
14	Iteration i	yi	Ri	Si
15	0	316.227766	0.000000	0.000000
16	1	316.227766	93.675445	0.200000
17	2	319.374388	93.612512	0.204000
18	3	319.437005	93.611260	0.204080
19	4	319.438257	93.611235	0.204082
20	5	319.438282	93.611234	0.204082

FIGURA 16.4

Solución del ejemplo 16.1-2 mediante Excel

Iteración 3

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = 0.20399 \text{ galón}$$

$$y_3 = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000 \times 0.20399} = 319.44 \text{ galones}$$

Entonces,

$$R_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611 \text{ galones}$$

En la figura 16.4 se ven los cálculos del modelo en Excel (archivo ch16ContinuousReviewModel.xls). Se usó la estrechísima tolerancia de 0.000001 sólo para demostrar la convergencia del algoritmo. En la práctica podría no estar garantizada esa tolerancia tan estrecha. La plantilla está diseñada para la distribución uniforme. Los cálculos indican que la solución óptima aproximada es

$$R^* \approx 93.61 \text{ galones}, \; y^* \approx 319.4 \text{ galones}$$

Eso quiere decir que la política óptima de inventario indica pedir aproximadamente 320 galones siempre que el nivel de existencias baje a 94 galones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.1B

1. Para los datos del ejemplo 16.6-2, determine lo siguiente:
   a) La cantidad aproximada de pedidos por mes.
   b) El costo mensual esperado de preparación.

c) El costo mensual esperado de almacenamiento.

d) El costo mensual esperado por faltante.

e) La probabilidad de que se agote la existencia durante el tiempo de entrega.

2. Resuelva el ejemplo 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de entrega es uniforme entre 0 y 50 galones.

3. En el ejemplo 16.1-2, suponga que la demanda durante el tiempo de entrega es uniforme entre 40 y 60 galones. Compare la solución con la que se obtuvo en el ejemplo 16.1-2, e interprete los resultados. (*Sugerencia:* en ambos problemas, $E\{x\}$ es igual, pero en este problema la varianza es menor.)

4. Determine la solución óptima para el ejemplo 16.1-2 suponiendo que la demanda durante el tiempo de entrega es normal, con un promedio de 100 galones y una desviación estándar de 2 galones; esto es, que $N(100, 2)$. Suponga que $D = 10{,}000$ galones por mes, $h = \$2$ por galón y por mes, $p = \$4$ por galón y $K = \$20$.

16.2 MODELOS DE UN PERIODO

Los modelos de inventario para un solo artículo se presentan al pedir éste sólo una vez, para satisfacer la demanda en el periodo. Por ejemplo, los artículos de moda se vuelven obsoletos al final de la estación. En esta sección se presentan dos modelos, que representan los casos sin preparación y con preparación.

Los símbolos que se usarán en el desarrollo de los modelos serán:

c = Costo de compra (o de producción) por unidad
K = Costo de preparación por pedido
h = Costo de almacenamiento por unidad conservada durante el periodo
p = Penalización por unidad faltante durante el periodo
D = Variable aleatoria que representa la demanda durante el periodo
$f(D)$ = Distribución de la función de probabilidad de la demanda durante el periodo
y = Cantidad pedida
x = Cantidad a la mano, antes de hacer un pedido

El modelo determina el valor óptimo de y que minimiza la suma de los costos esperados de compra (o producción), almacenamiento y faltante. Dada la y óptima ($= y^*$), la política de inventario establece pedir $y^* - x$ si $x < y$; en caso contrario no se coloca pedido.

16.2.1 Modelo sin preparación

Las hipótesis de este modelo son

1. La demanda se presenta en forma instantánea al comenzar el periodo inmediatamente después de que se recibe el pedido.

2. No se incurre en costo de preparación.

En la figura 16.5 se demuestra que se satisface la posición del inventario después de la demanda D. Si $D < y$, la cantidad $y - D$ se almacena durante el periodo. En caso contrario, se presentará un faltante $D - y$, si $D > y$.

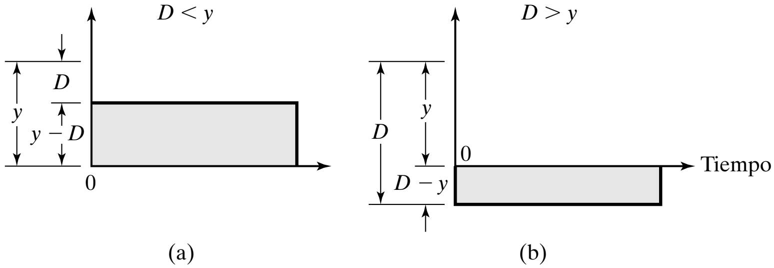


FIGURA 16.5
Almacenamiento y faltante de inventario en un modelo de un solo periodo

El costo esperado $E\{C(y)\}$, para el periodo es

$$E\{C(y)\} = c(y - x) + h\int_0^y (y - D)f(D)dD + p\int_y^\infty (D - y)f(D)dD$$

Se puede demostrar que la función $E\{C(y)\}$ tiene un mínimo único, porque es convexa en y. Se saca la primera derivada de $E\{C(y)\}$ con respecto a y y se iguala a cero como sigue:

$$c + h\int_0^y f(D)dD - p\int_y^\infty f(D)dD = 0$$

o bien

$$c + hP\{D \leq y\} - p(1 - P\{D \leq y\}) = 0$$

entonces,

$$P\{D \leq y^*\} = \frac{p - c}{p + h}$$

El valor de y^* sólo está definido si la *relación crítica*, $\frac{p-c}{p+h}$, es no negativa, es decir, si $p \geq c$. El caso en el que $p < c$ no tiene sentido, porque implica que el costo de compra del artículo es mayor que la penalización por no suministrarlo.

El desarrollo anterior supone que la demanda D es continua. Si D es discreta, entonces $f(D)$ sólo está definida en puntos discretos y la función de costo se define como sigue:

$$E\{C(y)\} = c(y - x) + h\sum_{D=0}^{y}(y - D)f(D) + p\sum_{D=y+1}^{\infty}(D - y)f(D)$$

Las condiciones necesarias de la optimalidad son

$$E\{C(y - 1)\} \geq E\{C(y)\} \text{ y } E\{C(y + 1)\} \geq E\{C(y)\}$$

Esas condiciones también son suficientes en este caso, porque $E\{C(y)\}$ es una función convexa. Después de algunas manipulaciones algebraicas, la aplicación de esas condiciones hace llegar a las siguientes desigualdades para determinar y^*:

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p - c}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

Ejemplo 16.2-1

El propietario de una tienda expendedora de periódicos desea determinar la cantidad de diarios *USA Now* que deben entregarle diariamente temprano por la mañana. A él le cuesta 30 ¢

el ejemplar, y lo vende en 75 ¢. La venta de periódicos suele ser entre las 7:00 y las 8:00 A.M. Los periódicos que no se vendieron al finalizar el día se reciclan a un costo de 5 ¢ el ejemplar. ¿Cuántos ejemplares le deben entregar cada mañana, suponiendo que la demanda diaria se puede aproximar con

a) Una distribución normal con promedio de 300 ejemplares y desviación estándar de 20 ejemplares?

b) Una función de distribución de probabilidades discretas, como sigue:

D	200	220	300	320	340
$f(D)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Los costos de almacenamiento y de penalización no se definen en forma directa en este caso. Sin embargo, los datos del problema indican que cada ejemplar no vendido le cuesta $30 - 5 = 25$ ¢ al propietario, y que la penalización por terminársele los periódicos son $75 - 30 = 45$ ¢ por ejemplar. Así, en función de los parámetros del problema de inventario, se puede suponer que $c = 30$ ¢ por ejemplar, $h = 25$ ¢ por ejemplar por día, y $p = 45$ ¢ por ejemplar y por día.

Primero se determina la relación crítica como sigue:

$$\frac{p - c}{p + h} = \frac{45 - 30}{45 + 25} = 0.214$$

Caso a. La demanda D es $N(300, 20)$. Se define la variable normal estándar como sigue:

$$z = \frac{D - 300}{20}$$

De acuerdo con las tablas de distribución normal estándar (apéndice C),

$$P\{z \leq -0.79\} \approx 0.214$$

Entonces,

$$\frac{y^* - 300}{20} = -0.79$$

En consecuencia, la cantidad económica de pedido es $y^* = 284.2$ (aproximadamente 284) ejemplares.

Caso b. La demanda D se apega a una función de distribución de probabilidades discretas, $F(D)$. Primero se determina la función de distribución acumulada $P\{D \leq y\}$ como sigue:

y	200	220	300	320	340
$P\{D \leq y\}$	0.1	0.3	0.7	0.9	1.0

Para la relación crítica calculada de 0.214,

$$P(D \leq 200) \leq 0.214 \leq P(D \leq 220)$$

En consecuencia, $y^* = 220$ ejemplares.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.2A

1. Para el modelo de un solo periodo, demuestre que para la demanda discreta, la cantidad óptima de pedido se determina con

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p - c}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

2. La demanda de un artículo durante un solo periodo sucede en forma instantánea al iniciar el periodo. La función de distribución de probabilidades es uniforme, entre 10 y 15 unidades. Debido a la dificultad de estimar los parámetros de costo, la cantidad de pedido se determina de tal modo que las probabilidades de sobrante o de escasez no rebasen de 0.1. ¿Es posible satisfacer las dos condiciones en forma simultánea?

3. En un caso de inventario en un solo periodo, el costo unitario de compra de un producto es de \$10, y el costo de almacenamiento es de \$1 por unidad. Si la cantidad de pedido es de 4 unidades, determine el intervalo admisible de costos unitarios de penalización incurridos en las condiciones óptimas. Suponga que la demanda se presenta en forma instantánea al iniciar el periodo, y que la función de distribución de probabilidades de demanda es la de la siguiente tabla:

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(D)$	0.05	0.1	0.1	0.2	0.25	0.15	0.05	0.05	0.05

4. La librería de la U de A tiene un programa de ejemplares de notas de clase de los profesores participantes. El profesor Yataha imparte clases de primer año, donde se espera una inscripción entre 200 y 250 alumnos, distribuidas las inscripciones de manera uniforme. A la librería le cuesta \$10 producir cada ejemplar, que vende a los alumnos a \$25. Los alumnos compran los textos al iniciar el semestre. Luego se destruyen todos los ejemplares no vendidos del profesor Yataha. Mientras tanto, una vez que a la librería se le agotan los ejemplares, ya no se imprimen más, y los alumnos deben conseguir las notas de los maestros en otras fuentes. Si la librería desea maximizar sus ingresos, ¿cuántos ejemplares debe imprimir?

5. QuickStop vende café y donas diariamente a partir de las 6:00 A.M. La tienda compra las donas a 7 ¢ y las vende a 25 ¢ hasta las 8:00 A.M. Después de las 8:00 A.M., las donas se venden a 5 ¢ cada una. La cantidad de clientes que compran donas entre las 6:00 y las 8:00 está distribuida uniformemente entre 30 y 50. Cada cliente suele comprar 3 donas con café. Más o menos, ¿cuántas docenas de donas debe tener QuickStop al comenzar la mañana, para maximizar sus ingresos?

6. Colony Shop se está abasteciendo de abrigos para el invierno. Paga \$50 por cada uno y los vende al doble del precio. Al terminar el invierno, Colony ofrece los abrigos a \$55 cada uno. La demanda de abrigos durante la estación invernal es de más de 20, pero menos que, o igual a 30, todos ellos con las mismas probabilidades. Como la temporada de invierno es corta, el costo unitario de almacenamiento es despreciable. También, el gerente de Colony no cree que haya penalización debido a la carencia de abrigos. Determine la cantidad económica de pedido que maximice la utilidad de Colony Shop.

7. Para el modelo de un solo periodo, suponga que el artículo se consume uniformemente durante el periodo (en vez de en forma instantánea al inicio del periodo). Deduzca el modelo correspondiente de costo y determine la cantidad óptima de pedido.

8. Resuelva el ejemplo 16.2-1 suponiendo que la demanda es continua y uniforme durante el periodo, y que la función de distribución de probabilidades de la demanda es uniforme entre 1 y 100. (*Sugerencia:* necesita usar los resultados del problema 7.)

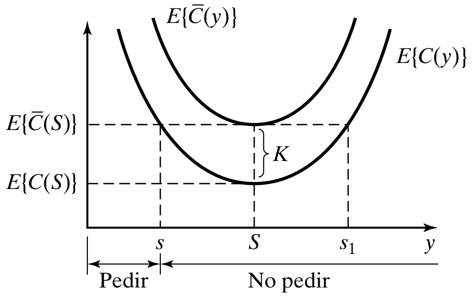


FIGURA 16.6
Política óptima de pedido (s-S) en un modelo de un solo periodo con costo de preparación

16.2.2 Modelo con preparación (política s-S)

Este modelo difiere del que se presentó en la sección 16.2.1 en que se incurre en un costo de preparación K. Si se usa la misma notación, el costo total esperado por periodo es

$$E\{\overline{C}(y)\} = K + E\{C(y)\}$$
$$= K + c(y - x) + h\int_0^y (y - D)f(D)dD + p\int_y^\infty (D - y)f(D)dD$$

Como se indicó en la sección 16.2.1, el valor óptimo y^* debe satisfacer

$$P\{y \leq y^*\} = \frac{p - c}{p + h}$$

Como K es constante, el valor mínimo de $E\{\overline{C}(y)\}$ debe presentarse también en y^*, como se ve en la figura 16.6. Los valores de s y S que se ven en la figura se definirán en breve.

En la figura 16.6, $S = y^*$ y el valor de $s(<S)$ se determina con la ecuación

$$E\{C(s)\} = E\{\overline{C}(S)\} = K + E\{C(S)\},\ s < S$$

(Esta ecuación produce otro valor $s_1 > S$, que se desecha.)

Si la cantidad a la mano antes de colocar un pedido es x unidades, ¿cuánto se debe pedir? Esta pregunta se investiga bajo tres condiciones:

1. $x < s$
2. $s \leq x \leq S$
3. $x > S$

Caso 1 ($x < s$). Como x ya está a la mano, su costo equivalente es $E\{C(x)\}$. Si se pide cualquier cantidad adicional $y - x$ $(y > x)$, el costo correspondiente si y es $E\{\overline{C}(y)\}$, que incluye el costo de preparación K. En la figura 16.6 se ve que

$$\text{mín}_{y>x}\, E\{\overline{C}(y)\} = E\{\overline{C}(S)\} < E\{C(x)\}$$

Entonces, la política óptima de inventario en este caso es pedir $S - x$ unidades.

Caso 2 ($s \leq x \leq S$). En la figura 16.6 se ve que

$$E\{C(x)\} \leq \text{mín}_{y>x} E\{\overline{C}(y)\} = E\{\overline{C}(S)\}$$

Entonces, *no* se aconseja pedir en este caso. Por consiguiente, $y^* = x$.

Caso 3 ($x > S$). Según la figura 16.6, para $y > x$,

$$E\{C(x)\} < E\{\overline{C}(y)\}$$

Esta condición indica que no se aconseja pedir en este caso; es decir, $y^* = x$.

La política óptima de inventario, a la que con frecuencia se le llama política *s-S*, se resume como sigue:

$$\text{Si } x < s, \text{ pedir } S - x$$
$$\text{Si } x \geq s, \text{ no pedir}$$

Está garantizada la optimalidad de la política *s-S*, porque la función correspondiente de costo es convexa.

Ejemplo 16.2-2

La demanda diaria de un artículo durante un solo periodo se presenta en forma instantánea al iniciar ese periodo. La función de distribución de probabilidades de la demanda es uniforme, entre 0 y 10 unidades. El costo unitario de almacenamiento del artículo durante el periodo es de \$0.50, y el costo unitario de penalización por carencia del mismo es de \$4.50. El costo unitario de compra es de \$0.50. Se incurre en un costo fijo de \$25 cada vez que se coloca un pedido. Determinar la política óptima de inventario para ese artículo.

Para determinar y^*, se calcula

$$\frac{p - c}{p + h} = \frac{4.5 - 0.5}{4.5 + 0.5} = 0.8$$

También,

$$P\{D \leq y^*\} = \int_0^{y^*} \frac{1}{10} dD = \frac{y^*}{10}$$

Por consiguiente, $S = y^* = 8$.

La función de costo esperado es

$$\begin{aligned} E\{C(y)\} &= .5(y - x) + .5\int_0^y \frac{1}{10}(y - D)dD + 4.5\int_y^{10} \frac{1}{10}(D - y)dD \\ &= 0.25y^2 - 4y + 22.5 - 0.5x \end{aligned}$$

El valor de s se calcula resolviendo

$$E\{C(s)\} = K + E\{C(S)\}$$

Esto da como resultado

$$0.25s^2 - 4s + 22.5 - 0.5x = 25 + 0.25S^2 - 4S + 22.5 - 0.5x$$

Como $S = 8$, la ecuación anterior se reduce a

$$s^2 - 16s - 36 = 0$$

La solución de esta ecuación es $s = -2$ o $s = 18$. Se descarta el valor de $s = 18$ ($> S$). Como el valor que resta es negativo ($= -2$), s no tiene valor factible. Entonces, la solución óptima establece no pedir (Figura 16.7). A esta conclusión se suele llegar cuando la función de costo es "plana" o cuando el costo de preparación es alto en relación con los demás costos del modelo.

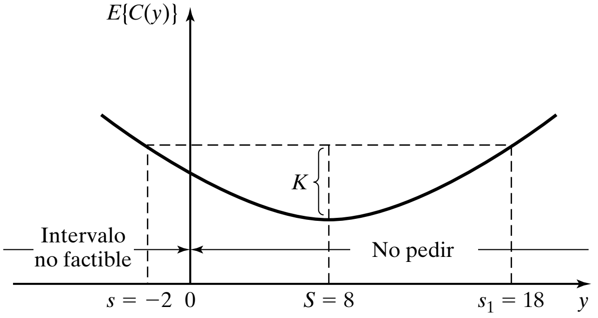


FIGURA 16.7
Política s-S aplicada al ejemplo 16.2-2

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.2B

1. Determine la política óptima de inventario para el caso del ejemplo 16.2-2, suponiendo que el costo de preparación es \$5.
2. En el modelo de un solo periodo, de la sección 16.2.1, suponga que el modelo maximiza la utilidad, y que se incurre en un costo de preparación K. Dado que r es el precio unitario de venta, y con la información de la sección 16.2.1, deduzca una ecuación para la utilidad esperada, y determine la cantidad óptima de pedido. Resuelva el problema numéricamente para $r = \$3$, $c = \$2$, $p = \$4$, $h = \$1$ y $K = \$10$. La función de distribución de probabilidades de demanda es uniforme entre 0 y 10.
3. Resuelva el problema 5, conjunto de problemas 16.2a, suponiendo que hay un costo fijo de \$10 asociado con la entrega de las donas.

16.3 MODELOS DE VARIOS PERIODOS

En esta sección se describe un modelo para varios periodos con la hipótesis de que no hay costo de preparación. Además, el modelo permite acumular la demanda y supone cero retraso en la entrega. También supone que la demanda D en cualquier periodo se describe con una función estacionaria de distribución de probabilidades, $f(D)$.

El modelo para varios periodos tiene en cuenta el valor descontado del dinero. Si α (< 1) es el factor de descuento por periodo, la cantidad \$$A$ disponible a n periodos contados desde hoy, tiene un valor presente de \$ $\alpha^n A$.

Se supone que la situación del inventario abarca n periodos, y que una demanda no satisfecha se puede acumular para exactamente un periodo. Se define lo siguiente:

$F_i(x_i)$ = Utilidad máxima esperada para los periodos i, $i + 1$, ..., y n, se x_i es la cantidad a la mano antes de colocar un pedido en el periodo i

Usando la notación de la sección 16.2, y suponiendo que r es el ingreso por unidad, la situación del inventario se puede formular con el siguiente modelo de programación dinámica (véase el capítulo 15):

$$F_i(x_i) = \max_{y_i \geq x_i}\left\{-c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i}[rD - h(y_i - D)]f(D)dD\right.$$
$$+\int_{y_i}^{\infty}[ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)]f(D)dD$$
$$\left.+\alpha\int_0^{\infty}F_{i+1}(y_i - D)f(D)dD\right\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

en el que $F_{n+1}(y_n - D) = 0$. El valor de x_i puede ser negativo, porque se puede acumular la demanda no satisfecha. Se incluye la cantidad $\alpha r(D - y_i)$ en la segunda integral, porque $(D - y_i)$ es la demanda no satisfecha en el periodo i que se debe satisfacer en el periodo $i + 1$.

El problema se puede resolver en forma recursiva. Para el caso en el que la cantidad de periodos es infinita, la ecuación recursiva se reduce a

$$F(x) = \max_{y \geq x}\left\{-c(y - x) + \int_0^{y}[rD - h(y - D)]f(D)dD\right.$$
$$+\int_{y}^{\infty}[ry + \alpha r(D - y) - p(D - y)]f(D)dD$$
$$\left.+\alpha\int_0^{\infty}F(y - D)f(D)dD\right\}$$

en donde x y y son los niveles de inventario para cada periodo, antes y después de recibir un pedido, respectivamente.

El valor óptimo de y se puede determinar a partir de la siguiente condición necesaria, que también resulta ser suficiente, porque la función de ingreso esperada $F(x)$ es cóncava.

$$\frac{\partial(.)}{\partial y} = -c - h\int_0^{y}f(D)dD + \int_y^{\infty}[(1 - \alpha)r + p]f(D)dD$$
$$+\alpha\int_0^{\infty}\frac{\partial F(y - D)}{\partial y}f(D)dD = 0$$

El valor de $\frac{\partial F(y - D)}{\partial y}$ se determina como sigue. Si hay β (> 0) unidades más a la mano al iniciar el siguiente periodo, la utilidad para el siguiente periodo aumentará en $c\beta$, porque hay que pedir esa cantidad de menos. Eso quiere decir que

$$\frac{\partial F(y - D)}{\partial y} = c$$

Así, la condición necesaria viene a ser

$$-c - h\int_0^{y}f(D)dD + [(1 - \alpha)r + p]\left(1 - \int_0^{y}f(D)dD\right) + \alpha c\int_0^{\infty}f(D)dD = 0$$

Entonces, el nivel óptimo de inventario y^* se determina con

$$\int_0^{y^*} f(D)dD = \frac{p + (1 + \alpha)(r - c)}{p + h + (1 - \alpha)r}$$

La política óptima de inventario para cada periodo, dado su nivel inicial de inventario x es, entonces

$$\text{Si } x < y^*, \text{ pedir } y^* - x$$
$$\text{Si } x \geq y^*, \text{ no pedir}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.3A

1. Se tiene un modelo de inventario probabilista para dos periodos, en donde la demanda se acumula y los pedidos se reciben con cero retraso en la entrega. La función de distribución de probabilidades de la demanda por periodo es uniforme entre 0 y 10, y los parámetros de costo son

Precio de venta por unidad = \$2
Precio de compra por unidad = \$1
Costo de almacenamiento por unidad y por mes = \$0.10
Costo de penalización por unidad y por mes = \$3
Factor de descuento = 0.8

Determine la política óptima de inventario para los dos periodos, suponiendo que el inventario inicial para el periodo 1 es cero.

2. La función de distribución de probabilidades de la demanda por periodo, en un modelo de inventario con horizonte infinito, es

$$f(D) = 0.08D, \ 0 \leq D \leq 5$$

Los parámetros de costo por unidad son:

Precio de venta por unidad = \$10
Precio de compra por unidad = \$8
Costo de almacenamiento por unidad y por mes = \$1
Costo de penalización por unidad y por mes = \$10
Factor de descuento = 0.9

Determine la política óptima de inventario, suponiendo retraso cero en la entrega y que la demanda no satisfecha se acumula.

3. Considere el caso de inventario con horizonte infinito, cero retraso en la entrega y demanda acumulable. Desarrolle la política óptima de inventario, con base en minimizar el costo, si

Costo de almacenamiento de z unidades = hz^2
Costo de penalización por z unidades = px^2

Demuestre que para el caso especial en el que $h = p$, la solución óptima es independiente de la función de distribución de probabilidades de la demanda.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Hadley, G. y T. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1963.

Silver, E., D. Pyke y R. Peterson, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3a. ed., Wiley, New York, 1998.

Tersine, R. *Principles of Inventory and Materials Management*, North Holland, New York, 1982.

PROBLEMAS INTEGRALES

16.1[2] Una empresa telefónica maneja *centros telefónicos* que proporcionan servicios residenciales a los clientes, en sus respectivos dominios. Hay más de 40 modelos de teléfono para escoger. En la actualidad cada centro telefónico mantiene una existencia de 15 a 75 días. La gerencia considera excesivas esas cantidades, porque se reabastecen diariamente mediante una bodega central. Al mismo tiempo, la gerencia desea asegurarse que se mantengan suficientes existencias en los centros telefónicos para proporcionar a los clientes un nivel de servicio del 95%. El equipo que estudia el problema comenzó recabando los datos pertinentes. El objetivo del equipo era establecer un nivel óptimo de existencias de cada modelo de teléfono. La tabla siguiente muestra la cantidad de equipos proporcionados en un día del modelo verde, de escritorio y de disco (Green 500)

Unidades proporcionadas	0	1	2	3	4
Frecuencia	189	89	20	4	1

Para cada modelo se formuló una tabla parecida.

Es difícil estimar los parámetros de costo deseados y necesarios para determinar el nivel óptimo de inventario para cada modelo de teléfono, y en consecuencia es imposible aplicar los modelos tradicionales de inventario. En este punto el equipo decidió usar un método más básico para determinar los niveles adecuados de existencia para los distintos modelos de teléfono. El desarrollo se basa en la observación que tanto los análisis de regresión y de tiempo no detectaron tendencias apreciables en la demanda.

Sugiera un método para determinar los niveles adecuados de existencia para los diversos modelos. Describa todas las hipótesis que hizo para llegar a una decisión.

16.2[3] El gerente de inventario de un pequeño almacén de ventas al menudeo, coloca pedidos de artículos para aprovechar las ofertas especiales o para combinar los pedidos recibidos de un proveedor. El resultado es que tanto la cantidad del pedido como la longitud del ciclo (intervalo entre pedidos sucesivos) se vuelven esencialmente aleatorios. Además, como la política de ese gerente está determinada principalmente por las consideraciones que no tienen que ver con el inventario, se puede considerar que la cantidad pedida y la longitud del ciclo son independientes, en el sentido que los ciclos más cortos no necesariamente equivalen a menores cantidades pedidas, y viceversa.

La tabla siguiente muestra datos característicos de tres artículos que se pidieron en forma simultánea. Esos datos muestran que tanto la cantidad pedida como la longitud del ciclo son aleatorias. Además, un examen superficial de los elementos de la tabla revela la falta de correlación entre la cantidad pedida y la longitud del ciclo.

---

[2]Basado en R. Cohen y F. Dunford, "Forecasting for Inventory Control: An Example of When 'Simple' Means 'Better'", *Interfaces*, vol. 16, núm. 6, págs. 95-99, 1986.

[3]Basado en A. Holt, "Multi-Item Inventory Control for Fluctuating Reorder Intervals", *Interfaces*, vol. 16, núm. 3, págs. 60 a 67, 1986.

	Cantidad pedida (unidades)		
Longitud del ciclo (meses)	*Artículo 1*	*Artículo 2*	*Artículo 3*
2.3	10	8	1
2.6	4	6	0
4	1	4	2
2.0	8	6	2
1.2	7	0	2
1.4	0	10	1
1.7	1	2	0
1.3	0	5	2
1.1	9	4	3
1.8	4	6	2
1.6	2	0	0
0.5	5	3	1
2.1	10	7	2
2.3	4	12	4
2.4	8	9	3
2.1	10	8	5
2.2	9	13	2
1.8	12	8	4
0.7	6	4	2
2.1	5	4	0

Un análisis de bondad de ajuste el conjunto completo de datos (véase el capítulo 12) indica que la distribución de las tasas de demanda (cantidad pedida dividida entre longitud de ciclo) para los tres artículos se apega a una distribución de Weibull, $f(r)$, de la forma

$$f(r) = \frac{2r}{\alpha} e^{-r^2/\alpha},\ r \geq 0$$

donde r es la tasa de demanda del artículo. De igual modo, en el análisis se demuestra que la distribución del *recíproco* $s(x)$ de la longitud del ciclo, es exponencial, de la forma

$$s(x) = \beta e^{-\beta(x-\alpha)},\ x \geq a$$

donde a es el valor mínimo asumido por x.

La determinación de la cantidad óptima de pedido se basa en maximizar la utilidad mensual esperada, que se define como sigue:

$$\begin{aligned}\text{Utilidad esperada} &= \int \left\{ \frac{1}{t} \int u(q,\ r,\ t) f(r) dr \right\} g(t) dt \\ &= \int \left\{ x \int u\left(q,\ r,\ \frac{1}{x} \right) f(r) dr \right\} s(x) dx\end{aligned}$$

en donde t y $g(t)$ son la longitud del ciclo y su función de densidad, respectivamente. La función de utilidad $u(q, r, t)$ se basa en p, la utilidad neta por unidad para el artículo; h, el costo de almacenamiento por unidad y por mes, y K, el costo fijo de pedido.

a) Use los datos de los tres artículos para determinar la función de densidad de probabilidades para cada tasa de demanda.

b) Use los datos de longitud de ciclo para determinar $s(x)$.

c) Deduzca la expresión matemática de $u(q, r, t)$.

Determine la cantidad óptima de pedido para los tres artículos, con los siguientes datos de costos: $p_1 = \$100$, $p_2 = \$150$, $p_3 = \$125$, $h_1 = \$2$, $h_2 = \$1.20$, $h_3 = \$1.65$ y $K = \$30$.

CAPÍTULO 17

Sistemas de colas

Parte de nuestra vida diaria es la de esperar algún servicio. Esperamos para entrar a un restaurante, "hacemos cola" en la caja de algún almacén y "nos formamos" para recibir un servicio en la oficina de correos. Y el fenómeno de la espera no es una experiencia que se limite sólo a los humanos: los trabajos esperan a ser procesados en una máquina, los aviones vuelan en círculo hasta que la torre de control les da permiso de aterrizar y los automóviles se detienen ante la luz roja de los semáforos. Desafortunadamente no se puede eliminar la espera sin incurrir en gastos desmesurados. De hecho, todo lo que cabe esperar es reducir el impacto desfavorable a niveles tolerables.

17.1 ¿POR QUÉ ESTUDIAR SISTEMAS DE COLAS?

El estudio de las líneas de espera trata de cuantificar el fenómeno de esperar formando colas, mediante medidas representativas de eficiencia, como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera en ella, y la utilización promedio de las instalaciones. El ejemplo que sigue demuestra cómo se usan esas medidas para diseñar una instalación de servicio.

Ejemplo 17.1-1

McBurger es un restaurante de comida rápida, con tres mostradores de servicio. El gerente ha encargado que se haga un estudio para investigar las quejas por lo lento del servicio. El estudio indica la siguiente relación entre la cantidad de mostradores de servicio y el tiempo de espera de los clientes:

Cantidad de cajeros	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo de espera promedio (min)	16.2	10.3	6.9	4.8	2.9	1.9	1.3

Al examinar esos datos se ve que hay un tiempo promedio de espera de 7 minutos para el caso actual de 3 mostradores. El gerente desea reducirlo a unos 3 minutos, resultado que sólo se puede alcanzar con cinco (o más) mostradores.

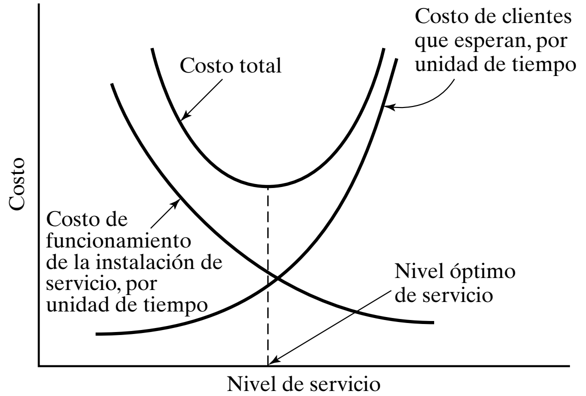


FIGURA 17.1
Modelo de decisión para línea de espera basado en costo

Se pueden analizar los resultados del análisis de colas en el contexto de un modelo de optimización de costos, en el que la suma de los costos de ofrecer el servicio y de esperar se reduzcan al mínimo. La figura 17.1 representa un modelo característico de costo (en $ por unidad de tiempo), en el que el costo del servicio aumenta al incrementar el nivel del servicio. Al mismo tiempo, el costo de esperar disminuye al incrementar el nivel del servicio. El obstáculo principal para implementar los modelos de costo es que se puede dificultar la obtención de un estimado fiable del costo unitario de espera, en especial cuando el comportamiento humano influye sobre el funcionamiento del caso. Este punto se describirá más en la sección 17.9.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.1A

1. Suponga que al analizar más el restaurante McBurger se obtienen los resultados adicionales siguientes:

Cantidad de cajeros	1	2	3	4	5	6	7
Inactividad (%)	0	8	12	18	29	36	42

a) ¿Cuál es la eficiencia de la operación, expresada como porcentaje del tiempo en el que los empleados están ocupados, cuando la cantidad de cajeros es de cinco?

b) El gerente desea mantener el tiempo promedio de espera en unos 3 minutos y, al mismo tiempo, mantener la eficiencia de la instalación aproximadamente en 90%. ¿Se pueden alcanzar estas metas? Explique por qué.

2. Acme Metal Jobshop va a comprar un taladro vertical de usos múltiples. Hay dos modelos disponibles, *A* y *B*, con costos de operación de $18 y $25 por hora, respectivamente. El modelo *A* es más lento que el modelo *B*. El análisis de colas de máquinas parecidas indica que cuando se usa *A*, la cantidad promedio de trabajos en espera es de 4, 30% mayor que el tamaño de la cola en *B*. Un trabajo demorado representa una utilidad perdida, que Acme estima ser de $10 por trabajo en espera y por hora. ¿Cuál modelo debe comprar Acme?

17.2 ELEMENTOS DE UN MODELO DE COLA

Los actores principales en una línea de espera o cola son el **cliente** y el **servidor**. Los clientes se generan en una **fuente**. Al llegar a la **instalación** pueden recibir servicio de inmediato, o esperar en una **cola** o línea de espera, si la instalación está ocupada. Cuando en una instalación se termina un servicio, en forma automática se "atrae" a un cliente que espera, si lo hay, de la cola. Si la cola está vacía, la instalación se vuelve inactiva hasta que llega un cliente nuevo.

Desde el punto de vista del análisis de las colas, el proceso de llegada se representa con el **tiempo entre llegadas**, de los clientes sucesivos, y el servicio se describe con el **tiempo de servicio** por cada cliente. Por lo general, los tiempos entre llegadas y de servicio pueden ser probabilísticos, como en el funcionamiento de una oficina de correos, o determinísticos, como en la llegada de solicitantes a las entrevistas de trabajo.

El **tamaño de la cola** desempeña un papel en el análisis de las colas, y puede ser finito, como en el área de reserva entre dos máquinas consecutivas, o puede ser infinito, como en las instalaciones de pedidos por correo.

La **disciplina de la cola**, que representa el orden en el que se seleccionan los clientes de una cola, es un factor importante en el análisis de los modelos de colas. La disciplina más común es la de primero en llegar, primero en servirse (PLPS; también FCFS, del inglés *first come, first served*). Entre otras disciplinas están último en llegar, primero en servirse (ULPS; también LCFS de *last come, first served*), y de dar servicio en orden aleatorio (SEOA; también SIRO, de *service in random order*). También, los clientes se pueden seleccionar en la cola con base en cierto orden de **prioridad**. Por ejemplo, los trabajos urgentes en un taller se procesan antes que los trabajos normales.

El comportamiento de los clientes en espera juega un papel en el análisis de las líneas de espera. Los clientes "humanos" se pueden **saltar** de una cola a otra, tratando de reducir la espera. También pueden **rehusar** totalmente a la cola por haber esperado demasiado.

El diseño de la instalación de servicio puede comprender servidores en paralelo (por ejemplo, el funcionamiento de la oficina de correos). También, los servidores pueden ordenarse en serie (por ejemplo, cuando los trabajos se procesan en máquinas sucesivas) o bien pueden formar una red (por ejemplo, los enrutadores en una red de computadoras).

La fuente donde se generan los clientes puede ser finita o infinita. Una **fuente finita** limita a los clientes que llegan al servicio (por ejemplo, las máquinas que piden el servicio de mantenimiento). También, una **fuente infinita** es abundante por siempre (por ejemplo, las llamadas que llegan a una central telefónica).

Las variaciones de los elementos de un caso de colas dan lugar a diversos modelos de colas. El resto de este capítulo describe ejemplos de esos modelos.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.2A

1. Identifique al cliente y al servidor en cada uno de los casos siguientes:
- **a)** Aviones que llegan a un aeropuerto.
- **b)** Base de taxis donde éstos esperan a que lleguen pasajeros.
- **c)** Verificación de las herramientas en un almacén de un taller de maquinado.
- **d)** Cartas procesadas en una oficina de correos.
- **e)** Inscripción a las clases en una universidad.

f) Juicios en la corte.

g) Funcionamiento de las cajas de un supermercado.

h) Funcionamiento de un estacionamiento.

2. Para cada uno de los casos del problema 1, identifique lo siguiente: a) naturaleza de la fuente (finita o infinita), b) naturaleza de los clientes que llegan (individualmente o en grupo), c) clase de tiempo entre llegadas (probabilísticas o determinísticas), d) definición y clase de tiempo de servicio, e) capacidad de la cola (finita o infinita) y f) disciplina de la cola.

3. Estudie el sistema siguiente e identifique las situaciones correspondientes de espera. Para cada situación, defina los clientes, el o los servidores, la disciplina de la cola, el tiempo de servicio, la longitud máxima de la cola y la fuente de los clientes.

Las órdenes de trabajo se reciben en un taller para su procesamiento. Al recibirlas, el supervisor decide si el trabajo es normal o urgente. Algunas órdenes requieren usar una o varias máquinas idénticas. Las demás órdenes se procesan en una línea de producción en dos etapas, y hay dos de ellas disponibles. En cada uno de los dos grupos, se asigna una instalación para manejar los trabajos urgentes.

Los trabajos que llegan a una instalación se procesan en el orden de llegada. Los trabajos terminados se embarcan al llegar, en una zona de embarque con capacidad limitada.

Las herramientas afiladas para las distintas máquinas son suministradas en un almacén central de herramientas. Cuando una máquina se descompone se manda a un reparador, de un grupo de servicio, para arreglarla. Las máquinas que trabajan en pedidos urgentes siempre reciben prioridad tanto en la adquisición de herramientas nuevas del almacén, como en recibir reparaciones.

4. ¿Cierto o falso?

a) Un cliente impaciente que espera puede optar por *desistir* (irse).

b) Si se prevé un largo tiempo de espera, un cliente que llega puede optar por rehusar.

c) El cambio de una línea de espera a otra se hace para reducir el tiempo de espera.

5. En cada uno de los casos del problema 1, comente sobre la posibilidad de que los clientes opten por cambiar de cola, rehusar o desistir.

17.3 PAPEL DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En la mayor parte de los casos de colas, la llegada de los clientes se hace en una forma totalmente aleatoria. Aleatoriedad quiere decir que la ocurrencia de un evento (por ejemplo, la llegada de un cliente o la terminación de un servicio) no está influido por el tiempo que haya transcurrido desde la ocurrencia del evento anterior.

Los tiempos aleatorios entre llegadas se describen en forma cuantitativa, en los modelos de colas, con la **distribución exponencial**, que se define como sigue:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$$

La sección 12.4.3 muestra que para la distribución exponencial

$$E\{t\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$P\{t \leq T\} = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda T}$$

El hecho de que la distribución exponencial sea **totalmente aleatoria** se ilustra con el ejemplo siguiente: si ahora son las 8:20 A.M. y la última llegada fue a las 8:02 A.M., la probabili-

dad de que la siguiente llegada sea a las 8:29 es una función sólo de las 8:20 a las 8:29, y es totalmente independiente del tiempo que haya transcurrido desde la ocurrencia del último evento (de las 8:02 a las 8:20). A este resultado se le llama **amnesia** o **falta de memoria** de la exponencial.

Dada la distribución exponencial $f(t)$ que representa el tiempo t entre eventos sucesivos, si S es el intervalo desde la ocurrencia del último evento, la propiedad de amnesia implica que

$$P\{t > T + S | t > S\} = P\{t > T\}$$

Para demostrar este resultado se observa que la exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$,

$$P\{t > Y\} = 1 - P\{t < Y\} = e^{-\lambda Y}$$

Así,

$$\begin{aligned} P\{t > T + S | t > S\} &= \frac{P\{t > T + S, t > S\}}{P\{t > S\}} = \frac{P\{t > T + S\}}{P\{t > S\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+S)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda T} \\ &= P\{t > T\} \end{aligned}$$

Ejemplo 17.3-1

Una máquina en servicio tiene una unidad de reserva para sustituirla de inmediato cuando falle. El "tiempo a la falla" (tiempo entre fallas) de la máquina (o de su unidad de reserva) es exponencial, y sucede cada 40 minutos, en promedio. El operador de la máquina dice que ésta "tiene la costumbre" de descomponerse cada noche a eso de las 8:30 P.M. Analizar lo que dice el operador.

La tasa promedio de fallas de la máquina es $\lambda = \frac{60}{40} = 1.5$ fallas por hora. Así, la distribución exponencial del tiempo a la falla es

$$f(t) = 1.5e^{-1.5t},\ t > 0$$

En cuanto a lo que dice el operador, ya se sabe que no puede ser correcto, porque se opone al hecho de que el tiempo entre fallas es exponencial y, en consecuencia, es totalmente aleatorio. La probabilidad de que una falla suceda a las 8:30 P.M. no se puede usar para respaldar ni refutar esa afirmación, porque el valor de esa probabilidad depende de la hora del día (en relación con las 8:30 P.M.) con la que se calcule. Por ejemplo, si ahora son las 8:20 P.M., la probabilidad de que lo que dice el operador sea cierto esta noche es

$$p\left\{t < \tfrac{10}{60}\right\} = 1 - e^{-1.5\left(\frac{10}{60}\right)} = 0.22$$

que es baja. Si en este momento son las 7:00 P.M., la probabilidad de que suceda una falla a las 8:30 P.M. aumenta hasta aproximadamente 0.9 (¡compruébelo!). Estos dos valores extremos indican que no se puede analizar la afirmación del operador con base en estimaciones de probabilidad, y que se debe confiar en las características de la distribución exponencial (aleatoriedad total) para refutar la afirmación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.3A

1. **a)** Explique lo que entiende de la relación entre la frecuencia de llegadas λ y el tiempo promedio entre llegadas. ¿Cuáles son las unidades que describen cada variable?
   b) En cada uno de los casos siguientes, determine la frecuencia promedio de llegadas por hora, λ, y el tiempo promedio entre llegadas, en horas.
   - i) Una llegada cada 10 minutos.
   - ii) Dos llegadas cada 6 minutos.
   - iii) La cantidad de llegadas en un periodo de 30 minutos es 10.
   - iv) El intervalo promedio entre las llegadas sucesivas es 0.5 hora.

   c) En cada uno de los casos siguientes, determine la frecuencia promedio de servicio por hora, μ y el tiempo promedio de servicio en horas.
   - i) Se termina un servicio cada 12 minutos.
   - ii) Hay dos salidas cada 15 minutos.
   - iii) La cantidad de clientes atendidos en un periodo de 30 minutos es de 5.
   - iv) El tiempo promedio de servicio es de 0.3 hora.
2. En el ejemplo 17.3-1, determine lo siguiente:
   a) La cantidad promedio de fallas en 1 semana, suponiendo que el servicio se ofrece 24 horas por día y 7 días por semana.
   b) La probabilidad de que haya al menos una falla en un periodo de 2 horas.
   c) La probabilidad de que la próxima falla *no* suceda en menos de 3 horas.
   d) Si no ha sucedido falla en 3 horas después de la última falla, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea de 4 horas cuando mucho?
3. El tiempo entre llegadas en una dependencia de la State Revenue Office es exponencial, con valor medio de 0.05 hora. La oficina abre a las 8:00 A.M.
   a) Escriba la distribución exponencial que describa el tiempo entre llegadas.
   b) Determine la probabilidad de que no lleguen clientes a la oficina hasta las 8:15 A.M.
   c) Son las 8:35 A.M. El último cliente entró a las 8:26. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 8:38 A.M.? ¿Y de que no llegue hasta las 8:40 A.M.?
   d) ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes que llegan entre las 8:10 y las 8:45 A.M.?
4. Suponga que el tiempo entre descomposturas de una máquina es exponencial, con promedio de 6 horas. Si la máquina ha trabajado sin fallar durante las últimas 3 horas, ¿cuál es la probabilidad de que continúa sin fallar durante la próxima hora? ¿De que se descomponga durante la siguiente 0.5 hora?
5. El tiempo entre llegadas a una sala de juego en la sociedad de alumnos es exponencial, con una media de 10 minutos.
   a) ¿Cuál es la frecuencia de llegadas por hora?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen alumnos a esa sala durante los 15 minutos siguientes?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un alumno visite la sala de juegos durante los próximos 20 minutos?
6. El gerente de un nuevo restaurante de comida rápida desea cuantificar el proceso de llegadas de clientes, estimando la fracción del intervalos de tiempo entre llegadas que sea a) menor que 2 minutos, b) entre 2 y 3 minutos y c) más de 3 minutos. Las llegadas en restaurantes parecidos tienen una frecuencia de 35 clientes por hora. El tiempo entre llegadas tiene distribución exponencial.

7. Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, juegan lo siguiente, mientras esperan la llegada de clientes: Jim le paga 2 ¢ a Ann si el próximo cliente no llega en menos de 1 minuto; en caso contrario, Ann le paga 2 ¢ a Jim. Calcule la recompensa promedio de Jim en un periodo de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial, con una media de 1.5 minutos.

8. Suponga que en el problema 7 las reglas de juego son que Jim le paga 2 ¢ a Ann si el cliente siguiente llega después de 1.5 minutos, y Ann le paga a Jim una cantidad igual si la siguiente llegada es en menos de 1 minuto. Para las llegadas en el intervalo de 1 a 1.5 minutos, el juego se empata. Determine la recompensa esperada por Jim en un periodo de 8 horas.

9. En el problema 7, suponga que Ann le paga 2 ¢ a Jim si la siguiente llegada es en menos de 1 minuto, y 3 ¢ si el tiempo entre llegadas es entre 1 y 1.5 minutos. Ann recibe 5 ¢ de Jim si el tiempo entre llegadas es entre 1.5 y 2 minutos, y 6 ¢ si es mayor que 2 minutos. Determine la recompensa esperada por Ann en un periodo de 8 horas.

10. Si un cliente llega a McBurger Fast-Food Restaurant en menos de 4 minutos después del cliente inmediato anterior, recibirá un descuento del 10%. Si el tiempo entre llegadas es entre 4 y 5 minutos, el descuento es del 6%. Si el tiempo entre llegadas es mayor que 5 minutos, el cliente tiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial, con un media de 6 minutos.

a) Determine la probabilidad de que un cliente que llega reciba el máximo descuento.

b) Determine el descuento promedio a cada cliente que llega.

11. Se sabe que el tiempo entre fallas de un refrigerador Kencore es exponencial, con una media de 9000 horas (más o menos 1 año de funcionamiento), y la empresa otorga una garantía de 1 año con el refrigerador. ¿Cuáles son las probabilidades de que la garantía cubra una reparación por descompostura?

12. La U de A administra dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja da servicio al campus norte, y la verde al sur, y hay una estación de trasbordo que enlaza a las dos líneas. Los autobuses verdes llegan al azar (tiempo exponencial entre llegadas) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los rojos también llegan al azar, cada 7 minutos en promedio.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de tiempo de espera para que un alumno que llega en la línea roja se suba a la línea verde?

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidades del tiempo de espera para un alumno que llega en la línea verde se suba a la línea roja?

13. Demuestre que la media y la desviación estándar de la distribución exponencial son iguales.

17.4 MODELOS CON NACIMIENTOS Y MUERTES PURAS (RELACIÓN ENTRE LAS DISTRIBUCIONES EXPONENCIAL Y DE POISSON)

En esta sección se describen dos situaciones en las colas: la primera es un modelo de **nacimiento(s) puro(s)**, en el que sólo se permiten llegadas, y el segundo es el modelo de **muerte(s) pura(s)**, en el que sólo se permiten salidas. Un ejemplo del modelo de nacimiento puro es la emisión de los certificados de nacimiento para los recién nacidos. El modelo de muerte pura se puede visualizar con el retiro aleatorio de un artículo en una tienda.

La distribución exponencial se usa para describir el tiempo entre llegadas en el modelo de nacimiento puro, y el tiempo entre salidas con el modelo de muerte pura. Un producto secundario del desarrollo de los dos modelos es la demostración de la estrecha relación entre las distribuciones exponencial y de Poisson, en el sentido que una distribución define en forma automática a la otra.

17.4.1 Modelo de nacimientos puros

Se define

$$p_0(t) = \text{Probabilidad de que no haya llegadas durante un espacio de tiempo } t$$

Como el tiempo entre llegadas es exponencial, y la frecuencia de llegadas es λ clientes por unidad de tiempo, entonces

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P\{\text{tiempo entre llegadas } \geq t\} \\ &= 1 - P\{\text{tiempo entre llegadas } \leq t\} \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Para un intervalo suficientemente pequeño $h > 0$,

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \ldots = 1 - \lambda h + 0(h^2)$$

La distribución exponencial se basa en la hipótesis que durante un tiempo suficientemente pequeño $h > 0$, puede presentarse cuando mucho una llegada. Así, cuando $h \rightarrow 0$,

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) \approx \lambda h$$

Este resultado indica que la probabilidad de una llegada durante h es directamente proporcional a h, y que la frecuencia de llegadas λ es la constante de proporcionalidad.

Para deducir la distribución de la *cantidad* de llegadas durante un periodo t, cuando el tiempo entre llegadas es exponencial con promedio $\frac{1}{\lambda}$, se define a

$$p_n(t) = \text{Probabilidad de } n \text{ llegadas durante } t$$

Para una $h > 0$ suficientemente pequeña,

$$\begin{aligned} p_n(t + h) &\approx p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h, \quad n > 0 \\ p_0(t + h) &\approx p_0(t)(1 - \lambda h), \quad\quad\quad\quad\quad n = 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación se realizan n llegadas durante $t + h$, si hay n llegadas durante t y no hay llegadas durante h, o $n - 1$ llegadas durante t y una llegada durante h. No se permite ninguna otra combinación porque, según la distribución exponencial, cuando mucho puede haber una llegada durante un periodo h muy pequeño. La ley de producto de probabilidades se puede aplicar al lado derecho de la ecuación, porque las llegadas son independientes. Para la segunda ecuación, sólo puede haber cero llegadas durante $t + h$ si no hay llegadas durante t y durante h.

Al rearreglar los términos y tender a los límites cuando $h \rightarrow 0$, se obtiene

$$p'_n(t) = \text{lím}_{h\rightarrow 0} \frac{p_n(t + h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \; n > 0$$

$$p'_0(t) = \text{lím}_{h\rightarrow 0} \frac{p_0(t + h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t), \quad\quad\quad n = 0$$

en donde $p'_n(t)$ es la primera derivada de $p_n(t)$ con respecto a t.

La solución de estas ecuaciones en diferencias y diferenciales es

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Es una **distribución de Poisson**, con media $E\{n|t\} = \lambda t$ llegadas durante t.

Este resultado indica que si el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$ la cantidad de llegadas durante un periodo t específico tiene distribución de Poisson con media λt. También es cierto lo contrario.

Las fuertes relaciones entre las distribuciones exponencial y de Poisson, para una frecuencia de λ llegadas por unidad de tiempo se puede resumir como sigue:

	Exponencial	De Poisson
Variable aleatoria	*Tiempo t* entre llegadas sucesivas	*Cantidad n* de llegadas durante un periodo especificado T
Intervalo	$t \geq 0$	$n = 0, 1, 2, \ldots$
Función de densidad	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t \geq 0$	$p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$
Valor de la media	$\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo	λT llegadas durante T
Probabilidad acumulada	$P\{t \leq A\} = 1 - e^{-\lambda A}$	$p_{n \leq N}(T) = p_0(T) + p_1(T) + \cdots + p_N(T)$
P{no haya llegadas durante el periodo A}	$P\{t > A\} = e^{-\lambda A}$	$p_0(A) = e^{-\lambda A}$

Ejemplo 17.4-1

Los niños nacen en un estado poco poblado, con una frecuencia de un nacimiento cada 12 minutos. El tiempo entre nacimientos sigue una distribución exponencial. Determinar lo siguiente:

a) La cantidad promedio de nacimientos por año.
b) La probabilidad de que no haya nacimientos en cualquier día.
c) La probabilidad de emitir 50 certificados de nacimiento en 3 horas, cuando se emitieron 40 certificados durante las primeras 2 horas del periodo de 3 horas.

La tasa diaria de nacimientos se calcula como sigue:

$$\lambda = \frac{24 \times 60}{12} = 120 \text{ nacimientos/día}$$

Los nacimientos anuales en el estado son

$$\lambda t = 120 \times 365 = 43{,}800 \text{ nacimientos/día}$$

La probabilidad de que no haya nacimientos en algún día se calcula con la distribución de Poisson:

$$p_0(1) = \frac{(120 \times 1)^0 e^{-120\times 1}}{0!} = 0$$

Para calcular la probabilidad de emitir 50 certificados en 3 horas, cuando se han emitido ya 40 certificados en las 2 primeras horas, equivale a tener 10 (= 50 – 40) nacimientos en 1 (= 3 – 2) hora. Como $\lambda = \frac{60}{12} = 5$ nacimientos por hora, entonces

$$p_{10}(1) = \frac{(5 \times 1)^{10} e^{-5\times 1}}{10!} = 0.01813$$

Los cálculos de la distribución de Poisson, y en realidad de todas las fórmulas de colas son tediosos, y requieren manejo especial para asegurar una exactitud de cómputo razonable. Se aconseja entonces usar TORA para hacer esos cálculos. También se puede usar la plantilla Excel ch17PoissonQueues.xls para hacer esos cálculos. Los datos son los mismos que en TORA. Sin embargo, encontrará el lector que TORA es más cómodo cuando se comparan varios escenarios.

Los datos del modelo de nacimiento puro para este ejemplo se capturan en TORA (archivo ch17ToraQueuesEx17-4-1) como sigue:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
5	0	0	Infinito	Infinito

Observe que el elemento de Lambda es $\lambda t = 5 \times 1 = 5$ nacimientos por día. La figura 17.2 muestra el resultado cuando se usan TORA y Excel.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.4A

1. En el ejemplo 17.4-1 suponga que el empleado que pasa la información de los certificados de nacimiento a la computadora suele esperar hasta que se hayan acumulado 5 certificados. Calcule la probabilidad de que el empleado capture un nuevo lote en cada hora.
2. Un coleccionista de arte viaja una vez al mes, en promedio, para asistir a subastas. En cada viaje se garantiza una compra. El tiempo entre los viajes tiene distribución exponencial. Determine lo siguiente:
   a) La probabilidad de que el coleccionista no compre obras de arte en un periodo de 3 meses.
   b) La probabilidad de que el coleccionista no compre más de 8 obras de arte por año.
   c) La probabilidad de que el tiempo entre viajes sucesivos sea mayor que 1 mes.
3. En un banco, la frecuencia de llegadas es de 2 clientes por minuto. Determine lo siguiente:
   a) La cantidad promedio de llegadas durante 5 minutos.
   b) La probabilidad de que no haya llegadas durante el próximo 0.5 minuto.
   c) La probabilidad de que haya al menos una llegada durante el siguiente 0.5 minuto.
   d) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sucesivas sea de 3 minutos, cuando menos.
4. El tiempo entre llegadas al L&J Restaurant es exponencial, con una media de 5 minutos. El restaurante abre a las 11:00 A.M. Determine lo siguiente:
   a) La probabilidad de tener 10 llegadas al restaurante hasta las 11:12 A.M., si hubo 8 llegadas hasta las 11:05 A.M.
   b) La probabilidad de que llegue un cliente entre las 11:28 y las 11:33 A.M., si el último cliente llegó a las 11:25 A.M.
5. La biblioteca Springdale Public Library recibe libros de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 25 libros diarios. Cada anaquel de la biblioteca contiene 100 libros. Calcule lo siguiente:

```
Title: Example 17.4-1, Figure 17.2
Scenario1: Pure Birth Model
-----------------------------------------------------------------------------
Lambda =      5.00000                        Mu =          0.00000
Lambda eff =                                 Rho/c =

Ls =         5.00000                         Lq =
Ws =                                         Wq =
-----------------------------------------------------------------------------
 n   Probability pn    Cumulative Pn        n   Probability pn    Cumulative Pn
-----------------------------------------------------------------------------
 0          0.00674           0.00674       9          0.03627          0.96817

 1          0.03369           0.04043      10          0.01813          0.98630
 2          0.08422           0.12465      11          0.00824          0.99455
 3          0.14037           0.26503      12          0.00343          0.99798
 4          0.17547           0.44049      13          0.00132          0.99930
 5          0.17547           0.61596      14          0.00047          0.99977

 6          0.14622           0.76218      15          0.00016          0.99993
 7          0.10444           0.86663      16          0.00005          0.99998
 8          0.06528           0.93191      17          0.00001          0.99999
-----------------------------------------------------------------------------
```

	G	H	I	J
1	M/M/c/GD/N/K Queueing Model			
2	**Input Data** (to enter an infinite value, type i or infinity):			
3	λ =	5	μ =	0
4	c =	0		
5	Sys. Lim., N=	infinity	Source limit, K =	infinity
6	**Output Results (Pure Birth Model):**			
7	λ_{eff} =			infinity
8	Ls =		Lq =	
9	Ws =		Wq =	
10	**n**	**Pn**	**CPn**	**1-CPn**
11	0	0.0067379470	0.0067379470	0.9932620530
12	1	0.0336897350	0.0404276820	0.9595723180
13	2	0.0842243375	0.1246520195	0.8753479805
14	3	0.1403738958	0.2650259153	0.7349740847
15	4	0.1754673698	0.4404932851	0.5595067149
16	5	0.1754673698	0.6159606548	0.3840393452
17	6	0.1462228081	0.7621834630	0.2378165370
18	7	0.1044448630	0.8666283259	0.1333716741
19	8	0.0652780393	0.9319063653	0.0680936347
20	9	0.0362655774	0.9681719427	0.0318280573
21	10	0.0181327887	0.9863047314	0.0136952686
22	11	0.0082421767	0.9945469081	0.0054530919
23	12	0.0034342403	0.9979811484	0.0020188516
24	13	0.0013208616	0.9993020100	0.0006979900
25	14	0.0004717363	0.9997737463	0.0002262537
26	15	0.0001572454	0.9999309918	0.0000690082
27	16	0.0000491392	0.9999801310	0.0000198690
28	17	0.0000144527	0.9999945837	0.0000054163
29	18	0.0000040146	0.9999985983	0.0000014017

FIGURA 17.2

Probabilidades de Poisson de TORA y Excel del ejemplo 17.4-1

a) La cantidad promedio de anaqueles que se llenarán de libros cada mes (de 30 días).

b) La probabilidad de que se necesiten más de 10 secciones para libros cada mes, si una sección contiene 5 anaqueles.

6. La U de A administra dos líneas de autobuses en su campus: la roja y la verde. La roja da servicio al lado norte y la verde al lado sur, y hay una estación de transbordo que une a las dos. Los autobuses verdes llegan al azar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a la estación de transbordo cada 10 minutos. Los rojos llegan al azar cada 7 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos autobuses lleguen a la estación durante un intervalo de 5 minutos?

b) Un alumno, cuyo dormitorio es vecino a la estación, tiene una clase dentro de 10 minutos. Cualesquiera de los autobuses lo llevará al edificio de su salón. El viaje en autobús dura 5 minutos, y después tiene que caminar unos 3 minutos para llegar a su salón. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo a su salón?

7. Demuestre que la media y la varianza de la distribución de Poisson durante un intervalo t son iguales a λt, siendo λ la frecuencia de llegadas.

8. Deduzca la distribución de Poisson a partir de las ecuaciones en diferencias y diferenciales del modelo de nacimiento puro. *Sugerencia:* la solución de la ecuación diferencial general

$$y' + a(t)y = b(t)$$

es

$$y = e^{-\int a(t)dt}\left\{\int b(t)e^{\int a(t)}dt + \text{constante}\right\}$$

17.4.2 Modelo de muertes puras

En el modelo de muerte(s) pura(s), el sistema comienza con N clientes cuando el tiempo es 0, y no se permiten más llegadas. Las salidas se hacen con la frecuencia de μ clientes por unidad de tiempo. Para deducir las ecuaciones en diferencias y diferenciales para la probabilidad $p_n(t)$ de n clientes *remanentes* a las t unidades de tiempo, se seguirán los argumentos que se usaron en el modelo de nacimientos puros (Sección 17.4.1). Entonces,

$$p_N(t + h) = p_N(t)(1 - \mu h)$$
$$p_n(t + h) = p_n(t)(1 - \mu h) + p_{n+1}(t)\mu h,\ 0 < n < N$$
$$p_0(t + h) = p_0(t)(1) + p_1(t)\mu h$$

Cuando $h \to 0$, se obtiene

$$p'_N(t) = -\mu p_N(t)$$
$$p'_n(t) = -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t),\ 0 < n < N$$
$$p'_0(t) = \mu p_1(t)$$

La solución de esas ecuaciones es la distribución **truncada de Poisson**:

$$p_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n}\, e^{-\mu t}}{(N - n)!},\ n = 1, 2, \ldots, N$$

$$p_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N} p_n(t)$$

Ejemplo 17.4-2

La sección de florería en un supermercado tiene 18 docenas de rosas al iniciar cada semana. En promedio, el florista vende 3 docenas por día (una docena cada vez), pero la demanda sigue en realidad una distribución de Poisson. Siempre que la existencia llega a 5 docenas (o menos), se coloca un pedido nuevo de 18 docenas, para entregar al principio de la semana si-

guiente. Por la naturaleza de la mercancía, todas las rosas que quedan al final de la semana se desechan. Determinar lo siguiente:

a) La probabilidad de colocar un pedido en cualquier día de la semana.
b) La cantidad promedio de docenas de rosas que se desechan al final de la semana.

Como las compras se hacen con una frecuencia de $\mu = 3$ docenas diarias, la probabilidad de colocar un pedido al final del día t es

$$p_{n\leq 5}(t) = p_0(t) + p_1(t) + \ldots + p_5(t)$$

$$= p_0(t) + \sum_{n=1}^{5} \frac{(3t)^{18-n}\, e^{-3t}}{(18-n)!},\ t = 1, 2, \ldots, 7$$

Al usar la opción de escenario múltiple de TORA, los datos correspondientes al modelo de muertes puras que corresponden a $t = 1, 2, \ldots$, y 7 se capturan como sigue (archivo ch17Tora-QueuesEx17-4-2.txt):

Escenario	Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
1	0	3	1	18	18
2	0	6	1	18	18
3	0	9	1	18	18
4	0	12	1	18	18
5	0	15	1	18	18
6	0	18	1	18	18
7	0	21	1	18	18

Los resultados que se buscan se resumen como sigue en TORA:

t (días)	1	2	3	4	5	6	7
μt	3	6	9	12	15	18	21
$p_{n\leq 5}(t)$	0.0000	0.0088	0.1242	0.4240	0.7324	0.9083	0.9755

La cantidad promedio de docenas de rosas desechadas al final de la semana ($t = 7$), se calcula (con TORA) como sigue:

$$E\{n|t = 7\} = \sum_{n=0}^{18} np_n(7) = 0.664 \text{ docena}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.4B

1. En el ejemplo 17.4-2,

a) Use TORA para comprobar los valores de $p_{n\leq 5}(t)$, para $t = 1, 2, \ldots$, y 7.
b) Use TORA para calcular $p_n(7)$, $n = 1, 2, \ldots, 18$, y a continuación compruebe, manualmente que esas probabilidades son $E\{n|t = 7\} = 0.664$ docena.

2. Para el ejemplo 17.4-2, en cada uno de los siguientes casos, escriba primero la respuesta en forma algebraica y a continuación use TORA para hacer los cálculos numéricos.

a) La probabilidad de que el inventario se agote después de 3 días.

b) La cantidad promedio de docenas de rosas que quedan después del segundo día.

c) La probabilidad de que al menos se compre una docena de rosas hasta que termina el cuarto día, si se compró la última docena al terminar el tercer día.

d) La probabilidad de que el tiempo restante para la siguiente compra sea cuando mucho medio día, si la última compra se hizo el día anterior.

e) La probabilidad de que no haya compras durante el primer día.

3. La banda de la escuela Springdale dará un concierto de jazz, de beneficencia, en su auditorio de 400 butacas. Las empresas locales compran los boletos en bloques de 10 y los donan a organizaciones juveniles. Los boletos se ponen a la venta sólo durante 4 horas en el día anterior al concierto. El proceso de de compra de boletos tiene distribución de Poisson, con un media de 10 llamadas por hora. Todos los bloques de boletos sobrantes al cerrar la oficina se venden con un descuento como "boletos de último momento" 1 hora antes de comenzar el concierto. Calcule:

a) La probabilidad de que se puedan comprar boletos de último momento.

b) La cantidad promedio de boletos de último momento disponibles.

4. Cada mañana, el refrigerador de un taller pequeño es abastecido con dos cajas (24 latas por caja) de gaseosas, para consumo de los 10 empleados. Estos empleados pueden saciar su sed a cualquier hora, durante el día de trabajo de 8 horas (de 8:00 A.M. a 4:00 P.M.), y se sabe que cada empleado consume aproximadamente 4 latas diarias, pero el proceso es totalmente aleatorio (distribución de Poisson). ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado no encuentre latas a mediodía (el inicio de la hora del almuerzo)? ¿Y para cuando cierra el taller?

5. Un alumno de primer año recibe de su familia un depósito bancario de \$100 cada mes, para sus gastos imprevistos. Los cheques para retirar, de \$20 cada uno, pueden emitirse al azar durante el mes, a intervalos de acuerdo con una distribución exponencial con una media de 1 semana. Calcule la probabilidad de que se le agote el dinero, antes que termine la cuarta semana.

6. Se retira la existencia de un almacén de 40 artículos, siguiendo una distribución de Poisson con una frecuencia de 5 artículos diarios. Calcule lo siguiente:

a) La probabilidad de que se retiren 10 artículos durante los primeros 2 días.

b) La probabilidad de que no haya retiros al terminar 4 días.

c) La cantidad promedio de artículos retirados durante un periodo de 4 días.

7. Un taller acaba de almacenar 10 piezas de repuesto para reparar una máquina. Cada 7 días se hace un abastecimiento del inventario, de 10 piezas. El tiempo entre descomposturas es exponencial, con media de 1 día. Determine la probabilidad de que la máquina dure descompuesta 2 días, por falta de partes de repuesto.

8. La demanda de un artículo sigue una distribución de Poisson, con una media de 3 por día. La existencia máxima es 25 piezas, y se abastece cada lunes, inmediatamente después de recibir un pedido. El tamaño del pedido depende de la cantidad de unidades que quedan el sábado, al finalizar la semana (el negocio cierra los domingos). Determine lo siguiente:

a) El tamaño promedio del pedido semanal.

b) La probabilidad de que haya escasez cuando el negocio abra el viernes por la mañana.

c) La probabilidad de que el tamaño del pedido semanal sea mayor que 10 unidades.

9. Demuestre que la distribución del tiempo entre salidas, que corresponde a la distribución de Poisson truncada en el modelo de muertes puras es una distribución exponencial con una media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.

10. Deduzca la distribución de Poisson truncada partiendo de las ecuaciones en diferencias y diferenciales del modelo de muertes puras, usando inducción. (*Nota:* vea la sugerencia del problema 8, conjunto de problemas 17.4a).

17.5 MODELO GENERALIZADO DE COLA DE POISSON

En esta sección se formula un modelo general de cola donde se combinan llegadas y salidas, basándose en las hipótesis de Poisson: los tiempos entre llegadas y de servicio tienen una distribución exponencial. El modelo es la base para deducir modelos de Poisson especializados, que se verán en la sección 17.6.

El desarrollo del modelo generalizado se basa en el comportamiento a largo plazo, o de **estado estable**, de la cola, que se alcanza después de que el sistema ha estado funcionando durante un tiempo suficientemente largo. Esta clase de análisis contrasta con el comportamiento **transitorio** (de calentamiento) que prevalece durante el inicio del funcionamiento del sistema. Una razón para no describir el comportamiento transitorio en este capítulo es su complejidad analítica. Otra es que el estudio de la mayor parte de los casos de líneas de espera sucede bajo condiciones de estado estable.

En el modelo generalizado supone que las frecuencias tanto de llegada como de salida **dependen del estado**, y eso quiere decir que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio. Por ejemplo, en la caseta de cobro de una autopista, los empleados tienden a acelerar el cobro durante las horas pico. Otro ejemplo se da en un taller, con determinada cantidad de máquinas, cuando disminuye la frecuencia de descomposturas, cuando aumenta la cantidad de máquinas descompuestas (porque sólo las máquinas que trabajan son capaces de generar descomposturas nuevas).

Se definirá lo siguiente:

n = Cantidad de clientes en el sistema (en la cola y en el servicio)
λ_n = Frecuencia de llegada cuando hay n clientes en el sistema
μ_n = Frecuencia de salida cuando hay n clientes en el sistema
p_n = Probabilidad de estado estable de que haya n clientes en el sistema

El modelo generalizado define a p_n como función de λ_n y p_n. Después se usan esas probabilidades para determinar las medidas de funcionamiento del sistema, como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera y la utilización promedio de la instalación.

Las probabilidades p_n se calculan usando el **diagrama de frecuencia de transición** (o "rapidez" o "tasa" de transición) de la figura 17.3. El sistema de cola está en el estado n cuando la cantidad de clientes en él es n. Como se explicó en la sección 17.3, la probabilidad de que suceda más de un evento durante un intervalo pequeño h, tiende a cero cuando $h \to 0$. Eso quiere decir que para $n > 0$, el estado n sólo puede cambiar a dos estados posibles: $n - 1$ cuando hay una salida con frecuencia μ_n, y $n + 1$ cuando hay una llegada con la frecuencia λ_n. El estado 0 sólo puede cambiar al estado 1 cuando hay una llegada con la frecuencia λ_0. Observe que μ_0 no está definida, porque no pueden haber salidas si el sistema está vacío.

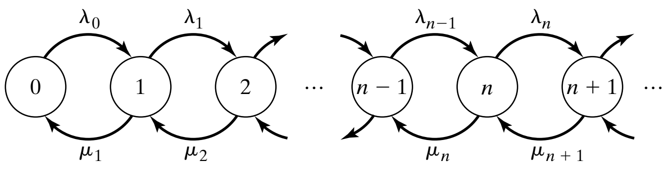


FIGURA 17.3
Diagrama de transición en colas de Poisson

Bajo condiciones de estado estable, para $n > 0$, las tasas *esperadas* de flujo de entrada y salida del estado n deben ser iguales. Con base en el hecho que el estado n sólo puede cambiar a los estados $n - 1$ y $n + 1$, se obtiene

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa esperada de} \\ \text{flujo hacia el estado } n\end{pmatrix} = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$$

De igual manera,

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa esperada de flujo} \\ \text{que sale del estado } n\end{pmatrix} = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Al igualar las dos frecuencias se obtiene la siguiente **ecuación de balance**:

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

En la figura 17.3 se ve que la ecuación de balance asociada con $n = 0$ es

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

Las ecuaciones de balance se resuelven recursivamente en función de p_0 como sigue: para $n = 0$,

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)p_0$$

Después, para $n = 1$,

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1$$

Se sustituye $p_1 = (\frac{\lambda_0}{\mu_0})p_0$ y se simplifica, para obtener (¡compruébelo!)

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\right)p_0$$

Se puede demostrar por inducción que, en general

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1}\right)p_0,\ n = 1, 2, \ldots$$

El valor de p_0 se determina con la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Ejemplo 17.5-1

B&K Groceries opera con tres cajas. El gerente usa el siguiente programa para determinar la cantidad de cajeras en operación, en función de la cantidad de clientes en la tienda:

Ctd. de clientes en la tienda	Ctd. de cajeros funcionando
1 a 3	1
4 a 6	2
Más de 6	3

Los clientes llegan a las cajas siguiendo una distribución de Poisson, con una frecuencia media de 10 por hora. El tiempo promedio de atención a un cliente es exponencial, con 12 minutos de promedio. Calcular la probabilidad *p* de estado estable de que haya *n* clientes en las cajas.

De la información del problema se tiene que

$$\lambda_n = \lambda = 10 \text{ clientes por hora}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{60}{12} = 5 \text{ clientes por hora}, & n = 1, 2, 3 \\ 2 \times 5 = 10 \text{ clientes por hora}, & n = 4, 5, 6 \\ 3 \times 5 = 15 \text{ clientes por hora}, & n = 7, 8, \ldots \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\tfrac{10}{5}\right)p_0 = 2p_0 \\ p_2 &= \left(\tfrac{10}{5}\right)^2 p_0 = 4p_0 \\ p_3 &= \left(\tfrac{10}{5}\right)^3 p_0 = 8p_0 \\ p_4 &= \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)p_0 = 8p_0 \\ p_5 &= \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)^2 p_0 = 8p_0 \\ p_6 &= \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)^3 p_0 = 8p_0 \\ p_n &= \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)^3\left(\tfrac{10}{15}\right)^{n-6} p_0 = 8\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-6} p_0,\ n = 7, 8, \ldots \end{aligned}$$

El valor de p_0 se determina con la ecuación

$$p_0 + p_0\{2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8\left(\tfrac{2}{3}\right) + 8\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 8\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \cdots\} = 1$$

o bien, lo que es igual,

$$p_0\{31 + 8(1 + \left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots)\} = 1$$

Se aplica la fórmula de la suma de una serie geométrica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1$$

para obtener

$$p_0\left\{31 + 8\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right)\right\} = 1$$

En consecuencia, $p_0 = \frac{1}{55}$.

Conocida p_0, ya se puede determinar cualesquiera de las probabilidades del problema. Por ejemplo, la probabilidad de que sólo haya una caja abierta se calcula como la de que haya entre 1 y 3 clientes en el sistema, esto es

$$p_1 + p_2 + p_3 = (2 + 4 + 8)\left(\tfrac{1}{55}\right) \approx 0.255$$

Se puede usar p_n para determinar medidas de funcionamiento, o de eficiencia, para el caso de B&K. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{Cantidad esperada} \\ \text{de cajas vacías} \end{pmatrix} &= 3p_0 + 2(p_1 + p_2 + p_3) + 1(p_4 + p_5 + p_6) + 0(p_7 + p_8 + \ldots) \\ &= 1 \text{ caja} \end{aligned}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.5A

1. En el ejemplo 17.5-1, determine lo siguiente:

a) La distribución de probabilidades de la cantidad de cajas abiertas.

b) La cantidad promedio de cajas ocupadas.

2. En el modelo de B&K del ejemplo 17.5-1, suponga que el tiempo entre llegadas al área de cajas es exponencial, con una media de 5 minutos, y que el tiempo de atención a un cliente también es exponencial, con una media de 10 minutos. Además, suponga que B&K tiene una cuarta caja, y que las cajas abren dependiendo de incrementos de dos clientes (en el ejemplo, los incrementos eran de 3 clientes). Determine lo siguiente:

a) Las probabilidades p_n de estado estable, para toda n.

b) La probabilidad de que se necesite una cuarta caja.

c) La cantidad promedio de cajas vacías.

3. En el modelo de B&K del ejemplo 17.5-1, suponga que las tres cajas siempre están abiertas, y que el funcionamiento es de tal manera que el cliente pasa a la primera caja desocupada. Calcule lo siguiente:

a) La probabilidad de que estén funcionando las tres cajas.

b) La probabilidad de que un cliente que llegue no tenga que esperar.

4. El First Bank of Springdale tiene un cajero automático que despacha a automovilistas que forman una línea. Los vehículos llegan siguiendo una distribución de Poisson, con una frecuencia de 12 por hora. El tiempo necesario para hacer una transacción en el cajero es exponencial, con 6 minutos de promedio. En la línea cabe un total de 10 automóviles. Una vez llena, los automóviles que lleguen deben irse a otra parte. Calcule lo siguiente:

a) La probabilidad de que un vehículo que llegue no pueda usar el cajero, porque la línea está llena.

b) La probabilidad de que un vehículo no pueda usar el cajero inmediatamente al llegar.

c) La cantidad promedio de vehículos en la línea.

5. ¿Alguna vez oyó usted la afirmación contradictoria de "el lugar está tan atestado que ya nadie va allí"? Esta afirmación se puede interpretar como decir que aumenta la oportunidad de rehusar al aumentar la cantidad de clientes que buscan servicio. Una plataforma posible para modelar este caso es decir que la frecuencia de llegadas al sistema disminuye al aumentar la cantidad de clientes en el sistema. En forma más específica, examinaremos el caso simplificado del M&M Pool Club, donde los clientes suelen llegar en pares para "jugar pool". La frecuencia normal de llegadas es 6 pares (de personas) por hora. Sin embargo, una vez que la cantidad de pares que están en el billar es mayor que 8, la frecuencia de llegada baja a 5 pares por hora. Se supone que el proceso de llegadas sigue una distribución del Poisson. Cada par juega pool durante un tiempo exponencial, con 30 minutos de promedio. El billar tiene un total de 5 mesas y no pueden caber más de 12 pares en cualquier momento. Calcule lo siguiente:

a) La probabilidad de que los clientes comiencen a rehusar.

b) La probabilidad de que se estén usando todas las mesas.

c) La cantidad promedio de mesas en uso.

d) La cantidad promedio de pares en espera de que se desocupe una mesa de pool.

6. En una peluquería se atiende a un cliente cada vez, y tiene tres sillas para los clientes que esperan. Si el lugar está lleno, los clientes van a otra parte. Las llegadas siguen una distribución de Poisson con una media de 4 por hora. El tiempo de un corte de pelo es exponencial, con 15 minutos de promedio. Determine lo siguiente:

a) Las probabilidades de estado estable.

b) La cantidad esperada de clientes en la peluquería.

c) La probabilidad de que los clientes vayan a otra parte por estar lleno el local.

7. Examine un caso de cola con un servidor, en el que las tasas de llegada y de servicio son:

$$\lambda_n = 10 - n, \ n = 0, 1, 2, 3$$

$$\mu_n = \frac{n}{2} + 5, \ n = 1, 2, 3, 4$$

Este caso equivale a reducir la frecuencia de llegadas y aumentar la rapidez del servicio a medida que aumenta la cantidad n en el sistema.

a) Formule el diagrama de transición, y determine la ecuación de balance para el sistema.

b) Determine las probabilidades de estado estable.

8. En un modelo de cola sólo se permite que haya un cliente en el sistema. Los clientes que llegan y encuentran ocupada la instalación, se van y nunca regresan. Suponga que la distribución de llegadas es de Poisson, con promedio λ por unidad de tiempo, y que el tiempo de servicio es exponencial con una media $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.

a) Trace el diagrama de transición y determine las ecuaciones de balance.

b) Determine las probabilidades de estado estable.

c) Determine la cantidad promedio en el sistema.

9. La demostración por inducción, para deducir la solución general del modelo generalizado, se aplica como sigue. Considere

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)p_0, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Se sustituyen p_{n-1} y p_{n-2} en la ecuación general de diferencias donde intervienen p_n, p_{n-1} y p_{n-2} para deducir la ecuación de p_n que se busca. Compruebe este procedimiento.

17.6 COLAS ESPECIALIZADAS DE POISSON

La figura 17.4 muestra el caso especial de colas de Poisson cuando hay c servidores en paralelo. Un cliente en espera se selecciona de la cola para iniciar su servicio en el primer servidor disponible. La frecuencia de llegadas al sistema es λ clientes por unidad de tiempo. Todos los servidores están en paralelo y son idénticos, lo que quiere decir que la tasa de servicio en cualquier servidor es μ clientes por unidad de tiempo. La cantidad de clientes en el *sistema* incluye, por definición, los que hay *en el servicio* y los que esperan *en la cola*.

Una notación cómoda para resumir las características de la cola en la figura 17.4 es la que tiene el siguiente formato:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

en donde

a = Distribución de las llegadas

b = Distribución de las salidas (o del tiempo de servicio)

c = Cantidad de servidores en paralelo (= 1, 2, ..., ∞)

d = Disciplina de la cola

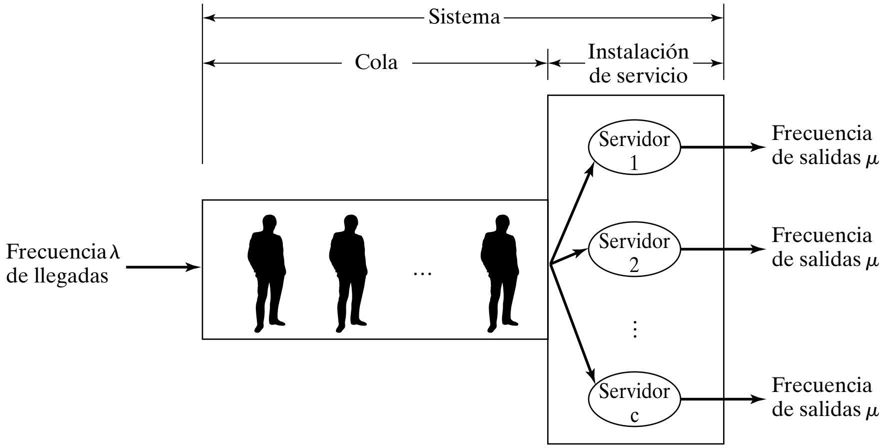


FIGURA 17.4
Esquema de un sistema de cola con *c* servidores en paralelo

e = Cantidad máxima (finita o infinita) admisible en el sistema (en la cola más en servicio)

f = Tamaño de la fuente (finito o infinito)

Las notaciones normales o estándar para representar las distribuciones de llegadas y de salidas (símbolos a y b) son:

M = Distribución de Markov (o de Poisson) de las llegadas o de las salidas (o lo que es igual, distribución exponencial del tiempo entre llegadas o tiempo de servicio)

D = Tiempo constante (determinístico)

E_k = Distribución de Erlang o gamma del tiempo (o bien, la suma de distribuciones exponenciales independientes)

GI = Distribución general del tiempo entre llegadas

G = Distribución general del tiempo de servicio

Entre la notación de disciplinas de cola (símbolo d) están:

PLPS = Primero en llegar, primero en ser servido

ULPS = Último en llegar, primero en ser servido

SEOA = Servicio en orden aleatorio

DG = Disciplina en general (es decir, cualquier tipo de disciplina)

Para ilustrar el empleo de la notación, el modelo $(M/D/10) : (DG/20/\infty)$ usa llegadas de Poisson (o tiempo entre llegadas exponencial), tiempo constante de servicio y 10 servidores en paralelo. La disciplina de la cola es DG y hay un límite de 20 clientes en todo el sistema. El tamaño de la fuente desde donde llegan los clientes es infinito.

Como nota histórica, los primeros tres elementos de la notación (*a/b/c*) fueron inventados por D. G. Kendall en 1953, y en las publicaciones se llaman notación de Kendall. Después, en 1966, A. M. Lee agregó los símbolos *d* y *e*. Yo agregué el último elemento, el símbolo *f*, en 1968.

Antes de presentar los detalles de las colas de Poisson especializadas, indicaremos cómo se pueden deducir las medidas de eficiencia en estado estable, para el caso de colas generalizadas, a partir de las probabilidades de estado estable p_n, descritas en la sección 17.5.

17.6.1 Medidas de desempeño en estado estacionario

Las medidas de desempeño, eficiencia o funcionamiento de una cola son

L_s = Cantidad esperada de clientes en el *sistema*

L_q = Cantidad esperada de clientes en la *cola*

W_s = Tiempo esperado de espera en el *sistema*

W_q = Tiempo esperado de espera en la *cola*

$\bar{c}$ = Cantidad esperada de servidores ocupados

Recuerde que el *sistema* abarca tanto a la *cola* como a la *instalación de servicio*.

Ahora indicaremos cómo se deducen (en forma directa o indirecta) esas medidas a partir de la probabilidad p_n de estado estable de que haya n en el sistema. En forma específica,

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c)p_n$$

La relación entre L_s y W_s (también L_q y W_q) se llama **fórmula de Little**, y es la siguiente:

$$L_s = \lambda_{\text{ef}} W_s$$
$$L_q = \lambda_{\text{ef}} W_q$$

Estas relaciones son válidas bajo condiciones bastante generales. El parámetro λ_{ef} es la frecuencia *efectiva* de llegada al sistema. Es igual a la tasa (nominal) de llegada λ cuando todos los clientes que llegan se unen al sistema. En caso contrario, si algunos clientes no se pueden unir porque el sistema está lleno (por ejemplo, un estacionamiento), entonces $\lambda_{\text{ef}} < \lambda$. Más adelante mostraremos cómo determinar λ_{ef}.

También hay una relación directa entre W_s y W_q. Por definición,

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo de espera}\\ \text{en el sistema}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Tiempo de espera}\\ \text{promedio en la cola}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo esperado}\\ \text{de servicio}\end{pmatrix}$$

Esto se traduce a

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

A continuación, se puede relacionar L_s con L_q, multiplicando ambos lados de la última ecuación por λ_{ef}, y junto con la fórmula de Little se obtiene

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

Por definición, la diferencia entre la cantidad promedio en el sistema, L_s, y la cantidad promedio en la cola, L_q, debe ser igual a la cantidad promedio de servidores *ocupados*, $\bar{c}$. Entonces,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

Por lo anterior, entonces,

$$\begin{pmatrix}\text{Utilización de} \\ \text{la instalación}\end{pmatrix} = \frac{\bar{c}}{c}$$

Ejemplo 17.6-1

El estacionamiento de visitas de Ozark College se limita sólo a cinco cajones. Los automóviles que lo usan llegan siguiendo una distribución de Poisson con frecuencia de cinco por hora. El tiempo de estacionamiento tiene distribución exponencial con 30 minutos de promedio. Las visitas que no pueden encontrar un lugar vacío inmediatamente cuando llegan pueden esperar provisionalmente dentro del estacionamiento hasta que salga un automóvil estacionado. Los cajones provisionales sólo pueden contener tres vehículos. Otros vehículos que no se puedan estacionar ni encontrar un espacio de espera temporal se deben ir a otra parte. Determinar lo siguiente:

- **a)** La probabilidad p_n de que haya n automóviles en el sistema.
- **b)** La frecuencia efectiva de llegada para automóviles que usen en realidad el estacionamiento.
- **c)** La cantidad promedio de automóviles en el estacionamiento.
- **d)** El tiempo promedio que espera un automóvil hasta que haya un cajón libre dentro del estacionamiento.
- **e)** La cantidad promedio de cajones de estacionamiento *ocupados*.
- **f)** La utilización promedio de ese estacionamiento.

Primero se observa que un cajón de estacionamiento funciona como servidor, y entonces el sistema tiene un total de $c = 5$ servidores en paralelo. También, que la capacidad máxima del sistema es $5 + 3 = 8$ automóviles.

Se puede calcular la probabilidad p_n como caso especial del modelo generalizado de la sección 17.5. En forma específica se tiene que

$$\lambda_n = 6 \text{ automóviles/hora}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, 8$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\left(\frac{60}{30}\right) = 2n \text{ automóviles/hora}, & n = 1, 2, \ldots, 5 \\ 5\left(\frac{60}{30}\right) = 10 \text{ automóviles/hora}, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

De acuerdo con la sección 17.5,

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{3^n}{n!} p_0, & n = 1, 2, \cdots, 5 \\ \dfrac{3^n}{5!5^{n-5}} p_0, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

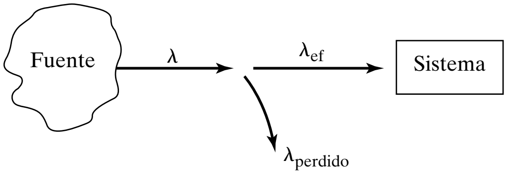


FIGURA 17.5
Relación entre λ, λ_{ef} y $\lambda_{perdido}$

El valor de p_0 se calcula sustituyendo p_n, $n = 1, 2, ..., 8$, en la siguiente ecuación:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_8 = 1$$

o sea

$$p_0 + p_0\left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{5!5} + \frac{3^7}{5!5^2} + \frac{3^8}{5!5^3}\right) = 1$$

Esto da como resultado $p_0 = 0.04812$ (¡compruébelo!). A partir de p_0 ya se pueden calcular p_1 a p_8, y los resultados son

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	0.14436	0.21654	0.21654	0.16240	0.09744	0.05847	0.03508	0.02105

La tasa efectiva de llegadas λ_{ef}, se puede calcular si se observa el esquema de la figura 17.5, donde los clientes llegan desde la fuente con la frecuencia λ automóviles por hora. Un auto que llega puede entrar al estacionamiento o irse a otro lado, con las frecuencias respectivas λ_{ef} o $\lambda_{perdido}$, lo que significa que $\lambda = \lambda_{ef} + \lambda_{perdido}$. Un automóvil no podrá entrar al estacionamiento si ya están 8 automóviles en él. Eso quiere decir que la proporción de vehículos que *no* pueden entrar al lote es p_8. Entonces,

$$\lambda_{perdido} = \lambda p_8 = 6 \times 0.02105 = 0.1263 \text{ automóviles por hora}$$

$$\lambda_{ef} = \lambda - \lambda_{perdido} = 6 - 0.1263 = 5.737 \text{ automóviles por hora}$$

La cantidad promedio de vehículos en el estacionamiento (los que esperan o los que ocupan un cajón) es igual a L_s, la cantidad promedio en el sistema. Se puede calcular L_s a partir de p_n como sigue:

$$L_s = 0p_0 + 1p_1 + \cdots + 8p_8 = 3.1286 \text{ automóviles}$$

Un automóvil que espera en los cajones provisionales en realidad es uno en una línea de espera. Entonces, su tiempo de espera a que haya un cajón vacío es W_q. Para determinar W_q se usará la ecuación

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Así,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}} = \frac{3.1286}{5.8737} = 0.53265 \text{ hora}$$

$$W_q = 0.53265 - \frac{1}{2} = 0.03265 \text{ hora}$$

La cantidad promedio de cajones ocupados es la misma que la cantidad promedio de servidores ocupados,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = \frac{5.8737}{2} = 2.9368 \text{ cajones}$$

De $\bar{c}$, se obtiene

$$\text{Utilización de cajones} = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{2.9368}{5} = 0.58736$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6A

1. En el ejemplo 17.6-1, haga lo siguiente:
   a) Calcule L_q en forma directa con la fórmula $\sum_{n=c+1}^{\infty}(n - c)p_n$.
   b) Calcule W_s a partir de L_q.
   c) Calcule la cantidad promedio de automóviles que no podrán entrar al estacionamiento durante un periodo de 8 horas.
   d) Demuestre que la cantidad promedio de cajones vacíos es igual a $\sum_{n=0}^{c-1}(c - n)p_n$.
2. Resuelva el ejemplo 17.6 con los datos siguientes: cantidad de cajones de estacionamiento = 6, cantidad de espacios provisionales = 4, $\lambda = 10$ automóviles por hora y tiempo aproximado de estacionamiento = 45 minutos.

17.6.2 Modelos con un servidor

En esta sección se presentan dos modelos para el caso en que hay un solo servidor ($c = 1$). En el primer modelo no se establece límite para la cantidad máxima en el sistema, y en el segundo se supone un límite finito del sistema. Ambos modelos suponen una fuente de capacidad infinita. Las llegadas suceden con la frecuencia de λ clientes por unidad de tiempo, y la tasa de servicio es μ clientes por unidad de tiempo.

Los resultados de los dos modelos (y en realidad de todos los modelos restantes de la sección 17.6) se deducen como casos especiales del modelo generalizado de la sección 17.5.

Se usará la notación de Kendall para resumir las características de cada caso. Como las deducciones de p_n en la sección 17.5 y de todas las medidas de desempeño en la sección 17.6.1 son totalmente independientes de determinada disciplina de cola, se usará el símbolo DG (disciplina general) con la notación.

$(M/M/1) : (DG/\infty/\infty)$. Con la notación del modelo generalizado se tiene que

$$\left.\begin{matrix}\lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu\end{matrix}\right\}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

También, $\lambda_{ef} = \lambda$ y $\lambda_{perdido} = 0$, porque todos los clientes que llegan pueden entrar al sistema.

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, la ecuación de p_n en el modelo generalizado se reduce entonces a

$$p_n = \rho^n p_0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para determinar el valor de p_0 se usa la identidad

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = 1$$

Suponiendo que $\rho < 1$, la serie geométrica tiene la suma finita $\left(\frac{1}{1 - \rho}\right)$, y entonces

$$p_0 = 1 - \rho, \text{ siempre que } \rho < 1$$

La fórmula general de p_n es entonces la de la siguiente distribución geométrica:

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n,\ n = 1, 2, \ldots\ (\rho < 1)$$

La deducción matemática de p_n impone la condición que $\rho < 1$ o que $\lambda < \mu$. Si $\lambda \geq \mu$, la serie geométrica no converge, y no existirán las probabilidades p_n de estado estable. Este resultado tiene sentido, intuitivamente, porque a menos que la tasa de servicio sea mayor que la frecuencia de llegada, la cola crece en forma indefinida.

La medida de desempeño L_q se puede deducir como sigue:

$$\begin{aligned} L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1 - \rho}\right) = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$

Como $\lambda_{ef} = \lambda$ para este caso, las medidas restantes de desempeño se calculan con las ecuaciones de la sección 17.6.1. Así,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$\bar{c} = L_s - L_q = \rho$$

Ejemplo 17.6-2

Lavado Automata para automóviles funciona sólo con un lugar. Los autos llegan siguiendo una distribución de Poisson, con 4 autos por hora, que pueden esperar en el estacionamiento de la instalación, si el lugar de lavado está ocupado. El tiempo para lavar y limpiar un automóvil es exponencial, con 10 minutos de promedio. Los automóviles que no se pueden estacionar en la instalación pueden esperar en el arrollo junto al lavado. Eso quiere decir que para todo fin práctico no hay límite del tamaño del sistema. El gerente de la instalación desea determinar el tamaño del estacionamiento.

Para este caso, $\lambda = 4$ automóviles por hora y $\mu = \frac{60}{10} = 6$ automóviles por hora. Como $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, el sistema puede funcionar en condiciones de estado estable.

Los datos de este modelo para TORA son

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
4	6	1	infinito	infinito

En la figura 17.6 se ven los resultados de este problema.

Estos resultados indican que la cantidad promedio de automóviles en la cola, L_q, es 1.33. No recomendamos usar L_q como única base para determinar los cajones de estacionamiento, porque el diseño debe reflejar, hasta cierto punto, la longitud máxima posible de la cola. Por

```
Title: Example 17.6-2, Figure 17.6
Scenario1: (M/M/1):(GD/infinity/infinity)
```

Lambda =	4.00000	Mu =	6.00000
Lambda eff =	4.00000	Rho/c =	0.66667
Ls =	2.00000	Lq =	1.33333
Ws =	0.50000	Wq =	0.33333

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.33333	0.33333	13	0.00171	0.99657
1	0.22222	0.55556	14	0.00114	0.99772
2	0.14815	0.70370	15	0.00076	0.99848
3	0.09877	0.80247	16	0.00051	0.99899
4	0.06584	0.86831	17	0.00034	0.99932
5	0.04390	0.91221	18	0.00023	0.99955
6	0.02926	0.94147	19	0.00015	0.99970
7	0.01951	0.96098	20	0.00010	0.99980
8	0.01301	0.97399	21	0.00007	0.99987
9	0.00867	0.98266	22	0.00004	0.99991
10	0.00578	0.98844	23	0.00003	0.99994
11	0.00385	0.99229	24	0.00002	0.99996
12	0.00257	0.99486	25	0.00001	0.99997

FIGURA 17.6

Resultados del ejemplo 17.6-2 obtenidos con TORA

ejemplo, podrá ser más factible diseñar el estacionamiento de tal modo que un automóvil que llegue encuentre lugar al menos el 90% de las veces.

Sea K la cantidad de cajones de estacionamiento. Tener K cajones equivale a tener $K + 1$ lugares en el *sistema* (en la cola y en el lugar de lavado). Un automóvil que llega encontrará un cajón el 90% de las veces si hay *cuando mucho* K automóviles en el sistema. Esta condición equivale al siguiente enunciado de probabilidades:

$$p_0 + p_1 + \ldots p_K \geq 0.9$$

En la figura 17.6 se ve que los valores *acumulados* de p_n son 0.86831 y 0.91221 para $n = 4$ y $n = 5$, respectivamente. Eso quiere decir que la condición se satisface con $K \geq 5$ cajones de estacionamiento.

La cantidad K de espacios también se puede determinar usando la definición matemática de p_n, esto es,

$$(1 - \rho)(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^K) \geq 0.9$$

La suma de la serie geométrica truncada es igual a $\frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho}$. Entonces, la condición se reduce a

$$(1 - \rho^{K+1}) \geq 0.9$$

Al simplificar la desigualdad se obtiene

$$\rho^{K+1} \leq 0.1$$

Se sacan logaritmos de ambos lados para obtener

$$K \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln\left(\frac{4}{6}\right)} - 1 = 4.679 \approx 5$$

En consecuencia, $K \geq 5$ cajones de estacionamiento.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6B

1. En el ejemplo 17.6-2, haga lo siguiente.
   a) Determine la utilización porcentual del lavador de automóviles.
   b) Determine la probabilidad de que un automóvil que llega deba esperar en el estacionamiento para ser lavado.
   c) Si hay siete cajones de estacionamiento, determine la probabilidad de que un automóvil que llegue encuentre un cajón vacío.
   d) ¿Cuántos cajones de estacionamiento debe haber para que un automóvil que llegue encuentre lugar para estacionarse el 99% de las veces?

2. John Macko es alumno en la U de Ozark. Hace trabajos extraños para aumentar sus ingresos. Las peticiones de trabajo llegan en promedio cada 5 días, pero el tiempo entre ellas es exponencial. El tiempo para terminar un trabajo también es exponencial, con una media de 4 días.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que le falte trabajo a John?
   b) Si John cobra unos $50 por cada trabajo, ¿cuál es su ingreso mensual promedio?
   c) Si al final del semestre John decide subcontratar los trabajos pendientes a $40 cada uno, ¿cuánto debe esperar pagar en promedio?

3. A través de los años, el detective Columbo, del Departamento de Policía de Fayetteville, ha tenido un éxito fenomenal en la solución de cada caso que se le presenta. Sólo es cuestión de tiempo para que pueda resolver cualquier caso. Columbo admite que el tiempo en cada caso es "totalmente aleatorio", pero en promedio cada investigación dura aproximadamente semana y media. Los delitos en la tranquila Fayetteville no son muy comunes. Suceden al azar, con una frecuencia de uno por mes (4 semanas). Columbo pide un ayudante con quien compartir la pesada carga de trabajo. Analice la petición de Columbo, en particular desde los siguientes puntos de vista:
   a) La cantidad promedio de casos que esperan ser investigados.
   b) El porcentaje de tiempo en el que está ocupado el detective.
   c) El tiempo necesario para resolver un caso.

4. A la caseta de cobro del túnel Lincoln llegan automóviles siguiendo una distribución de Poisson, con promedio de 90 por hora. El tiempo para pasar la caseta es exponencial, con promedio de 38 segundos. Los automovilistas se quejan del largo tiempo de espera, y las autoridades desean reducir el tiempo de paso promedio a 30 segundos, instalando dispositivos de cobro automático, siempre y cuando se satisfagan dos condiciones: 1) que la cantidad promedio de automóviles formado en el sistema actual sea mayor que 5, y 2) que el porcentaje del tiempo sin trabajo en la caseta, con el nuevo dispositivo, no sea mayor que el 10%. ¿Se puede justificar el dispositivo?

5. Un restaurante de comida rápida tiene ventanilla de servicio para automovilistas. Los vehículos llegan de acuerdo con una distribución de Poisson, con una frecuencia de 2 cada 5 minutos. En el espacio frente a la ventanilla pueden caber 10 vehículos cuando mucho, incluyendo al que se está sirviendo. Si es necesario, otros automóviles pueden esperar fuera de este espacio. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 1.5 minutos. Calcule lo siguiente:
   a) La probabilidad de que la instalación esté vacía.
   b) La cantidad estimada de clientes esperando que los atiendan.

c) El tiempo estimado de espera para que un cliente llegue a la ventanilla y haga su pedido.

d) La probabilidad de que la línea de espera sea mayor que la capacidad de 10 lugares.

6. Los clientes llegan en automóvil a una ventanilla bancaria de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 10 por hora. El tiempo de servicio a cada cliente es exponencial, con una media de 5 minutos. Hay tres espacios frente a la ventanilla, incluyendo el del automóvil que es atendido. Si llegan más vehículos, deben esperar fuera de este espacio para 3 vehículos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil que llega pueda entrar en uno de los 3 espacios disponibles?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil que llega deba esperar fuera de los 3 espacios?

c) ¿Cuánto tiempo debe esperar un cliente que llegue para que comiencen a atenderlo?

d) ¿Cuántos cajones debería haber frente a la ventanilla (incluyendo el del automóvil que está siendo atendido) para que un automóvil que llegue encuentre espacio cuando menos el 90% de las veces?

7. En la cola $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$, describa un argumento plausible de por qué en general L_s no es igual a $L_q + 1$. ¿Bajo qué condición será válida la igualdad?

8. Para la cola $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$, deduzca la ecuación de L_q, usando la definición básica $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p_n$.

9. Para la cola $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$, demuestre que

a) El número esperado en la cola es $=\frac{1}{(1-\rho)}$ si la cola no está vacía.

b) El tiempo estimado de espera en la cola, para quienes deben esperar, es $=(\frac{1}{\mu-\lambda})$.

Distribución del tiempo de espera para $(M/M/1):(PLPS/\infty/\infty)$.[1] La deducción de p_n en el modelo generalizado de la sección 17.5 es *totalmente* independiente de la disciplina de la cola. Esto quiere decir que las medidas promedio de desempeño, W_w, W_q, L_s y L_q, se aplican a todas las disciplinas de cola.

Aunque el tiempo *promedio* de espera es independiente de la disciplina de la cola, su función de densidad de probabilidades depende de esa disciplina. Ilustraremos esto deduciendo la distribución del tiempo de espera para el modelo $(M/M/1)$ basado en la disciplina PLPS (primero en llegar, primero en servir).

Sea τ la cantidad de tiempo que una persona que *justo está llegando* debe permanecer en el *sistema* (es decir, hasta que se termine el servicio). Con base en la disciplina PLPS, si hay n clientes en el sistema, antes del cliente que está llegando, entonces

$$\tau = t_1' + t_2 + \dots + t_{n+1}$$

en donde t_1' es el tiempo necesario para que el cliente que esté en el servicio en ese momento salga, y $t_2, t_3, \ldots, t_n$ son los tiempos de servicio para $n-1$ clientes en la cola. El tiempo t_{n+1} representa el tiempo de servicio para el cliente que llega.

Definiremos a $w(\tau|n+1)$ como la función de densidad condicional de τ, dados n clientes en el servicio antes del cliente que llega. Como la distribución del tiempo de servicio es exponencial, la propiedad de amnesia (Sección 17.3) indica que t_1' también es exponencial, con la misma distribución. Así, τ es la suma de $n+1$ variables aleatorias exponenciales, idénticamente distribuidas e independientes. Según la teoría de las probabilidades, $w(\tau|n+1)$ tiene una distribución gamma, con parámetros μ y $n+1$. Entonces,

[1]Este material se puede saltar sin pérdida de continuidad.

$$
\begin{aligned}
w(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} w(\tau|n+1)p_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu\tau)^n e^{-\mu\tau}}{n!}(1-\rho)\rho^n \\
&= (1-\rho)\mu e^{-\mu\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \\
&= (1-\rho)\mu e^{-\mu\tau} e^{\lambda\tau} \\
&= (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)\tau}, \ \tau > 0
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, $w(\tau)$ es una distribución exponencial con media $W_s = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$.

Ejemplo 17.6-3

En el modelo del lavado de autos del ejemplo 17.6-2, es razonable suponer que se hace ese servicio con base en una disciplina PLPS. Evaluar la fiabilidad (la "confiabilidad") de usar W_s como estimado del tiempo de espera en el sistema.

Una forma de contestar esto es estimar la proporción de clientes cuyo tiempo de espera es mayor que W_s. Ya que $W_s = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
P\{\tau > W_s\} &= 1 - \int_0^{W_s} w(\tau)d\tau \\
&= e^{-(\mu-\lambda)W_s} = e^{-1} = 0.368
\end{aligned}
$$

Así, con la disciplina PLPS, 37% de los clientes esperarán más que W_s. Esto parece demasiado, en especial porque el W_s actual para el lavado de autos ya es alto (0.5 hora). Se nota que la probabilidad calculada ($= e^{-1} \approx 0.368$) es independiente de las tasas λ y μ para cualquier sistema $(M/M/1) : (PLPS/\infty/\infty)$, lo cual significa que no se puede reducir su valor. Así, si se diseña el sistema con base en el W_s promedio, se debe esperar que el 36.8% de los clientes deban esperar más que el tiempo promedio de espera.

La situación puede mejorarse de dos maneras: 1) se puede aumentar la tasa de servicio μ, para bajar el valor de W_s a un nivel aceptable, o bien 2) se puede seleccionar la rapidez de servicio tal que la probabilidad de que el tiempo de espera sea mayor que un valor especificado (por ejemplo 10 minutos) sea menor que un porcentaje razonablemente pequeño (por ejemplo 10%). El primer método equivale a determinar μ tal que $W_s < \overline{T}$, y el segundo determinaría a μ resolviendo la desigualdad $P\{\tau > \overline{T}\} < \alpha$, donde el usuario especifica a $\overline{T}$ y α.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6C

1. En el problema 3, conjunto de problemas 17.6b, determine la probabilidad de que el detective Columbo tarde más de 1 semana para resolver un caso criminal.
2. En el ejemplo 17.6-3 calcule lo siguiente:
   a) La desviación estándar del tiempo de espera τ en el sistema.
   b) La probabilidad de que el tiempo de espera en el sistema varíe la mitad de una desviación estándar respecto al valor promedio.

3. En el ejemplo 17.6-3 determine la tasa de servicio μ que satisfaga la condición $W_s < 10$ minutos.

4. En el ejemplo 17.6-3 determine la tasa de servicio μ que satisfaga la condición $P\{\tau > 10 \text{ minutos}\} < 0.1$.

5. En el problema 5, conjunto de problemas 17.6b, para atraer más clientes, el propietario del restaurante da bebida gratis al cliente que espere más de 5 minutos. Como una bebida cuesta 50 ¢, ¿cuánto le costarán diariamente esas bebidas? Suponga que el restaurante abre 12 horas diarias.

6. Demuestre que para la cola $(M/M/1) : (PLPS/\infty/\infty)$, la distribución del tiempo de espera en la cola es

$$w_q(t) = \begin{cases} 1 - \rho, & t = 0 \\ \mu\rho(1 - \rho)e^{-(\mu-\lambda)t}, & t > 0 \end{cases}$$

A continuación determine W_q a partir de $w_q(t)$.

$(\boldsymbol{M/M/1}) : (\boldsymbol{DG/N/\infty})$**.** Este modelo difiere del $(M/M/1) : (DG/\infty/\infty)$ en que hay un límite N para la cantidad de clientes en el sistema (longitud máxima de la cola $= N - 1$). Entre los ejemplos de este caso están los de manufactura en donde una máquina puede tener un área limitada de reserva y una ventana de servicio para un carril de autos, en un restaurante de comida rápida.

Cuando la cantidad de clientes en el sistema llega a N no se permiten más llegadas, y entonces

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, \ldots, N - 1 \\ 0, & n = N, N + 1, \ldots \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, n = 0, 1, \ldots$$

Sea $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, entonces el modelo generalizado de la sección 17.5 da como resultado

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0, & n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

El valor de p_0 se determina con la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, y resulta

$$p_0(1 + \rho + p^2 + \ldots + \rho^N) = 1$$

o sea

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N + 1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Así,

$$p_n = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N + 1}, & \rho = 1 \end{array} \right\}, \; n = 0, 1, \ldots, N$$

El valor de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ *no* necesita ser menor que 1 en este modelo, porque las llegadas al sistema están controladas por el límite N del mismo. Esto quiere decir que la rapidez que importa en

este caso es λ_{ef} y no λ. Como los clientes se pierden cuando hay N en el sistema, entonces, como se ve en la figura 17.5,

$$\lambda_{\text{perdido}} = \lambda p_N$$
$$\lambda_{ef} = \lambda - \lambda_{\text{perdido}} = \lambda(1 - p_N)$$

En este caso, $\lambda_{ef} < \mu$.

La cantidad esperada de clientes en el sistema se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
L_s &= \sum_{n=0}^{N} np_n \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\sum_{n=0}^{N} n\rho^n \\
&= \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{N}\rho^n \\
&= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{N+1}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right) \\
&= \frac{\rho[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})},\ \rho \neq 1
\end{aligned}$$

Cuando $\rho = 1$, $L_s = \frac{N}{2}$ (¡compruébelo!). Se pueden obtener W_s, W_q y L_q a partir de L_s usando λ_{ef} como se indicó en la sección 17.6.1.

En el mejor de los casos, el uso de una calculadora de bolsillo para calcular las fórmulas de colas es tedioso (¡las fórmulas se harán más complicados en los modelos más adelante!). Por ello se recomienda usar TORA (o la plantilla ch17PoissonQueues.xls de Excel).

Ejemplo 17.6-4

En la instalación del lavado de autos del ejemplo 17.6-2, suponga que tiene un total de cuatro cajones de estacionamiento. Si el estacionamiento se llena, los automóviles que lleguen se van a otro lado. El propietario desea determinar el impacto que tiene el espacio limitado de estacionamiento sobre la ida de sus clientes a la competencia.

En términos de la notación del modelo, el límite del sistema es $N = 4 + 1 = 5$. Entonces, los datos de TORA son los siguientes:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
4	6	1	5	infinito

La figura 17.7 muestra los resultados obtenidos con TORA.

Como el límite del sistema es $N = 5$, la proporción de clientes perdidos es $p_5 = 0.04812$ que, con base en un día de 24 horas, equivale a perder $(\lambda P_5) \times 24 = 4 \times 0.04812 \times 24 = 4.62$ automóviles por día. La decisión de aumentar el tamaño del estacionamiento se debería basar en el valor de los clientes perdidos.

```
Title: Example 17.6-4, Figure 17.7
Scenario 1:(M/M/1):(GD/5/infinity)
```

Lambda =	4.00000	Mu =	6.00000
Lambda eff =	3.80752	Rho/c =	0.66667
Ls =	1.42256	Lq =	0.78797
Ws =	0.37362	Wq =	0.20695

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.36541	0.36541	3	0.10827	0.87970
1	0.24361	0.60902	4	0.07218	0.95188
2	0.16241	0.77143	5	0.04812	1.00000

FIGURA 17.7

Resultados de TORA para el ejemplo 17.6-4

Viendo el problema desde un ángulo distinto, el tiempo total esperado en el sistema, W_s, es 0.3736 hora, unos 22 minutos, que es menos de los 30 minutos en el ejemplo 17.6-3, cuando todos los automóviles que llegan se unen al sistema. Esta reducción de 25% se obtiene a expensas de perder aproximadamente el 4.8% de todos los clientes potenciales, debido al espacio limitado de estacionamiento.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6D

1. En el ejemplo 17.6-4, determine lo siguiente:

a) La probabilidad de que un automóvil que llegue pase de inmediato al lavado.

b) El tiempo estimado de espera para que se inicie un servicio.

c) Cantidad esperada de cajones de estacionamiento vacíos.

d) Probabilidad de que estén ocupados todos los cajones de estacionamiento.

e) El porcentaje de reducción en el tiempo promedio de servicio que limite el tiempo promedio en el sistema a unos 10 minutos. (*Sugerencia:* use tanteos con TORA.)

2. En el ejemplo del lavado de autos del ejemplo 17.6-4, determine la cantidad de cajones de estacionamiento tal que el porcentaje de automóviles que no puedan encontrar espacio no sea mayor que el 1 por ciento.

3. El tiempo en que Joe el peluquero hace un corte de cabello es exponencial, con un promedio de 12 minutos. Por su popularidad, los clientes suelen llegar (siguiendo una distribución de Poisson) con una frecuencia mucho mayor que la que puede atender: 6 por hora. En realidad, Joe se sentiría mejor si la frecuencia de llegada se redujera a unos 4 clientes por hora. Para lograrlo, se le ocurrió la idea de limitar los asientos en la zona de espera, para que los clientes que lleguen se vayan a otro lado cuando todos los asientos estén ocupados. ¿Cuántos asientos debe haber en su peluquería para lograr esta meta?

4. El ensamble final de los generadores eléctricos se produce, en Electro, con una frecuencia de Poisson de 10 por hora. A continuación pasan a una banda y al departamento de inspección, para su prueba final. La banda puede dar cabida a un máximo de 7 generadores. Un sensor electrónico detiene en forma automática al transportador cuando se llena, evitando que el departamento de ensamble final arme más generadores, hasta que haya un espacio disponible. El tiempo para inspeccionar los generadores es exponencial, con una media de 15 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el departamento de ensamble final pare la producción?

b) ¿Cuál es la cantidad promedio de generadores en la banda transportadora?

c) El ingeniero de producción dice que se pueden reducir las interrupciones en el departamento de ensamble si se aumenta la capacidad de la banda. De hecho, dice que se puede aumentar la capacidad hasta el punto en el que el departamento de ensamble pueda trabajar el 95% del tiempo sin interrupciones. ¿Se justifica su afirmación?

5. En una cafetería puede sentarse un máximo de 50 personas. Los clientes llegan en una corriente de Poisson con una frecuencia de 10 por hora, y son servidos, uno por uno, con una rapidez de 12 por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llegue no entre a la cafetería porque esté llena?

b) Suponga que a tres clientes (con tiempos aleatorios de llegada) les gustaría sentarse juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que se les pueda dar ese gusto? (Suponga que pueden hacerse los arreglos para que se sienten juntos siempre que haya tres asientos disponibles.)

6. Los pacientes llegan al consultorio de un doctor siguiendo una distribución de Poisson, con la frecuencia de 20 pacientes por hora. La sala de espera no tiene lugar más que para 14 pacientes. El tiempo de consulta por paciente es exponencial, con promedio de 8 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no espere un paciente que llega?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llega encuentre un asiento vacío en la sala?

c) ¿Cuál es el tiempo total esperado que pasa un paciente en el consultorio?

7. Las probabilidades p_n de que haya n clientes en un sistema $(M/M/1):(DG/5/\infty)$ se ven en la tabla siguiente:

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0.399	0.249	0.156	0.097	0.061	0.038

La frecuencia de llegada λ es 5 clientes por hora. La rapidez del servicio μ es 8 clientes por hora. Calcule lo siguiente:

a) La probabilidad de que un cliente que llega pueda entrar al sistema.

b) La frecuencia con la que los clientes que llegan no pueden entrar al sistema.

c) La cantidad esperada en el sistema.

d) El tiempo promedio de espera en la cola.

8. Demuestre que cuando $\rho = 1$ pera el sistema $(M/M/1):(DG/N/\infty)$la cantidad esperada en el sistema, L_s, es igual a $\frac{N}{2}$. (*Sugerencia:* $1 + 2 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2}$.)

9. Demuestre que λ_{ef}, para el sistema $(M/M/1):(DG/N/\infty)$ se puede calcular con la ecuación

$$\lambda_{ef} = \mu(L_s - L_q)$$

17.6.3 Modelos con varios servidores

En esta sección se estudiarán tres modelos de cola con varios servidores en paralelo. Los dos primeros son las versiones de los de la sección 17.6.2, con varios servidores. El tercer modelo describe el caso del autoservicio, que equivale a tener una cantidad infinita de servidores en paralelo.

$(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$. En este modelo hay c servidores en paralelo. La frecuencia de llegadas es λ y la rapidez de servicio es μ por servidor. Como no hay límite de cantidad en el sistema, $\lambda_{ef} = \lambda$.

El efecto de usar c servidores en paralelo es un aumento en la tasa de servicio de la instalación proporcional a c. En términos del modelo generalizado (Sección 17.5), λ_n y μ_n se definen entonces como sigue:

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Entonces,

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\cdots(n\mu)} p_0 = \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & n < c \\ \dfrac{\lambda^n}{(\prod_{i=1}^{c} i\mu)(c\mu)^{n-c}} p_0 = \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} p_0 = \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0, & n \geq c \end{cases}$$

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, y suponiendo que $\frac{\rho}{c} < 1$, el valor de p_0 se determina con $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, lo que resulta en

$$p_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right\}^{-1}, \ \frac{\rho}{c} < 1$$

Se puede determinar como sigue la ecuación para L_q:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) p_n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k p_{k+c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c^k c!} p_0$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} p_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} p_0 \frac{d}{d(\frac{\rho}{c})} \sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{\rho}{c})^k$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{(c - 1)!(c - \rho)^2} p_0$$

Como $\lambda_{ef} = \lambda$, entonces $L_s = L_q + \rho$. Los valores de W_s y W_q se pueden determinar dividiendo L_s y L_q entre λ.

Ejemplo 17.6-5

Hay dos empresas de taxis que dan servicio a una población. Cada empresa es dueña de dos taxis, y se sabe que las dos empresas comparten partes iguales del mercado. Esto se ve porque llegan ocho llamadas por hora a la oficina de cada empresa. El tiempo promedio en el viaje es

de 12 minutos. Las llamadas llegan siguiendo una distribución de Poisson, y el tiempo de viaje es exponencial. Hace poco, un inversionista compró las dos empresas, y le interesa consolidarlas en una sola oficina para dar mejor servicio a los clientes. Analice la propuesta del nuevo dueño.

Desde el punto de vista de las colas, los taxis son los servidores y el viaje es el servicio. Se puede representar a cada empresa con el modelo $(M/M/2):(DG/N/\infty/\infty)$ con $\lambda = 8$ llamadas por hora y $\mu = \frac{60}{12} = 5$ viajes *por taxi* por hora. Al consolidarlas, se tendrá el modelo $(M/M/4):(DG/N/\infty/\infty)$ con $\lambda = 2 \times 8 = 16$ llamadas por hora y $\mu = 5$ viajes *por taxi* por hora.

Una medida adecuada para comparar los dos modelos es el tiempo promedio que espera un cliente para un viaje, esto es, W_q. Los datos para el análisis comparativo de TORA son los siguientes:

Escenario	Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
1	8	5	2	infinito	infinito
2	16	5	4	infinito	infinito

En la figura 17.8 se ve el resultado de TORA para los dos escenarios. Los resultados indican que el tiempo de espera para un viaje es 0.356 hora ($\approx$ 21 minutos) para el caso de dos empresas, y 0.149 ($\approx$ 9 minutos) para el caso consolidado; es una notable reducción de más del 50% y una clara evidencia de que se garantiza la consolidación de las dos empresas.

```
Title: Example 17.6-5, Figure 17.8
Comparative analysis
```

c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Ws	Lq	Wq
2	8.000	5.000	8.00	0.110	4.444	0.556	2.844	0.356
4	16.000	5.000	16.00	0.027	5.586	0.349	2.386	0.149

FIGURA 17.8
Resultados del ejemplo 17.6-5 obtenidos con TORA

La conclusión del análisis anterior es que al **unir los servicios** *siempre* se tiene un modo más eficiente de operación. Este resultado es válido si las instalaciones separadas están "muy" ocupadas (véanse los problemas 2 y 10, conjunto de problemas 17.6e).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6E

1. Considere el ejemplo 17.6-5.

a) Demuestre que la notable reducción de más del 50% en el tiempo de espera para el caso consolidado se acopla con un aumento paralelo en el porcentaje de tiempo durante el cual los servidores están ocupados.

b) Calcule la cantidad de taxis que debe tener la empresa consolidada para limitar el tiempo promedio de espera para un viaje a 5 minutos o menos.

2. En el ejemplo de la empresa de taxis, suponga que el tiempo promedio de viaje en realidad es unos 14.5 minutos, por lo que la utilización $\left(= \frac{\lambda}{\mu c}\right)$ con empresas de 2 y 4 taxis aumenta a más de 96%. ¿Todavía vale la pena consolidar las dos empresas en una? Use el tiempo promedio de espera para un viaje como medida de comparación.
3. Calcule la cantidad mínima de servidores en paralelo necesarios en cada uno de los siguientes casos (llegada y salida de Poisson) para garantizar que el funcionamiento de la cola sea estable, es decir, que la longitud de la cola no crezca en forma indefinida:
   a) Los clientes llegan cada 5 minutos, y son servidos a una tasa de 10 clientes por hora.
   b) El tiempo promedio entre llegadas es 2 minutos, y el tiempo promedio de servicio es 6 minutos.
   c) La frecuencia de llegada es 30 clientes por hora, y la rapidez de servicio por servidor es 40 clientes por hora.
4. Llegan clientes al Thrift Bank de acuerdo con una distribución de Poisson, con promedio de 15 por hora. Las transacciones por cliente duran unos 5 minutos, tiempo distribuido exponencialmente. El banco desea tener un funcionamiento de unifila con varios cajeros, parecida a las que se usan en los aeropuertos y las oficinas de correos. El gerente se da cuenta que los clientes pueden ir a otros bancos si les parece que es "excesivo" el tiempo que forman fila. Por esta razón, el gerente desea limitar a no más de 30 segundos el tiempo promedio de espera en la cola. ¿Cuántos cajeros debe tener el banco?
5. El restaurante de comida rápida McBurger tiene 3 cajeros. Los clientes llegan siguiendo una distribución de Poisson cada 3 minutos, y se forman en una cola para ser servidos por el primer cajero disponible. El tiempo para llenar un pedido se distribuye exponencialmente, con 5 minutos de promedio. La sala de espera dentro del restaurante tiene cupo limitado. Sin embargo, la comida es buena, y los clientes están dispuestos a formar una cola fuera del restaurante, en caso necesario. Determine el tamaño de la sala de espera dentro del restaurante (sin tener en cuenta los lugares de los cajeros) tal que la probabilidad de que un cliente que llegue no deba esperar fuera del restaurante, sea cuando menos 0.999.
6. Una pequeña oficina de correos tiene dos ventanillas abiertas. Los clientes llegan siguiendo una distribución de Poisson con la frecuencia de 1 cada 3 minutos. Sin embargo, sólo el 80% de ellos deben ser atendidos en las ventanillas. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con 5 minutos de promedio. Así, ese 80% de los clientes que llegan se forman en una cola y llegan a las ventanillas disponibles en disciplina PLPS.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega deba esperar en la fila?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos ventanillas estén vacías?
   c) ¿Cuál es la longitud promedio de la cola?
   d) ¿Sería posible ofrecer un servicio razonable sólo con una ventanilla? Explique por qué.
7. El centro de cómputo de la U de A tiene cuatro computadoras principales idénticas. La cantidad de usuarios en cualquier momento es de 25. Cada usuario puede solicitar un trabajo por una terminal, cada 15 minutos en promedio, pero el tiempo real entre solicitudes es exponencial. Los trabajos que llegan pasan en forma automática a la primera computadora disponible. El tiempo de ejecución por solicitud es exponencial, con un promedio de 2 minutos. Calcule lo siguiente:
   a) La probabilidad de que un trabajo no se ejecute de inmediato al solicitarlo.
   b) El tiempo promedio en el que el usuario obtiene sus resultados.
   c) La cantidad promedio de trabajos que esperan su procesamiento.
   d) El porcentaje del tiempo durante el cual el centro de cómputo está inactivo.
   e) La cantidad promedio de computadoras ociosas.
8. El Aeropuerto Drake da servicio a pasajeros rurales, suburbanos y en tránsito. La distribución de llegadas de cada uno de los tres grupos es de Poisson, con frecuencias promedio de 15, 10 y 20

pasajeros por hora, respectivamente. El tiempo para documentar un pasajero es exponencial, con 6 minutos de promedio. Determine la cantidad de mostradores que debe haber en Drake, para cada una de las condiciones siguientes:

a) El tiempo promedio total para documentar un pasajero es menos de 15 minutos.

b) El porcentaje de inactividad de los mostradores no debe ser mayor que 10 por ciento.

c) La probabilidad de que todos los mostradores estén ociosos no sea mayor que 0.01.

9. En Estados Unidos, es común el uso de unilíneas con varios servidores en las oficinas de correos, y en los mostradores de documentación de pasajeros en los aeropuertos. Sin embargo, en los supermercados y en los bancos (en especial en poblaciones pequeñas) se tiende a favorecer las configuraciones de unifila y un servidor, a pesar de que la unifila con varios servidores permite tener un funcionamiento más eficiente. Haga comentarios sobre esta observación.

10. Morse (1958, pág. 103) indica que para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$ cuando $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$,

$$L_q = \frac{\rho}{c - \rho}$$

El que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$ quiere decir que los servidores están extremadamente ocupados. Con esta información demuestre que la relación del tiempo promedio de espera en la cola del modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$ entre el correspondiente en el modelo $(M/M/1):(DG/N/\infty/\infty)$ tiende a $\frac{1}{c}$ cuando $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$. Así, para $c = 2$, se puede reducir el tiempo promedio de espera en 50%. La conclusión de este ejercicio es que siempre se aconseja unir los servicios, independientemente de lo "sobrecargado" que puedan estar los servidores.

11. En la deducción de p_n para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$ indique en qué parte de esa deducción se requiere la condición $\frac{\rho}{c} < 1$. Explique, con sus propias palabras, el significado de esa condición. ¿Qué sucederá si no se satisface esa condición?

12. Demuestra que $L_s = L_q + \bar{c}$, partiendo de la definición $L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n - c)p_n$, siendo $\bar{c}$ la cantidad promedio de servidores ocupados. En consecuencia, demuestra que $\bar{c} = \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$.

13. Demuestre que para el modelo $(M/M/1):(DG/N/\infty/\infty)$ se puede obtener p_n a partir de la correspondiente para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$ haciendo que $c = 1$.

14. Demuestre que para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$

$$L_q = \frac{c\rho}{(c - \rho)^2}\, p_c$$

15. Demuestre que para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$

a) La probabilidad de que un cliente esté esperando es $\frac{\rho}{(c - \rho)}\, p_c$.

b) La cantidad promedio en la cola, cuando no está vacía, es $\frac{c}{(c - \rho)}$.

c) El tiempo esperado de espera en la cola, para los clientes que deben esperar, es $\frac{1}{\mu(c - \rho)}$.

16. Demuestre que la función de densidad de probabilidades del tiempo de espera en la cola, para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty/\infty)$ es

$$w_q(T) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\rho^c}{(c - 1)!(c - \rho)}\, p_0, & T = 0 \\[2ex] \dfrac{\mu\rho^c e^{-\mu(c-\rho)T}}{(c - 1)!}\, p_0, & T > 0 \end{cases}$$

(*Sugerencia:* convierta el caso de c canales en un solo canal *equivalente* para el cual

$$P\{t > T\} = P\left\{\min_{1 \le i \le c} t_i > T\right\} = (e^{-\mu T})^c e^{-\mu c T}$$

en donde t es el tiempo de servicio en el canal único equivalente.)

17. Demuestre que para $w_q(T)$ en el problema 16,

$$P\{T > y\} = P\{T > 0\}e^{-(c\mu-\lambda)y}$$

$P\{T > 0\}$ es la probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar.

18. Demuestre que el tiempo de espera en el sistema del modelo $(M/M/c):(PLPS/\infty/\infty)$ tiene la siguiente función densidad de probabilidades:

$$w(\tau) = \mu e^{-\mu\tau} + \frac{\rho^c \mu e^{-\mu\tau}}{(c-1)!(c-\rho-1)}\left\{\frac{1}{c-\rho} - e^{-\mu(c-\rho-1)\tau}\right\}p_0,\ \tau \geq 0$$

(*Sugerencia:* τ es la convolución del tiempo de espera T en la cola [véase el problema 16] y la distribución del tiempo de servicio.)

$(M/M/c):(DG/N/\infty)$, $c \leq N$. Este modelo difiere del $(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$ en que el límite del sistema es finito, igual a N. Eso quiere decir que el tamaño máximo de la cola es $N - c$. Las tasas de llegada y de servicio son λ y μ. La frecuencia efectiva de llegadas λ_{ef} es menor que λ, a causa del límite N del sistema.

En términos del modelo generalizado (Sección 17.5), λ_n y μ_n para el modelo actual se definen como sigue:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n < c \\ c\mu, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

Sustituyendo λ_n y μ_n en la ecuación general de la sección 17.5, y observando que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, se obtiene

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}p_0, & 0 \leq n < c \\ \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}}p_0, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

en donde

$$p_0 = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c\left(1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}\right)}{c!\left(1-\frac{\rho}{c}\right)}\right)^{-1}, & \dfrac{\rho}{c} \neq 1 \\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}(N-c+1)\right)^{-1}, & \dfrac{\rho}{c} = 1 \end{cases}$$

A continuación se calcula L_q para el caso en que $\frac{\rho}{c} \neq 1$ como sigue:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c}^{N}(n-c)p_n \\ &= \sum_{j=0}^{N-c} jp_{j+c} \\ &= \frac{\rho^c\rho}{c!c}\sum_{j=0}^{N-c} j\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1} p_0 \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{cc!} \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{j=0}^{N-c} \left(\tfrac{\rho}{c}\right)^j$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1} - (N-c+1)\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \right\} p_0$$

Se puede demostrar que para $\frac{\rho}{c} = 1,\ L_q$ se reduce a

$$L_q = \frac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!} p_0,\ \frac{\rho}{c} = 1$$

Para determinar W_q, y en consecuencia W_s y L_s, se calcula el valor de λ_{ef} como sigue:

$$\lambda_{perdido} = \lambda p_N$$

$$\lambda_{ef} = \lambda - \lambda_{perdido} = (1 - p_N)\lambda$$

Ejemplo 17.6-6

En el problema de los taxis consolidados del ejemplo 17.6-5 suponga que no se pueden conseguir más fondos para comprar nuevos automóviles. Un amigo aconsejó al dueño que una forma de reducir el tiempo de espera es que la oficina despachadora informe a los clientes nuevos de las demoras excesivas potenciales, una vez que la lista de espera llegue a 6 clientes. Se tiene la seguridad de que con esta medida los clientes nuevos buscarán servicio en otra parte, pero se reducirá el tiempo de espera para los que hay en la lista de espera. Investigar la plausibilidad del consejo del amigo.

Limitar la lista de espera a 6 clientes equivale a hacer que $N = 6 + 4 = 10$ clientes. En consecuencia, se está investigando el modelo $(M/M/4) : (DG/10/\infty)$ en el que $\lambda = 16$ clientes por hora y $\mu = 5$ viajes por hora. Para obtener los resultados del modelo se usan los siguientes datos en TORA:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
16	5	4	10	infinito

En la figura 17.9 se ven los resultados del modelo, obtenidos con TORA.

El tiempo promedio de espera W_q, antes de establecer un límite a la capacidad del sistema, es 0.149 hora (≈ 9 minutos) (véase la figura 17.8), que es más o menos el doble del promedio nuevo de 0.075 hora (≈ 4.5 minutos). Esta notable reducción se logra a expensas de perder aproximadamente el 3.6% de los clientes potenciales ($p_{10} = 0.03574$). Sin embargo, este resultado no refleja la pérdida posible de la buena imagen que los clientes tienen sobre el funcionamiento de la empresa.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6F

1. En el ejemplo 17.6-6, determine lo siguiente:

a) La cantidad esperada de taxis inactivos.

b) La probabilidad de que un cliente que llame ocupe el último lugar de la lista.

c) El límite de la lista de espera, si se desea mantener el tiempo de espera en la cola a menos de 3 minutos.

```
Title: Example 17.6-6, Figure 17.9
Scenario 1: (M/M/4):(GD/10/infinity)
```

Lambda =	16.00000	Mu =	5.00000
Lambda eff =	15.42815	Rho/c =	0.80000
Ls =	4.23984	Lq =	1.15421
Ws =	0.27481	Wq =	0.07481

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.03121	0.03121	6	0.08726	0.79393
1	0.09986	0.13106	7	0.06981	0.86374
2	0.15977	0.29084	8	0.05584	0.91958
3	0.17043	0.46126	9	0.04468	0.96426
4	0.13634	0.59760	10	0.03574	1.00000

FIGURA 17.9

Resultados del ejemplo 17.6-6 obtenidos con TORA

2. Eat & Gas es una gasolinera con dos bombas. El carril que llega a ellas puede dar cabida cuando mucho a cinco automóviles, incluyendo los que llenan el tanque. Los que llegan cuando el carril está lleno van a otra parte. La distribución de los vehículos que llegan es de Poisson, con promedio de 20 por hora. El tiempo para llenar y pagar las compras es exponencial, con 6 minutos de promedio. Determine lo siguiente:

a) El porcentaje de automóviles que llenarán el tanque en otro lado.

b) El porcentaje de tiempo en el que se usa una bomba.

c) La utilización porcentual de las dos bombas.

d) La probabilidad de que un automóvil que llegue no reciba servicio de inmediato, sino que se forme en la cola.

e) La capacidad del carril que asegure que, en promedio, no haya más del 10% de los vehículos que llegan se vayan a otra parte.

f) La capacidad del carril que asegure que, en promedio, la probabilidad de que las dos bombas estén inactivas sea 0.05 o menos.

3. Un pequeño taller de ajuste de motores ocupa a tres mecánicos. A principios de marzo de cada año, las personas llevan al taller las segadoras y podadoras para que reciban mantenimiento. El taller quiere aceptar todas las segadoras y podadoras que le lleven. Sin embargo, cuando los clientes que llegan ven que el piso del taller está cubierto con trabajos en espera, van a otra parte para recibir un servicio más inmediato. El piso del taller puede dar cabida cuando mucho a 15 segadoras o podadoras, además de las que reciben el servicio. Los clientes llegan al taller cada 15 minutos en promedio, y un mecánico tarda un promedio de 30 minutos en terminar cada trabajo. El tiempo entre llegadas y el tiempo de servicio tienen distribución exponencial. Determine lo siguiente:

a) Cantidad promedio de mecánicos sin trabajo.

b) Porción del trabajo que va a la competencia en un día de 10 horas, por la capacidad limitada del taller.

c) La probabilidad de que el siguiente cliente que llegue reciba servicio.

d) La probabilidad de que al menos un mecánico esté sin trabajo.

e) La cantidad promedio de segadoras o podadoras que esperan servicio.

f) Mida la productividad total del taller.

4. Los alumnos de primer ingreso en la U de A se caracterizan, porque tratan de llegar a clase en automóvil (aunque la mayor parte de ellos viven en el campus, y pueden usar cómodamente el sistema de transporte gratuito de la universidad). Durante el primer par de semanas del semestre de otoño, en el campus prevalece una confusión de tráfico porque los alumnos tratan desesperadamente encontrar cajones de estacionamiento. Con una dedicación extraordinaria, esperan pacientemente en los carriles del estacionamiento a que alguien salga, para poder estacionarse. Imaginemos el siguiente escenario específico: el estacionamiento tiene 30 cajones, pero también pueden caber 10 automóviles más en los carriles. Esos 10 automóviles adicionales no se pueden estacionar en forma permanente en los carriles, y deben esperar que haya disponible uno de los 30 cajones de estacionamiento. Los alumnos de ingreso reciente llegan al estacionamiento siguiendo una distribución de Poisson, con 20 por hora de promedio. El tiempo de estacionamiento por automóvil es de 60 minutos en promedio, pero en realidad tiene una distribución exponencial.

a) ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que se salen por no caber en el estacionamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil que llegue espere en los carriles?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil que llegue ocupe el único cajón vacío en el estacionamiento?

d) Calcule la cantidad promedio de cajones ocupados.

e) Calcule la cantidad promedio de espacios ocupados en los carriles.

f) Calcule la cantidad de alumnos que no llegan a clase durante un periodo de 8 horas porque el estacionamiento está totalmente lleno.

5. Verifique la ecuación de p_0 en el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty)$ cuando $\frac{\rho}{c} \neq 1$.

6. Demuestre que para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty)$,

$$\lambda_{ef} = \mu\bar{c}$$

en donde $\bar{c}$ es la cantidad de servidores ocupados.

7. Verifique la ecuación de p_0 y L_q para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty)$ cuando $\frac{\rho}{c} = 1$.

8. Defina, para el modelo $(M/M/c):(DG/N/\infty)$ en el que $N = c$, λ_n y μ_n en términos del modelo generalizado (Sección 17.5) y a continuación demuestre que la ecuación de p_n es

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,\ n = 1, 2, \ldots, c$$

en donde

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{c}\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

Modelo de autoservicio — $(M/M/\infty):(DG/N/\infty)$. En este modelo, la cantidad de servidores es ilimitada, porque el cliente también es el servidor. Un ejemplo característico es hacer la parte escrita de la prueba de manejo para obtener licencia. Las gasolineras de autoservicio y los cajeros automáticos no caen en la descripción de este modelo, porque en esos casos los servidores son las bombas de gasolina y los cajeros. En el modelo se supone una llegada continua, con las tasas de servicio λ y μ, respectivamente.

En términos del modelo generalizado de la sección 17.5,

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\mu_n = n\mu, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Así,

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, entonces

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots} = \frac{1}{e^\rho} = e^{-\rho}$$

El resultado es

$$p_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

que es de Poisson con promedio $L_s = \rho$. Como era de esperar, $L_q = W_q = 0$, porque es un modelo de autoservicio.

Ejemplo 17.6-7

Un inversionista coloca $1000 mensuales en ciertos títulos en el mercado de valores. Como debe esperar una buena oportunidad de "compra", el tiempo real de la compra es totalmente independiente. El inversionista suele conservar los títulos durante un promedio de 3 años, pero los vende al azar cuando se presenta la oportunidad de "vender". Aunque en general se reconoce al inversionista como hábil en el manejo de valores, la experiencia indica que 25% de los títulos bajan más o menos el 20% anual. El 75% restante se aprecian con una rapidez aproximada de 12% por año. Calcule el desempeño promedio (a largo plazo) del inversionista en el mercado de valores.

Esta situación se puede considerar como modelo $(M/M/\infty) : (DG/\infty/\infty)$ porque, para todo fin práctico, el inversionista no debe hacer cola para comprar o vender sus valores. El tiempo promedio entre colocaciones de compra es 1 mes, que equivale a $\lambda = 12$ títulos por año. La rapidez de venta de los valores es $\mu = \frac{1}{3}$ de título por año. Se puede calcular los resultados del modelo con los siguientes datos a TORA:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de fuente
12	0.3333333	infinito	infinito	infinito

Para los valores de λ y μ, se obtiene

$$L_s = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 36 \text{ títulos}$$

El estimado del promedio *anual* (a largo plazo) del valor neto para el inversionista es

$$(0.25L_s \times \$1000)(1 - 0.20) + (0.75L_s \times \$1000)(1 + 0.12) = \$37{,}440$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6G

1. En el ejemplo 17.6-7, calcule lo siguiente:

a) La probabilidad de que el inversionista venda todo.

b) La probabilidad de que el inversionista sea propietario de más de 10 títulos.

c) La probabilidad de que el inversionista posea entre 10 y 40 títulos, inclusive.

d) El patrimonio anual neto del inversionista, si sólo el 10% de los títulos se deprecian al 30% anual, y el 90% restante se aprecian 15% al año.

2. A los conductores nuevos se les pide pasar un examen por escrito, antes de hacer las pruebas de manejo. Los exámenes escritos suelen hacerse en el departamento de policía de la ciudad. Los registros de la ciudad de Springdale indican que la cantidad promedio de exámenes escritos es de 100 por día de 8 horas. El tiempo necesario para contestar el examen es de 30 minutos, más o menos. Sin embargo, la llegada real de los aspirantes y el tiempo que tarda cada uno en contestar son totalmente aleatorios. Determine lo siguiente:

a) La cantidad promedio de asientos que debe tener el departamento de policía en el salón de exámenes.

b) La probabilidad de que los aspirantes rebasen la cantidad promedio de asientos que hay en el salón de exámenes.

c) La probabilidad de que en un día no se haga examen alguno.

3. Demuestre (usando TORA) que para $\rho = 0.1$, que es pequeña, los valores de W_s, L_s, W_q y p_n para el modelo $(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$ se pueden estimar de modo fiable con las fórmulas, menos tediosas, del modelo $(M/M/\infty):(DG/\infty/\infty)$ cuando c es tan pequeño como 4 servidores.

4. Repita el problema 3 para $\rho = 9$, y demuestre que es válida la misma conclusión, pero que el valor mínimo de c debe ser mayor (alrededor de 20). A partir de los resultados de los problemas 3 y 4, ¿a qué conclusión general se puede llegar acerca del uso del modelo $(M/M/\infty):(DG/\infty/\infty)$ para estimar los resultados del modelo $(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$?

17.6.4 Modelo de servicio a máquinas—$(M/M/R):(DG/K/K)$, $R \le K$

El entorno para este modelo es el de un taller con K máquinas. Cuando se descompone una máquina, se llama a un mecánico para hacer la reparación. La frecuencia es λ descomposturas *por máquina* y por unidad de tiempo, y un mecánico las repara a una tasa de μ máquinas por unidad de tiempo. Se supone que todas las descomposturas y los servicios siguen una distribución de Poisson.

Este modelo se diferencia de todos los anteriores por tener una fuente finita de clientes. Eso se puede visualizar si se considera que cuando todas las máquinas del taller están descompuestas, no se pueden generar más llamadas o solicitudes de servicio. En esencia, sólo las máquinas que están funcionando se pueden descomponer, por lo que tienen el potencial de generar llamadas de servicio.

Dado que la frecuencia de descomposturas *por máquina* es λ, la frecuencia de descomposturas en *todo el taller* es proporcional a la cantidad de máquinas que están funcionando. También, si se tienen n máquinas *en el sistema* quiere decir que n máquinas están descompuestas (el sistema es las máquinas descompuestas, no el taller). Entonces, la frecuencia de descomposturas en todo el taller es

$$\lambda_n = (K - n)\lambda,\ 0 \le n \le K$$

En términos del modelo generalizado de la sección 17.5,

$$\lambda_n = \begin{cases} (K - n)\lambda, & 0 \le n < K \\ 0, & n \ge K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n < R \\ R\mu, & R \le n \le K \end{cases}$$

Entonces, para el modelo generalizado se puede obtener (¡compruébelo!)

$$p_n = \begin{cases} C_n^K \rho^n p_0, & 0 \le n \le R \\ C_n^K \dfrac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}} p_0, & R \le n \le K \end{cases}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{R} C_n^K \rho^n + \sum_{n=R+1}^{K} C_n^K \frac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}} \right)^{-1}$$

En este modelo es difícil obtener una forma cerrada de L_s, y en consecuencia se debe calcular a partir de la siguiente definición básica:

$$L_s = \sum_{n=0}^{K} np_n$$

El valor de λ_{ef} se calcula como sigue:

$$\lambda_{ef} = E\{\lambda(K - n)\} = \lambda(K - L_s)$$

Se pueden calcular las medidas restantes de desempeño W_s, W_q y L_q, con las ecuaciones de la sección 17.6.1.

Ejemplo 17.6-8

Toolco tiene un taller con 22 máquinas en total. Se sabe que cada máquina se descompone con una frecuencia promedio de una vez cada dos horas. Se necesita un promedio de 12 minutos para terminar una reparación. Tanto el tiempo entre descomposturas como el tiempo de reparación siguen una distribución exponencial. A Toolco le interesa determinar la cantidad de mecánicos necesarios para mantener el taller funcionando "uniformemente".

El caso se puede analizar investigando la productividad de las máquinas en función de la cantidad de mecánicos. Esa medida de productividad se puede definir como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Productividad}\\ \text{de máquinas}\end{pmatrix} = \frac{\text{Máquinas disponibles} - \text{Máquinas descompuestas}}{\text{Máquinas disponibles}} \times 100$$

$$= \frac{22 - L_s}{22} \times 100$$

Los resultados para este caso se pueden obtener con los siguientes datos a TORA:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
0.5	5	1	22	22
0.5	5	2	22	22
0.5	5	3	22	22
0.5	5	4	22	22

La figura 17.10 muestra las medidas comparativas para $R =$ de 1 a 4, usando TORA. La productividad correspondiente se calcula en la siguiente tabla:

Mecánicos, R	1	2	3	4
Productividad de las máquinas (100%)	45.44	80.15	88.79	90.45
Aumento marginal (100%)	—	34.71	8.64	1.66

Estos resultados indican que con un mecánico, la productividad es baja (= 45.44%). Al aumentar la cantidad de mecánicos a 2, la productividad crece en 34.71% para llegar a

```
Title: Example 17.6-8, Figure 17.10
Comparative Analysis
```

c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Lq	Ws	Wq
1	0.500	5.00	4.9980	0.0004	12.0040	11.0044	2.4018	0.2018
2	0.500	5.00	8.8161	0.0564	4.3677	2.6045	0.4954	0.2954
3	0.500	5.00	9.7670	0.1078	2.4660	0.5128	0.2525	0.0525
4	0.500	5.00	9.9500	0.1199	2.1001	0.1102	0.2111	0.0111

FIGURA 17.10

Resultados del análisis comparativo para el ejemplo 17.6-8, obtenidos con TORA

80.15%. Cuando se emplean tres mecánicos, la productividad sólo aumenta 8.64% para llegar a 88.79%, mientras que cuatro mecánicos harán aumentar la productividad sólo 1.66%, alcanzando 90.45 por ciento.

Según estos resultados, se justifica usar dos mecánicos. El caso de tres mecánicos no es tan sólido, porque sólo aumenta la productividad 8.64%. Quizá se pueda usar una comparación económica entre el costo de contratar un tercer mecánico y el ingreso correspondiente al 8.64% de aumento de productividad, para definir este asunto (véase la sección 17.10, con la descripción de los modelos de costo). En cuanto a contratar un cuarto mecánico, podría suceder que el pequeño aumento de productividad de 1.66% no justifique esa acción.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6H

1. En el ejemplo 17.6-8 haga lo siguiente:

a) Compruebe los valores de λ_{ef} de la figura 17.10.

b) Calcule la cantidad esperada de mecánicos sin trabajo, si $R = 4$.

c) Calcule la probabilidad de que todos los mecánicos estén sin trabajo para $R = 3$.

d) Calcule la probabilidad de que la mayoría (más de la mitad) de los mecánicos estén sin trabajo para $R = 3$.

2. En el ejemplo 17.6-8 defina y calcule la productividad de los mecánicos para $R = 1, 2, 3$ y 4. Con esta información, y con la medida de la productividad de la máquina, decida la cantidad de mecánicos que debe contratar Toolco.

3. En los cálculos de la figura 17.10 podría parecer confuso que la tasa promedio de descomposturas de máquinas, λ_{ef}, en el taller, aumente al aumentar R. Explique por qué cabe esperar un aumento de λ_{ef}.

4. Un operador atiende a 5 máquinas automáticas. Cuando una máquina termina un lote, el operador la debe restablecer para iniciar el siguiente lote. El tiempo para terminar un procesamiento de lote es exponencial, con 45 minutos de promedio. El tiempo de preparación de la máquina también es exponencial con un promedio de 8 minutos.

a) Calcule la cantidad promedio de máquinas que esperan su restablecimiento, o que están siendo restablecidas.

b) Calcule la probabilidad de que todas las máquinas estén trabajando.

c) Determine el tiempo promedio que una máquina está sin trabajar.

5. Kleen All es una empresa de servicio que hace diversos trabajos ocasionales, como arreglar patios, podar árboles y pintar casas. Los cuatro empleados de la empresa salen de la oficina con la primera tarea del día. Después de terminar un trabajo, el empleado llama a la oficina pidiendo instrucciones para hacer el segundo trabajo. El tiempo para terminar una tarea es exponencial, con promedio de 45 minutos. El tiempo de traslado entre trabajos también es exponencial, con una media de 20 minutos.
   a) Determine la cantidad promedio de empleados que están en traslado entre trabajos.
   b) Calcule la probabilidad de que no haya empleados trasladándose.
6. Después de esperar mucho, el matrimonio Newborn fue recompensado con quíntuples (quintillizos), dos niños y tres niñas, gracias a las maravillas del progreso de la medicina. Durante los 5 primeros meses, la vida de los bebés transcurría en dos estados: despiertos (llorando, principalmente) y dormidos. Según los Newborn, las actividades "despierto-dormido" de los bebés nunca coinciden. En lugar de ello, el panorama parece ser totalmente aleatorio. De hecho, la señora Newborn, quien es experta en estadística, cree que el tiempo que llora cada bebé es exponencial, con 30 minutos de promedio. El tiempo durante el cual duerme cada bebé también es exponencial, con una media de 2 horas. Determine lo siguiente:
   a) La cantidad promedio de bebés despiertos en cualquier momento.
   b) La probabilidad de que todos los bebés estén dormidos.
   c) La probabilidad de que los Newborn estén atareados porque haya más bebés despiertos (y llorando) que dormidos.
7. Compruebe la ecuación de p_n para el modelo $(M/M/R) : (DG/K/K)$.
8. Demuestre que, en el ejemplo 17.6-8, la frecuencia de descomposturas en el taller se puede calcular con la fórmula

$$\lambda_{ef} = \mu\overline{R}$$

   donde $\overline{R}$ es la cantidad promedio de mecánicos ocupados.
9. Para el ejemplo 17.6-8, compruebe los siguientes resultados para el caso de un solo mecánico ($R = 1$):

$$p_n = \frac{K!\rho^n}{(K-n)!}p_0$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{R}\frac{K!\rho^n}{(K-n)}\right)^{-1}$$

$$L_s = K - \frac{(1 - p_0)}{\rho}$$

17.7 $(M/G/1) : (DG/\infty/\infty)$—FÓRMULA DE POLLACZEK-KHINTCHINE (P-K)

Los modelos de cola en que las llegadas y las salidas no siguen la distribución de Poisson son complicados. En general, en esos casos se aconseja usar la simulación como método alternativo para analizarlos (véase el capítulo 18).

En esta sección se presenta una de las pocas clases de cola que no son de Poisson, para la cual se dispone de resultados. Es para el caso en el que el tiempo de servicio t se representa por una distribución de probabilidades con media $E\{t\}$ y varianza $\text{var}\{t\}$. Entre los resultados del modelo están las medidas básicas de desempeño L_s, L_q, W_s y W_q. El modelo no proporciona una ecuación cerrada para p_n debido a que no se puede manejar en forma analítica.

Sea λ la frecuencia de llegadas a la instalación con un servidor. Dadas $E\{t\}$ y $\text{var}\{t\}$ de la distribución del tiempo de servicio, y como $\lambda E\{t\} < 1$, se puede demostrar, mediante complicados análisis de probabilidades y cadenas de Markov, que

$$L_s = \lambda E\{t\} + \frac{\lambda^2(E^2\{t\} + \text{var}\{t\})}{2(1 - \lambda E\{t\})},\ \lambda E\{t\} < 1$$

La probabilidad de que la instalación esté vacía (sin trabajar) se calcula con

$$p_0 = 1 - \lambda E\{t\} = 1 - \rho$$

Como $\lambda_{ef} = \lambda$, las medidas restantes de desempeño (L_q, W_s y W_q) se pueden obtener a partir de L_s como se explicó en la sección 17.6.1.

Con la plantilla ch17PKFormula.xls de Excel se automatizan los cálculos para este modelo.

Ejemplo 17.7-1

En el lavado de autos Automata del ejemplo 17.6-2, suponga que se cambia el sistema de lavado, de tal forma que el tiempo de servicio en todos los vehículos sea constante, igual a 10 minutos. ¿Cómo afecta ese nuevo sistema al funcionamiento de la instalación?

De acuerdo con el ejemplo 17.6-2, $\lambda_{ef} = \lambda = 4$ automóviles por hora. El tiempo de servicio es constante, por lo que $E\{t\} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ hora y $\text{var}\{t\} = 0$. Entonces,

$$L_s = 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + \frac{4^2\left[\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 + 0\right]}{2\left(1 - \tfrac{4}{6}\right)} = 1.33 \text{ autos}$$

$$L_q = 1.333 - \left(\tfrac{4}{6}\right) = 0.667 \text{ autos}$$

$$W_s = \frac{1.333}{4} = 0.333 \text{ hora}$$

$$W_q = \frac{0.667}{4} = 0.167 \text{ hora}$$

Es interesante que, aun cuando las tasas de llegada y salida sean las mismas como en el caso de Poisson, en el ejemplo 17.6-2 ($\lambda = 4$ vehículos por hora y $\mu = \frac{1}{E\{t\}} = 6$ automóviles por hora), el tiempo esperado de espera es menor en este modelo, porque el tiempo de servicio es constante, como se ve en la siguiente tabla:

	$(M/M/1) : (GD/\infty/\infty)$	$(M/D/1) : (GD/\infty/\infty)$
W_s (hr)	0.500	0.333
W_q (hr)	0.333	0.167

Los resultados tienen sentido, porque un tiempo de servicio constante indica que hay *más certidumbre* en el funcionamiento de la instalación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.7A

1. En el ejemplo 17.7-1, calcule el porcentaje del tiempo durante el cual la instalación no trabaja.
2. Resuelva el ejemplo 17.7-1 suponiendo que la distribución de tiempo de servicio es la siguiente:
   a) Uniforme entre 8 y 20 minutos.
   b) Normal con $\mu = 12$ minutos y $\sigma = 3$ minutos.
   c) Discreta, con valores de 4, 8 y 15 minutos y probabilidades 0.2, 0.6 y 0.2, respectivamente.

3. Layson Roofing Inc. instala tejados en residencias nuevas y viejas de Arkansas. Los posibles clientes piden el servicio aleatoriamente, con una frecuencia de nueve trabajos mensuales (meses de 30 días) y se ponen en lista de espera para atenderlos con base PLPS. Los tamaños de las casas varían, pero es razonable suponer que las superficies de los techos tienen una distribución uniforme entre 150 y 300 cuadrados. La cuadrilla de trabajadores suele terminar 75 cuadrados por día. Calcule lo siguiente:

a) La cantidad de trabajos que tiene pendientes Layson.

b) El tiempo promedio de espera de los clientes hasta que se termina su trabajo.

c) Si aumenta la cuadrilla de trabajadores para que puedan terminar 150 cuadrados por día, ¿cómo se afectaría el tiempo promedio que pasa hasta que se termina un trabajo?

4. Optica, Ltd., fabrica anteojos bajo receta de acuerdo con los pedidos de los clientes. Cada trabajador se especializa en ciertos tipos de anteojos. La empresa ha tenido demoras inusuales en el procesamiento de recetas bifocales y trifocales. El trabajador a cargo recibe 30 pedidos en cada día de 8 horas. El tiempo para terminar una receta suele tener distribución normal, con una media de 12 minutos y 3 minutos de desviación estándar. Después de tardar entre 2 y 4 minutos, distribuidos uniformemente, en la inspección de los anteojos, el trabajador puede comenzar una nueva receta. Calcule lo siguiente:

a) El porcentaje del tiempo durante el cual el trabajador no hace nada.

b) La cantidad de recetas bifocales y trifocales en lista de espera, en Optica.

c) El tiempo promedio hasta que se termina una receta.

5. Llega un producto con una distribución de Poisson, con la frecuencia de uno cada 45 minutos. Este producto requiere dos operaciones consecutivas que hace un trabajador. En la primera usa una máquina semiautomática que termina su ciclo exactamente en 28 minutos. La segunda operación es hacer ajustes y cambios secundarios, y el tiempo que dura depende del estado del producto al salir de la operación 1. En forma específica, el tiempo de la operación 2 se distribuye uniformemente, entre 3 y 6 minutos. Como en cada operación se requiere la atención completa del trabajador, no se puede cargar un artículo a la máquina semiautomática sino hasta que el artículo actual haya salido de la operación 2.

a) Determine la cantidad de artículos que esperan su procesamiento en la máquina semiautomática.

b) ¿Cuál es el porcentaje del tiempo en que el trabajador no tendrá qué hacer?

c) ¿Cuánto tiempo se necesita, en promedio, para que un artículo que llega salga de la operación 2?

6. Caso $(M/D/1) : (DG/\infty/\infty)$. Demuestre que para el caso en el que el tiempo de servicio es constante, la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}$$

en donde $\mu = \frac{1}{E\{t\}}$ y $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E\{t\}$.

7. Caso $(M/E_m/1) : (DG/\infty/\infty)$. Si el tiempo de servicio tiene distribución de Erlang, con parámetros m y μ (es decir, $E\{t\} = \frac{m}{\mu}$ y $\text{var}\{t\} = \frac{m}{\mu^2}$), demuestre que la fórmula de P-K se reduce a

$$L_s = m\rho + \frac{m(1 + m)\rho^2}{2(1 - m\rho)}$$

8. Demuestre que la fórmula P-K se reduce a L_s del modelo $(M/M/1) : (DG/\infty/\infty)$ cuando el tiempo de servicio es exponencial, con promedio de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.

9. En una instalación de servicio con c servidores en paralelo, suponga que los clientes llegan con una distribución de Poisson, cuya frecuencia promedio es λ. A los clientes que llegan se les asignan servidores (ocupados o desocupados) en un orden estrictamente rotativo.

a) Determine la distribución de probabilidades del tiempo entre llegadas.

b) Suponga que en la parte a) los clientes que llegan son asignados al azar a los *c* servidores, con probabilidades α_i, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., c$, y $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_c = 1$. Determine la distribución de probabilidades del tiempo entre llegadas.

17.8 OTROS MODELOS DE COLA

Las secciones anteriores se concentraron en modelos de cola de Poisson. Las publicaciones sobre colas contienen abundancia de otros modelos. En especial, las colas con prioridad de servicio, colas de red y colas no de Poisson, forman una parte importante de este campo. Esos modelos se pueden encontrar en la mayor parte de los libros especializados en teoría de colas.

17.9 MODELOS DE DECISIÓN CON COLAS

El *nivel de servicio* de una instalación con líneas de espera es una función de la tasa de servicio μ y de la cantidad de servidores en paralelo *c*. En esta sección se presentan dos modelos de decisión para determinar los niveles de servicio "adecuados" para sistemas de cola: 1) un modelo de costo y 2) un modelo de nivel de aspiración. En ambos modelos se reconoce que los mayores niveles de servicio reducen el tiempo de espera en el sistema. Los dos modelos tratan de llegar a un notable balance entre los factores opuestos, de nivel de servicio y de espera.

17.9.1 Modelos de costo

En los modelos de costo se trata de balancear dos costos opuestos:

1. El costo de ofrecer el servicio.
2. El costo de demorar la oferta del servicio (el tiempo de espera del cliente).

Las dos clases de costo se contraponen, porque al aumentar una se reduce la otra automáticamente, como se ve en la figura 17.1.

Si $x = (\mu \text{ o } c)$ representa el *nivel de servicio*, se puede expresar como sigue el modelo de costo:

$$ETC(x) = EOC(x) + EWC(x)$$

en donde

ETC = Costo total esperado *por unidad de tiempo*

EOC = Costo esperado del funcionamiento de la instalación *por unidad de tiempo*

EWC = Costo esperado de la espera *por unidad de tiempo*

Las formas más sencillas de *EOC* y *EWC* son las siguientes funciones lineales:

$$EOC(x) = C_1 x$$
$$EWC(x) = C_2 L_s$$

en donde

C_1 = Costo por unidad de *x* por unidad de tiempo

C_2 = Costo de la espera por unidad de tiempo por cada cliente que espera

En los dos ejemplos que siguen se explica el uso del modelo de costo. En el primero se supone que x es igual a la tasa de servicio μ, y en el segundo se supone que x es igual a la cantidad de servidores en paralelo, c.

Ejemplo 17.9-1

KeenCo Publishing va a comprar una copiadora comercial de alta velocidad. Los proveedores le han propuesto cuatro modelos, cuyas especificaciones se resumen a continuación.

Modelo de copiadora	Costo de operación ($/hr)	Velocidad (hojas/min)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Los trabajos llegan a KeenCo siguiendo una distribución de Poisson, con promedio de 4 por día de 24 horas. El tamaño del trabajo es aleatorio, y su promedio es de unas 10,000 hojas por trabajo. En los contratos con los clientes se especifica una multa por entrega retardada igual a $80 por trabajo y por día. ¿Cuál copiadora debe comprar KeenCo?

Sea el subíndice i el modelo de copiadora ($i = 1, 2, 3, 4$). El costo total esperado *por día* correspondiente a la copiadora i es

$$\begin{aligned} ETC_i &= EOC_i + EWC_i \\ &= C_{1i} \times 24 + C_{2i}L_{si} \\ &= 24C_{1i} + 80L_{si},\ i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Los valores de C_{1i} se ven en los datos del problema. Se determinará L_{si} reconociendo que, para todo fin práctico, se puede considerar que cada copiadora es un modelo $(M/M/1)$: $(DG/\infty/\infty)$. La tasa de llegadas es $\lambda = 4$ trabajos/día. La tasa de servicio, μ_i, asociada al modelo i, es:

Modelo i	Tasa de servicio μ_i (trabajos/día)
1	4.32
2	5.18
3	7.20
4	9.50

El cálculo de la tasa de servicio se demuestra para el modelo 1:

$$\text{Tiempo promedio por trabajo} = \frac{10{,}000}{30} \times \frac{1}{60} = 5.56 \text{ horas}$$

Así,

$$\mu_1 = \frac{24}{5.56} = 4.32 \text{ trabajos/día}$$

Los valores de L_{si}, calculados con TORA, se ven en la siguiente tabla:

Modelo i	λ_i (trabajos/día)	μ_i (trabajos/día)	L_{si} (trabajos)
1	4	4.32	12.50
2	4	5.18	3.39
3	4	7.20	1.25
4	4	9.50	0.73

Los costos para los cuatro modelos se calculan como sigue:

Modelo i	EOC_i ($)	EWC_i ($)	ETC_i ($)
1	360.00	1000.00	1360.00
2	480.00	271.20	751.20
3	**576.00**	**100.00**	**676.00**
4	648.00	58.40	706.40

El modelo 3 produce el costo mínimo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.9A

1. En el ejemplo 17.9-1 haga lo siguiente:

a) Compruebe los valores de μ_2, μ_3 y μ_4 que se dan en el ejemplo.

b) Suponga que la multa de $80 por trabajo y por día sólo se impone a los trabajos que *no* están "en proceso" al final del día. ¿Cuál copiadora produce el costo total mínimo por día?

2. Metalco está contratando a un mecánico para un taller con 10 máquinas. Se están examinando a dos candidatos. El primero puede reparar 5 máquinas por hora y gana $15 por hora. El segundo candidato, más hábil, recibe $20 por hora y puede reparar 8 máquinas por hora. Metalco estima que por cada máquina descompuesta se pierden $50 por hora por falta de producción. Suponiendo que las máquinas se descomponen siguiendo una distribución de Poisson con una media de 3 por hora, y que el tiempo de reparación tiene distribución exponencial, ¿a cuál persona se debe contratar?

3. B&K Groceries abre una nueva tienda diciendo que tiene instalado "lo último" en lectores ópticos en las cajas. El señor Bih, uno de los dueños de B&K, ha limitado la elección a dos lectores ópticos: el *A* puede procesar 10 artículos por minuto, y el *G*, de mayor calidad, puede leer 15 artículos por minuto. Los costos diarios (10 horas) de operar y dar mantenimiento a los lectores son de $25 y $35 para los modelos *A* y *B*, respectivamente. Los clientes que terminan sus compras llegan con la cajera siguiendo una distribución de Poisson, con una frecuencia de 10 por hora. En el carrito de cada cliente hay de 25 a 35 artículos, cantidad distribuida uniformemente. ¿Cuál lector debe adquirir B&K? (*Sugerencia:* el tiempo de servicio por cliente no es exponencial. Está distribuido uniformemente.)

4. H&I Industry produce una máquina especial con distintas tasas (piezas por hora) de producción para satisfacer las especificaciones de los clientes. Se estima que el costo de producción es de $0.10 por unidad de aumento en la tasa de producción. El propietario de un taller está estudiando la compra de una de esas máquinas, y quiere escoger la que tenga la velocidad (en piezas por hora) más económica. De acuerdo con la experiencia, el dueño estima que los pedidos de sus clientes le llegan siguiendo una distribución de Poisson con una frecuencia de tres por hora. Cada

pedido tiene un promedio de 500 piezas. En los contratos entre el dueño y sus clientes se especifica una multa de $100 por pedido atrasado y por hora.

a) Suponiendo que el tiempo real de producción por pedido tiene una distribución exponencial, formule un modelo general de costo en función de la tasa de producción, μ.

b) Partiendo del modelo de costo en el punto a), determine una ecuación para la tasa óptima de producción.

c) Con los datos del problema, determine la tasa óptima de producción que debe solicitar el dueño a H&I.

5. A un taller llegan trabajos siguiendo una distribución de Poisson, con frecuencia de 80 por semana. Hay una máquina automática que es el cuello de botella en ese taller. Se estima que un aumento unitario en la tasa de producción de la máquina costará $250 por semana. Los trabajos demorados suelen tener como consecuencia la pérdida de clientes, lo cual se estima en $500 por trabajo y por semana. Calcule la tasa óptima de producción para la máquina, con base en esta información.

6. Pizza Unlimited vende dos modelos de restaurantes con franquicia. El modelo *A* tiene una capacidad de 20 grupos de clientes, y en el modelo *B* se pueden acomodar 30 grupos. El costo mensual de operación del modelo *A* es de $12,000 y el del modelo *B* es de $16,000. Un inversionista desea establecer una pizzería y estima que los grupos de clientes llegan siguiendo una distribución de Poisson, con una frecuencia de 25 grupos por hora, y cada grupo ocupa una mesa. Si todas las mesas están ocupadas, los grupos que llegan se van. El modelo *A* da servicio a 26 grupos por hora y el modelo *B* a 29 grupos por hora. A causa de la variación de los tamaños de los grupos y los tipos de pedidos, el tiempo de servicio tiene distribución exponencial. El inversionista estima que el costo promedio de clientes perdidos por grupo de clientes por hora es de $15. Se estima que el promedio de costo por espera en el servicio, por grupo de clientes y por hora es de $10.

a) Formule un modelo de costo que tenga en cuenta el costo de los clientes que se pierden (además del costo de operación del restaurante y del costo de espera).

b) Suponiendo que el restaurante abre 10 horas al día, ¿cuál modelo recomendaría usted al inversionista?

7. Suponga, en el problema 6, que el inversionista puede elegir cualquier capacidad de restaurante que desee, con base en un costo marginal específico por cada unidad adicional de capacidad solicitada. Deduzca un modelo general de costo y defina todos sus componentes y condiciones.

8. Second Time Around vende artículos usados a consignación. Se puede visualizar su funcionamiento como un problema de inventario en el que la existencia se abastece y se consume en forma aleatoria, siguiendo distribuciones de Poisson, con tasas de λ y μ artículos por día. Cada día que se agota el artículo, Second Time pierde $\$C_1$ por oportunidades perdidas, y cada día que se conserva en existencia un artículo, incurre en el costo de almacenamiento $\$C_2$.

a) Deduzca una ecuación para el costo total por día.

b) Determine el valor óptimo de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. ¿Qué condición se debe imponer a los valores relativos de C_1 y C_2 para que la solución sea consistente con las hipótesis del modelo $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$?

Ejemplo 17.9-2

En un almacén de herramientas con varios despachadores, las peticiones de cambio de herramienta suceden de acuerdo con una distribución de Poisson, con una frecuencia de 17.5 solicitudes por hora. Cada almacenista puede manejar un promedio de 10 solicitudes por hora. El costo de contratar un almacenista nuevo en la instalación es de $12 por hora. El costo de producción perdida por máquina en espera y por hora es, aproximadamente, de $50. Calcular la cantidad óptima de despachadores en la instalación.

La situación corresponde a un modelo ($M/M/c$) en el cual es deseable determinar el valor óptimo de c. Así, en el modelo de costo general presentado al inicio de esta sección, pusimos $x = c$, que resulta en el siguiente modelo de costo:

$$\begin{aligned} ETC(c) &= C_1 c + C_2 L_s(c) \\ &= 12c + 50L_s(c) \end{aligned}$$

Observe que $L_s(c)$ es una función del número de (paralelo) empleados en c.

El caso corresponde a un modelo ($M/M/c$): ($DG/\infty/\infty$) con $\lambda = 17.5$ solicitudes por hora y $\mu = 10$ solicitudes por hora. Desde este punto de vista, el modelo llegará al estado estable sólo si $c > \frac{\lambda}{\mu}$esto es, en este ejemplo, si $c \geq 2$. La tabla siguiente muestra los cálculos necesarios para determinar la c óptima. Los valores de $L_s(c)$ se determinan con el módulo de análisis comparativo de colas en TORA.

c	$L_s(c)$ (solicitudes)	$ETC(c)$ ($)
2	7.467	397.35
3	2.217	146.85
4	**1.842**	**140.10**
5	1.769	148.45
6	1.754	159.70

Así, la cantidad óptima de despachadores es 4.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.9B

1. Resuelva el ejemplo 17.9-2, suponiendo que $C_1 = \$20$ y $C_2 = \$45$.

2. Tasco Oil tiene un oleoducto con estaciones de bombeo, que funciona en forma continua. El tiempo entre descomposturas para cada bomba es exponencial con una media de 20 horas. El tiempo de reparación tiene distribución exponencial con una media de 3 horas. En determinada estación hay dos mecánicos que atienden a 10 bombas. El sueldo horario de cada mecánico es $18. Las pérdidas del oleoducto se estiman en $30 por bomba descompuesta y por hora. Tasco estudia la posibilidad de contratar un mecánico adicional.

a) ¿Ahorrará al contratar el tercer mecánico?

b) ¿Cuál es la pérdida esperada, en $ por descompostura, cuando la cantidad de mecánicos en servicio es dos? ¿Y cuando es tres?

3. Una empresa alquila una línea telefónica de servicio de telecomunicaciones de área amplia (WATS) en $2000 por mes. La oficina está abierta 200 horas hábiles por mes. En todas las demás horas, la línea de servicio WATS se usa para otros fines y no está disponible para la empresa. El acceso a la línea WATS durante las horas hábiles se ofrece a 100 vendedores, cada uno de los cuales puede necesitar la línea en cualquier momento, pero en promedio es dos veces por día de 8 horas, con tiempo exponencial entre llamadas. Un vendedor siempre espera la línea WATS si está ocupada con un costo estimado de 1 ¢ por minuto de espera. Se supone que no se presentarán más necesidades de llamadas mientras el vendedor espera determinada llamada. El costo normal de llamadas (sin usar la línea WATS) es 50 ¢ por minuto, en promedio, y la duración de

cada llamada es exponencial, con 6 minutos de promedio. La empresa está estudiando alquilar (con la misma tarifa) una segunda línea WATS para mejorar el servicio.

a) La línea única WATS ¿ahorra algo a la empresa, en comparación con no tener sistema WATS? ¿Cuánto gana o pierde la empresa por mes, en comparación con no tener sistema WATS?

b) ¿Debe alquilar la empresa una segunda línea WATS? ¿Cuánto ganaría o perdería si renta una línea adicional, en comparación con ahora que sólo renta una?

4. Un taller de maquinado tiene 20 máquinas y tres mecánicos reparadores. Una máquina en operación se descompone al azar, de acuerdo con una distribución de Poisson. El tiempo de reparación por máquina es exponencial, con una media de 6 minutos. Un análisis de colas de este caso indica que hay un promedio de 57.8 solicitudes de reparación por día de 8 horas en todo el taller. Suponga que la tasa de producción por máquina es de 25 unidades por hora, y que cada unidad producida genera $2 en ingresos. Además suponga que se le pagan $20 por hora a un mecánico reparador. Compare el costo de contratar mecánicos contra el costo de los ingresos perdidos cuando las máquinas están descompuestas.

5. Las condiciones necesarias para que $ETC(c)$ (costo total esperado *por unidad de tiempo*; se definió arriba) asuma un valor mínimo en $c = c^*$ son

$$ETC(c^* - 1) \geq ETC(c^*) \text{ y } ETC(c^* + 1) \geq ETC(c^*)$$

Demuestre que esas condiciones se reducen a

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

Aplique el resultado al ejemplo 17.9-2 y demuestre que el resultado es $c^* = 4$.

17.9.2 Modelo de nivel de aspiración

La viabilidad del modelo de costo depende de lo bien que se puedan estimar los parámetros de costo. En general es difícil estimarlos, en especial el relacionado con el tiempo de espera de los clientes. El modelo de aspiración alivia esta dificultad al trabajar en forma directa con las medidas de desempeño de la cola que se trate. La idea es determinar un intervalo aceptable de nivel de servicio (μ o c) especificando límites razonables de medidas *contrapuestas* de desempeño. Esos límites son los *niveles de aspiración* que desea lograr quien toma las decisiones.

Ilustraremos el procedimiento aplicándolo al modelo de varios servidores, donde se desea determinar una cantidad c^* "aceptable" de servidores. Esto se hace teniendo en cuenta las dos medidas (contrapuestas) de desempeño:

1. El tiempo promedio en el sistema, W_s.
2. El porcentaje de inactividad de los servidores, X.

El valor de W_s se puede calcular usando TORA. El porcentaje de inactividad se puede calcular como sigue:

$$X = \frac{c - \bar{c}}{c} \times 100 = \frac{c - (L_s - L_q)}{c} \times 100 = \left(1 - \frac{\lambda_{\text{ef}}}{c\mu}\right) \times 100$$

(Véase la demostración en el problema 12, conjunto de problemas 17.6e.)

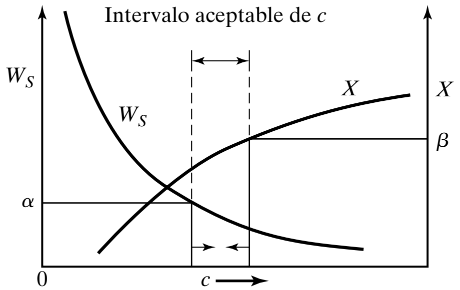


FIGURA 17.11
Aplicación de niveles de aspiración en la toma de decisiones en líneas de espera

El problema se reduce a determinar la cantidad c^* de servidores tal que

$$W_s \leq \alpha \text{ y } X \leq \beta$$

en donde α y β son los niveles de aspiración especificados por quien toma las decisiones. Por ejemplo, se puede estipular que $\alpha = 3$ minutos y $\beta = 10$ por ciento.

Se puede determinar la solución del problema haciendo una gráfica de W_s y X en función de c, como la de la figura 17.11. Al ubicar α y β en la gráfica se puede determinar de inmediato un intervalo aceptable de c^*. Si no se pueden satisfacer las dos condiciones al mismo tiempo, habrá que aflojar una o ambas, para poder determinar un intervalo factible.

Ejemplo 17.9-3

Suponer, en el ejemplo 17.9-2, que se desea determinar la cantidad de despachadores en forma tal que el tiempo esperado de espera de una herramienta quede en menos de 5 minutos. Al mismo tiempo, también se requiere mantener el porcentaje de inactividad por debajo de 20 por ciento.

Antes de proceder y de hacer cálculos, no es posible tener un límite de aspiración de 5 minutos en el tiempo de espera para recibir una herramienta (es decir, $W_s \leq 5$ minutos) porque, según los datos del problema, ya que tan solo el tiempo promedio de servicio es 6 minutos. La tabla siguiente resume a W_s y X en función de c

c	2	3	4	5	6	7	8
W_s (min)	25.4	7.6	6.3	6.1	6.0	6.0	6.0
X (%)	12.5	41.7	56.3	65.0	70.8	75.0	78.0

No hay nada que hacer bajo estas circunstancias. En lugar de ello, se debería reducir el tiempo de servicio, o bien reconocer que la fuente del problema es que se piden las herramientas con una frecuencia demasiado alta ($\lambda = 17.5$ solicitudes por hora). Lo más probable es que ésta sea el área que se deba atender. Por ejemplo, se podrá tratar de investigar la razón de que la demanda de cambio de herramienta sea tan alta. ¿Sería que el diseño mismo de la herramienta es deficiente? O bien, ¿podría ser que los operadores de las máquinas traten a propósito de interrumpir la producción para expresar sus quejas?

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.9C

1. En un taller se usan 10 máquinas idénticas. Cada máquina se descompone una vez cada 7 horas, en promedio. También en promedio, un mecánico tarda 4 horas en la reparación de una máquina descompuesta. Los procesos de descompostura y reparación tienen una distribución de Poisson. Determine lo siguiente:

a) La cantidad de mecánicos necesarios para que la cantidad promedio de máquinas descompuestas sea menor que 4.

b) La cantidad de mecánicos necesarios para que el tiempo esperado de demora en que se inicie la reparación de una máquina sea menor que 1 hora.

2. En el modelo de costo de la sección 17.9.1, en general es difícil estimar el parámetro de costo C_2 (costo de espera). En consecuencia podrá ser útil calcular el costo C_2 implicado por los niveles de aspiración. Al usar el modelo de nivel de aspiración para determinar c^* se puede estimar entonces el C_2 incurrido, con la siguiente desigualdad:

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

(Véase la deducción en el problema 5, conjunto de problemas 17.9b.) Aplique el procedimiento al problema del ejemplo 17.9-2, suponiendo que $c^* = 3$ y $C_1 = \$12.00$.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Hall, R., *Queuing Methods for Service and Manufacturing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1991.

Lipsky, L., *Queuing Theory, A Linear Algebraic Approach,* Macmillan, New York, 1992.

Morse, P., *Queues, Inventories, and Maintenance,* Wiley, New York, 1958.

Parzen, E., *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco, 1962.

Saaty, T., *Elements of Queuing Theory with Applications*, Dover, New York, 1983.

Tijms, H. C., *Stochastic Models—An Algorithmic Approach*, Wiley, New York, 1994.

PROBLEMAS INTEGRALES

17.1[2] El Bank of Elkins tiene en la actualidad una ventanilla de servicio para automóviles y dos carriles “robot” que comunican hacia el interior del banco a través de un cartucho neumático. El banco quisiera aumentar las instalaciones actuales para que cada automóvil que llegue termine los trámites en no más de 4 minutos, en promedio. Este límite de tiempo se basó en estudios psicológicos que indican que los clientes basan su impaciencia en el movimiento del minutero entre dos marcas, que en la mayor parte de los relojes de pulso representa cinco minutos. Para reunir los datos necesarios, el equipo observó el funcionamiento de los cajeros actuales. Después de estu-

[2]Basado en B. L. Foote, “A Queuing Case Study in Drive-In Banking”, *Interfaces*, vol. 6, núm. 4, págs. 31-37, 1976.

diar el sistema durante algún tiempo, una persona del equipo notó que había una gran diferencia entre el tiempo que pasa un cliente en el carril de llegada y el tiempo que el cajero hace las transacciones bancarias necesarias. De hecho, el tiempo que pasa el automóvil en el sistema consistía en 1) ver que se mueva el vehículo de enfrente, 2) pasar a la ventanilla del cajero, 3) dar las instrucciones al cajero, 4) hacer el trámite el cajero y 5) salir. Durante el primero, segundo y quinto componentes de este periodo, el cajero debe estar inactivo, por fuerza. En realidad, la observación indicó que durante cada ciclo, el cajero se ocupaba sólo el 40% del tiempo en atender al cliente. Con base en esta información, el equipo descubrió que había espacio para reducir el costo de operación del sistema actual.

¿Cuál fue la sugerencia del equipo, para mejorar el funcionamiento actual de atención en automóvil? Describa todas las implicaciones de la sugerencia.

17.2 Un centro de protección infantil, operado por el estado, funciona de 9:00 A.M a 9:00 P.M. diariamente. Las llamadas para informar casos de abuso infantil llegan en forma totalmente aleatoria, como es de esperarse. En la tabla siguiente se ve la cantidad de llamadas registradas, por hora, durante un periodo de 7 días:

	Cantidad total de llamadas en el día						
Hora de inicio	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
9:00	4	6	8	4	5	3	4
10:00	6	5	5	3	6	4	7
11:00	3	9	6	8	4	7	5
12:00	8	11	10	5	15	12	9
13:00	10	9	8	7	10	16	6
14:00	8	6	10	12	12	11	10
15:00	10	9	12	4	10	6	8
16:00	8	6	9	14	12	10	7
17:00	5	10	10	8	10	10	9
18:00	5	4	6	5	6	7	5
19:00	3	4	6	2	3	4	5
20:00	4	3	6	2	2	3	4
21:00	1	2	2	3	3	5	3

En la tabla no se muestran las llamadas de quienes llamaron y recibieron la señal de ocupado. Para las llamadas realmente recibidas, cada una dura hasta 12 minutos, con un promedio de 7 minutos. Los datos del historial indican que el centro ha tenido una tasa anual de crecimiento de 15% en las llamadas telefónicas. El centro quisiera determinar la cantidad de líneas telefónicas que debe instalar, para proporcionar un servicio adecuado por ahora y en el futuro. En particular, se debe dar atención especial a la reducción del efecto adverso de que la persona que llame reciba una señal de ocupado.

17.3 Una empresa manufacturera usa tres camiones para transportar materiales entre seis departamentos. Los usuarios de los camiones han estado pidiendo un cuarto camión para aminorar las demoras excesivas. Los camiones no tienen terminal a la cual se les llame. En lugar de ello, la administración cree que lo más eficiente es mantenerlos en movimiento continuo por la fábrica. Un departamento que pida el uso de un camión debe esperar que llegue a sus cercanías. Si el camión está dispo-

nible, atenderá la petición. En caso contrario, el departamento debe esperar otro camión. La siguiente tabla muestra la frecuencia de las llamadas por hora:

Llamadas/hr	Frecuencia
0	30
1	90
2	99
3	102
4	120
5	100
6	60
7	47
8	30
9	20
10	12
11	10
12	4

El tiempo de servicio (en minutos) para cada departamento es aproximadamente igual. La siguiente tabla resume un histograma típico de tiempo de servicio, para uno de los departamentos:

Tiempo de servicio, t	Frecuencia
$0 \leq t < 10$	61
$10 \leq t < 20$	34
$20 \leq t < 30$	15
$30 \leq t < 40$	5
$40 \leq t < 50$	8
$50 \leq t < 60$	4
$60 \leq t < 70$	4
$70 \leq t < 80$	3
$80 \leq t < 90$	2
$90 \leq t < 100$	2

Analice la eficacia del funcionamiento actual.

17.4 Metalco acaba de contratar a Jon Micks, joven ingeniero industrial. La empresa tiene un taller con 30 máquinas, y ha contratado 6 mecánicos para que hagan las reparaciones. El taller funciona un turno diario, que comienza a las 8:00 A.M. Y termina a las 4:00 P.M. La primera tarea del señor Micks es estudiar la eficacia del servicio de reparaciones en el taller. Para ello, Jon ha reunido los siguientes datos del registro de reparaciones de tres máquinas, seleccionadas al azar:

Máquina 5		Máquina 18		Máquina 23	
Hora de falla	*Hora de reparación*	*Hora de falla*	*Hora de reparación*	*Hora de falla*	*Hora de reparación*
8:05	8:15	8:01	8:09	8:45	8:58
10:02	10:14	9:10	9:18	9:55	10:06
10:59	11:09	11:03	11:16	10:58	11:08
12:22	12:35	12:58	13:06	12:21	12:32
14:12	14:22	13:49	13:58	12:59	13:07
15:09	15:21	14:30	14:43	14:32	14:43
15:33	15:42	14:57	15:09	15:09	15:17
15:48	15:59	15:32	15:42	15:50	16:00

Además de esta información, al revisar los registros de reparación de cinco días seleccionados al azar, Jon pudo compilar los datos siguientes, que representan la cantidad de máquinas descompuestas (incluyendo las que se están reparando) al comenzar cada hora del día de trabajo:

	Cantidad total de máquinas descompuestas en la hora de							
Fecha	*8:00*	*9:00*	*10:00*	*11:00*	*12:00*	*13:00*	*14:00*	*15:00*
10/2	6	6	9	6	8	8	7	7
10/29	9	8	5	9	5	5	6	8
11/4	6	6	5	7	7	8	6	5
12/1	9	5	9	7	5	7	5	5
1/19	6	5	8	5	9	8	8	6

El señor Micks tiene una junta con su supervisora, Becky Steele, acerca de los datos que ha reunido. Afirma que tiene confianza en que los procesos de descomposturas y reparaciones en el taller son totalmente aleatorios, y que se puede suponer con seguridad que el caso se puede describir como una cola de Poisson. La señorita Steele confirma que su larga experiencia en el taller indica que el caso en realidad es totalmente aleatorio. Con base en esta observación, examinó los datos de Jon y, después de hacer algunos cálculos le anunció a Jon que había algo equivocado en los datos. ¿Cómo llegó la señorita Steele a esta conclusión?

17.5 La Yellow Cab Company es dueña de cuatro taxis. El servicio de taxi funciona 10 horas diarias. Las llamadas llegan a la oficina de acuerdo con una distribución de Poisson, con promedio de 20 llamadas por hora. Se sabe que la duración del viaje tiene distribución exponencial, con una media de 11.5 minutos. Por la gran demanda de servicio de taxis, Yellow limita la lista de espera en la oficina a 16 clientes. Una vez alcanzado el límite, a los clientes que siguen llamando se les dice que busquen el servicio en otra parte, porque su tiempo de espera puede ser largo.

Kyle Yellowstone, el gerente de la empresa, teme estar perdiendo demasiados clientes, por lo que le gustaría estudiar un aumento de su flota. Yellowstone estima que el ingreso promedio por viaje es $5, aproximadamente. También estima que un taxi nuevo se puede comprar en $18,000, que dure 5 años en servicio, y que después se venda en $3500. El costo anual de mantener y operar un taxi es de $20,000. ¿Puede justificar el señor Yellowstone el aumento de la flotilla y, en caso afirmativo, en cuántos vehículos? Para el análisis suponga una tasa de interés anual de 10 por ciento.

CAPÍTULO 18

Modelado de simulación

La simulación es la mejor alternativa de la observación de un sistema. Nos permite recopilar información pertinente acerca del comportamiento del sistema al paso del tiempo. La simulación no es una técnica de optimización. Más bien se usa para estimar las mediciones del desempeño de un sistema modelado.

La simulación moderna suele manejar situaciones que se pueden describir en el contexto de una línea de espera o cola. La simulación no se limita a eso, porque casi cualquier situación de funcionamiento se puede considerar como alguna forma de línea de espera. Ésta es la razón por la que la simulación ha gozado de aplicaciones tan tremendas en las redes de comunicaciones, manufactura, control de inventario, comportamiento del cliente, pronósticos económicos, sistemas biomédicos y estrategias y tácticas bélicas.

Un precursor de la simulación de nuestros días es la técnica de Monte Carlo, esquema dirigido hacia la estimación de parámetros estocásticos o determinísticos con base en el muestreo aleatorio. La diferencia principal entre las dos técnicas es que en el método de Monte Carlo el elemento tiempo no es factor pertinente. Como ejemplos de las aplicaciones Monte Carlo está la estimación del área de una curva o, en forma más general, la evaluación de integrales múltiples, la estimación de la constante π ($\cong$ 3.14159), y la inversión de matrices.

La simulación es un experimento estadístico y en consecuencia sus resultados se deben interpretar con las pruebas estadísticas adecuadas. Este punto importante se subraya durante este capítulo.

18.1 SIMULACIÓN MONTE CARLO

En esta sección se demostrará la técnica Monte Carlo con un ejemplo. El objetivo del ejemplo es resaltar la naturaleza estadística del experimento de simulación.

Ejemplo 18.1-1

Se usará muestreo Monte Carlo para estimar el área de un círculo cuya ecuación es

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

El radio del círculo es $r = 5$ cm, y su centro es $(x, y) = (1, 2)$.

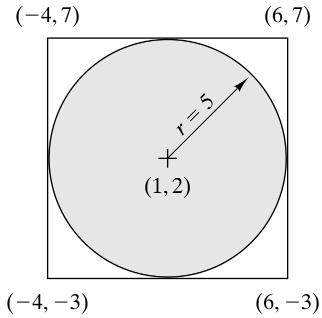


FIGURA 18.1
Estimación del área de un círculo con el método de Monte Carlo

El procedimiento para estimar el área consiste en encerrar el círculo en forma "apretada" en un cuadrado cuyo lado sea igual al diámetro del círculo, como se ve en la figura 18.1. Los puntos de las esquinas se determinan con la geometría del cuadrado.

La estimación del área del círculo se basa en la hipótesis que todos los puntos del cuadrado tienen igual probabilidad de presentarse. Así, si de una muestra aleatoria de *n* puntos en el cuadrado sucede que *m* puntos están dentro del círculo, entonces

$$\begin{pmatrix}\text{Cálculo del área}\\ \text{del círculo}\end{pmatrix} \cong \frac{m}{n}\begin{pmatrix}\text{Área del}\\ \text{cuadrado}\end{pmatrix} = \frac{m}{n}(10 \times 10)$$

Para asegurar que todos los puntos del cuadrado tengan igual probabilidad de aparecer, se representarán las coordenadas x y y de un punto en el cuadrado con las siguientes distribuciones *uniformes*:

$$f_1(x) = \frac{1}{10},\ -4 \le x \le 6$$
$$f_2(y) = \frac{1}{10},\ -3 \le y \le 7$$

Un punto muestreado (x, y) con base en la distribución $f_1(x)$ y $f_2(y)$ garantiza que todos los puntos del cuadrado tienen igual probabilidad de ser seleccionados.

El procedimiento para determinar una muestra (x, y) comienza con generar números aleatorios independientes entre 0 y 1, y a continuación localizándolos en los ejes x y y. Los números aleatorios de 0 a 1 se determinan con la siguiente distribución uniforme:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & 0 \le z \le 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En la tabla 18.1 se muestra una lista pequeña de números aleatorios (0, 1). Esos números se determinan con operaciones aritméticas especiales, que generen valores estadísticamente independientes con base en la distribución uniforme $f(z)$, como se explicará en la sección 18.4.

Dado un par de números aleatorios R_1 y R_2, se determina un punto aleatorio (x, y) en el cuadrado como sigue:

$$x = -4 + [6 - (-4)]R_1 = -4 + 10R_1$$
$$y = -3 + [7 - (-3)]R_2 = -3 + 10R_2$$

Para demostrar la aplicación del procedimiento, supongamos que R_1 y 0.0589 y $R_2 = 0.6733$, Entonces

$$x = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \times 0.0589 = -3.411$$
$$y = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \times 0.6733 = 3.733$$

TABLA 18.1

0.0589	0.3529	0.5869	0.3455	0.7900	0.6307
0.6733	0.3646	0.1281	0.4871	0.7698	0.2346
0.4799	0.7676	0.2867	0.8111	0.2871	0.4220
0.9486	0.8931	0.8216	0.8912	0.9534	0.6991
0.6139	0.3919	0.8261	0.4291	0.1394	0.9745
0.5933	0.7876	0.3866	0.2302	0.9025	0.3428
0.9341	0.5199	0.7125	0.5954	0.1605	0.6037
0.1782	0.6358	0.2108	0.5423	0.3567	0.2569
0.3473	0.7472	0.3575	0.4208	0.3070	0.0546
0.5644	0.8954	0.2926	0.6975	0.5513	0.0305

Este punto está dentro del círculo, porque

$$(-3.411 - 1)^2 + (3.733 - 2)^2 = 22.46 < 25$$

A continuación se investigará el efecto del muestreo aleatorio sobre la exactitud de la estimación del área del círculo. Se puede aumentar la fiabilidad de la estimación aumentando el tamaño de la muestra y/o usando replicaciones, réplicas o duplicaciones; son los mismos procedimientos que se emplean en los experimentos estadísticos ordinarios.

Como los cálculos correspondientes a cada muestra son sencillos, pero voluminosos y tediosos, la plantilla ch18Circle.xls (con macros VBA de Visual Basic) tiene por objeto hacer esos cálculos. Los datos incluyen el radio r del círculo y su centro, (cx, cy), junto con el tamaño de la muestra n y la cantidad de replicaciones N. El elemento *Steps* (pasos) en la celda E4 permite ejecutar varios tamaños de muestra en la misma corrida. Así, si $n = 30{,}000$ y *Steps* $= 3$, la plantilla producirá en forma automática resultados para $n = 30{,}000$, 60,000 y 90,000.

En la figura 18.2 se resumen los resultados para *Steps* $= 3$ y $N = 5$ réplicas. El área exacta es 78.54 cm^2, y en los resultados de Monte Carlo se ve que el área promedio estimada para los tres tamaños de muestra varía desde $\overline{A} = 78.533$ hasta $\overline{A} = 78.490$ cm^2. También se observa que la desviación estándar disminuye desde $s = 0.308$ para $n = 30{,}000$ hasta $s = 0.191$ para $n = 90{,}000$, indicio de que en general la exactitud de los resultados aumenta al aumentar el tamaño de la muestra.

Obsérvese que cada vez que se oprime el botón de comando `Press to Execute Monte Carlo`, se obtienen nuevas estimaciones, porque Excel refresca el generador de números aleatorios para usar una secuencia distinta.

Debido a la variación aleatoria en el resultado del experimento, es necesario expresar los resultados en forma de intervalo de confianza. Si A y s son la media y la varianza de N réplicas, entonces, para un nivel de confianza $\overline{A}$ el intervalo de confianza para el área real A es

$$\overline{A} - \frac{s}{\sqrt{N}}\, t_{\frac{\alpha}{2},N-1} \leq A \leq \overline{A} + \frac{s}{\sqrt{N}}\, t_{\frac{\alpha}{2},N-1}$$

El parámetro $t_{\frac{\alpha}{2},N-1}$ se determina con las tablas de distribución t, para un nivel de confianza α y $N - 1$ grados de libertad (véase la tabla t en el apéndice C). (Obsérvese que N es igual a la cantidad de réplicas, que es distinta de n, el tamaño de la muestra.) En términos del experimento que nos ocupa, interesa establecer el intervalo de confianza con base en el tamaño máximo de la muestra (es decir, $n = 90{,}000$). Para $N = 5$, $\overline{A} = 78.490$ cm^2 y $s = 0.191$ cm^2, $t_{0.025,4} = 2.776$, y el intervalo de confianza de 95% resultante es $78.25 \leq A \leq 78.73$. (En la

	B	C	D	E
1	**Monte Carlo Estimation of the Area of a Circle**			
2	**Input data**			
3	Nbr. Replications, N =	5		
4	Sample size, n =	30,000	Steps =	3
5	Radius, r =	5		
6	Center, cx =	1		
7	Center, cy =	2		
8	**Output results**			
9	Exact area =	78.540		
10	Press to Execute Monte Carlo			
11	Monte Carlo Calculations:			
12		n=30000	n=60000	n=90000
13	Replication 1	78.207	78.555	78.483
14	Replication 2	78.673	78.752	78.581
15	Replication 3	78.300	78.288	78.281
16	Replication 4	78.503	78.347	78.343
17	Replication 5	78.983	78.775	78.760
18				
19	Mean =	78.533	78.543	78.490
20	Std. Deviation =	0.308	0.225	0.191
21				
22	95% lower conf. limit =	78.151	78.263	78.253
23	95% upper conf. limit =	78.915	78.823	78.727

FIGURA 18.2

Resultados de la estimación Monte Carlo del área de un círculo obtenidos con Excel

plantilla de Excel se calcula en forma automática el intervalo de confianza de 95%.) Obsérvese que, en general, el valor de N debería ser 5 como mínimo, para obtener una exactitud razonable en la estimación del intervalo de confianza.

La descripción en el ejemplo 18.1-1 surgen dos preguntas acerca del experimento de simulación:

1. ¿De qué tamaño n debe ser la muestra?
2. ¿Cuántas réplicas N se necesitan?

En la teoría estadística hay varias fórmulas para determinar n y N, que dependen de la naturaleza del experimento de simulación así como del intervalo de confianza deseado. Sin embargo, como en cualquier experimento estadístico, la regla dorada es que los valores mayores de n y N se traducen en resultados de simulación más fiables. Al final, el tamaño de la muestra dependerá del costo correspondiente de llevar a cabo el experimento de simulación. Sin embargo, hablando con generalidad, se considera “adecuado” un tamaño de muestra que produzca una desviación estándar relativamente “pequeña”.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.1A

1. En el ejemplo 18.2-1 estime el área del círculo usando las dos primeras columnas de números aleatorios (0, 1) de la tabla 18.1. Por comodidad avance hacia abajo por cada columna, seleccionando primero R_1 y después R_2. ¿Cómo se compara esta estimación con las de la figura 18.2?

2. Suponga que la ecuación de un círculo es

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

a) Defina las distribuciones correspondientes $f(x)$ y $f(y)$ y a continuación indique cómo se determina un punto de muestra (x, y) usando el par aleatorio (0, 1) de números (R_1, R_2).

b) Use la plantilla de Excel para estimar el área para $n = 100{,}000$ y $N = 10$. A continuación calcule el intervalo de 95% de confianza correspondiente.

3. Use el muestreo Monte Carlo para estimar el área del lago en la figura 18.3. Base su estimación en las dos primeras columnas de números aleatorios de la tabla 18.1.

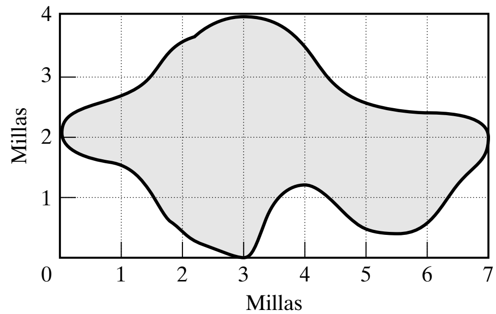


FIGURA 18.3
Mapa del lago para el problema 3, conjunto de problemas 18.1a

4. En un juego entre dos jugadores, Jan y Jim lanzan una moneda no cargada al aire, por turnos. Si el resultado es cara, Jan le paga a Jim \$10. En caso contrario, Jim le paga \$10 a Jan.

a) ¿Cómo se simula el juego como experimento Monte Carlo?

b) Haga el experimento con 5 réplicas de 10 lanzamientos cada una, para determinar lo que paga Jan. Use las cinco primeras columnas de números aleatorios (0, 1) en la tabla 18.1, donde cada columna corresponde a una réplica.

c) Determine un intervalo de 95% de confianza para las ganancias de Jan.

d) Compare el intervalo de confianza obtenido en c) con las ganancias teóricas de Jan.

5. Se tiene la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

a) Formule el experimento Monte Carlo para estimar la integral.

b) Use las cuatro primeras columnas de la tabla 18.1 para evaluar la integral con 4 réplicas de tamaño 5 cada una. Calcule un intervalo de 95% de confianza y compárelo con el valor exacto de la integral.

6. Simule cinco victorias o derrotas en el siguiente juego de dados. El jugador tira dos dados no cargados. Si la suma que resulta es 7 u 11, el jugador gana \$10. En caso contrario, el jugador anota la suma resultante (llamada *punto*) y sigue tirando los dados hasta que la suma resultante

coincida con el *punto* anotado, en cuyo caso el jugador gana \$10. Si se obtiene un 7, el jugador pierde \$10.

7. El tiempo de entrega de un pedido puede ser 1 o 2 días, con probabilidades iguales. La demanda *por día* puede tomar los valores 0, 1 y 2 y tienen las probabilidades respectivas de 0.2, 0.7 y 0.1. Use los números aleatorios de la tabla 18.1 (comenzando con la columna 1) para estimar la distribución conjunta de la demanda y del tiempo de entrega. A partir de la distribución conjunta estime la función de distribución de probabilidades de la demanda durante el tiempo de entrega. (*Sugerencia:* La demanda durante el tiempo de entrega puede tomar los valores discretos de 0 a 4.)

8. El experimento de la aguja de Buffon es el siguiente: se marca un plano horizontal con rectas paralelas separadas entre sí D cm. Se deja caer una aguja de longitud d cm ($d < D$) en el plano. El objetivo del experimento es determinar la probabilidad de que la aguja cruce una de las líneas, o la toque con uno de sus extremos. Defina

h = Distancia perpendicular del centro de la aguja hasta una línea (paralela)

θ = Ángulo de inclinación entre la aguja y una línea

a) Demuestre que la aguja tocará o cruzará una línea sólo si

$$h \leq \frac{d}{2}\,\text{sen}\,\theta,\ 0 \leq h \leq \frac{D}{2},\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

b) Diseñe el experimento Monte Carlo y determine un estimado de la probabilidad buscada.

c) Use Excel para obtener 4 réplicas de tamaño 10, cada una, de la probabilidad que se busca. Determine un intervalo de 95% de confianza para la estimación. Suponga que $D = 20$ cm y $d = 10$ cm.

d) Demuestre que la probabilidad teórica es

$$p = \frac{2d}{\pi D}$$

e) Use el resultado del punto c) junto con la fórmula del punto d) para estimar π.

18.2 TIPOS DE SIMULACIÓN

La ejecución actual de la simulación suele basarse en la idea de usar el muestreo conjuntamente con el método Monte Carlo. Es distinta porque se ocupa de estudiar el comportamiento de sistemas reales *como una función del tiempo*. Existen dos clases de modelos de simulación.

1. Modelos continuos, que manejan sistemas cuyo comportamiento cambia *continuamente* con el tiempo. Esos modelos suelen usar ecuaciones en diferencias y diferenciales para describir las interacciones entre los distintos elementos del sistema. Un ejemplo característico es el estudio de la dinámica demográfica mundial.

2. Modelos discretos, relacionados principalmente con el estudio de líneas de espera, cuyo objetivo es determinar medidas como el tiempo de espera promedio y el tamaño de la cola. Esas medidas sólo cambian cuando entra o sale un cliente al sistema. En todos los demás momentos nada sucede en el sistema, desde el punto de vista de reunir datos estadísticos. Los instantes en los que suceden los cambios, en puntos discretos en el tiempo, dan lugar al nombre de **simulación de evento discreto**.

En este capítulo se presentan las bases de la simulación de evento discreto, incluyendo una descripción de los componentes de un modelo de simulación, la recolección de las medidas estadísticas (o “los estadísticos”) de la simulación, y el aspecto estadístico del experimento de simulación. En el capítulo también se destaca el papel de la computadora y de los lenguajes de simulación en la ejecución de los modelos de simulación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.2A

1. Clasifique los casos siguientes, como discretos o continuos (o como una combinación de ambos). En cada uno especifique el objetivo de formular el modelo de simulación.

a) Los pedidos de un artículo llegan en forma aleatoria a un almacén. Un pedido que no se puede surtir de inmediato con la existencia disponible debe esperar hasta que lleguen nuevas remesas.

b) La población mundial está influida por la disponibilidad de recursos naturales, la producción de alimentos, las condiciones del ambiente, el nivel educativo, el cuidado de la salud y las inversiones de capital.

c) La mercancía llega en tarimas a un andén de recepción de una bodega automatizada. Las tarimas se cargan en una banda transportadora inferior, suben con un elevador hasta un transportador superior que mueve las tarimas hasta los corredores. En los corredores hay grúas que toman las tarimas del transportador y las ponen en sus lugares de almacenamiento.

2. Explique por qué está de acuerdo o no con la afirmación siguiente: “La mayor parte de los modelos de simulación de evento discreto se puede considerar, de una u otra forma, como sistemas de colas formados por *fuentes* desde donde se generan los clientes; las *colas* donde deben esperar los clientes, e *instalaciones* donde se da servicio a los clientes.”

18.3 ELEMENTOS DE SIMULACIÓN DE EVENTO DISCRETO

En esta sección se introduce el concepto de eventos, en la simulación, y se describe cómo se recopilan los datos estadísticos del sistema que se simula.

18.3.1 Definición genérica de eventos

Todas las simulaciones de evento discreto describen, en forma directa o indirecta, situaciones de colas en las que llegan los clientes, esperan en una cola si es necesario, y a continuación reciben su servicio para después salir del sistema. En general, todo modelo de evento discreto está formado por una red de colas interrelacionadas.

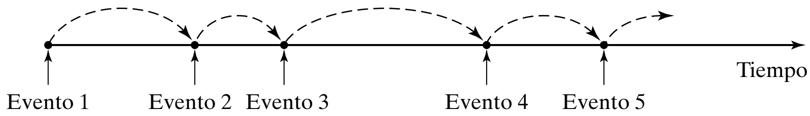
Dado que un modelo de evento discreto en realidad es un conjunto de colas, la recolección de medidas estadísticas de simulación (como longitud de la cola y estado de la instalación de servicio) sólo necesita hacerse cuando un cliente llega o sale del sistema. Esto quiere decir que hay dos eventos principales que controlan el modelo de simulación: las llegadas y las salidas. Son los dos únicos instantes en el tiempo que se deben examinar en el sistema. En todos los demás momentos no suceden cambios que afecten las medidas estadísticas del sistema.

Ejemplo 18.3-1

Metalco Jobshop recibe dos clases de trabajos: ordinarios y urgentes. Todos los trabajos se procesan en dos máquinas consecutivas con amplias zonas de reserva. Los trabajos urgentes siempre tienen prioridad sobre los trabajos ordinarios. Identifique los eventos de este caso.

FIGURA 18.4

Ejemplo de la ocurrencia de los eventos de la simulación en la escala de tiempo



Este caso consiste en dos colas consecutivas que corresponden a las dos máquinas. A primera vista uno podría inclinarse a identificar los eventos del caso como sigue:

```
A11: Un trabajo ordinario llega a la máquina 1.
A21: Un trabajo urgente llega a la máquina 1.
D11: Un trabajo ordinario sale de la máquina 1.
D21: Un trabajo urgente sale de la máquina 1.
A12: Un trabajo ordinario llega a la máquina 2.
A22: Un trabajo urgente llega a la máquina 2.
D12: Un trabajo ordinario sale de la máquina 2.
D22: Un trabajo urgente sale de la máquina 2.
```

Pero en realidad sólo se tienen exactamente dos eventos: una llegada de un trabajo (nuevo) al taller y una salida de un trabajo (terminado) de una máquina. Primero, obsérvese que los eventos *D*11 y *A*12 en realidad son uno solo. Lo mismo sucede con *D*21 y *A*22. A continuación, en la simulación de eventos se puede usar un evento (llegada o salida) para ambas clases de trabajos, y tan sólo "etiquetar" al evento con un **atributo** que identifique la clase de trabajo en ordinario o urgente. (En este caso se puede imaginar que el atributo es un *número de identificación personal*, y lo es realmente.) Según este razonamiento, los eventos del modelo se reducen a 1) una llegada *A* (al taller) y 2) una salida *D* (de una máquina). Las acciones relacionadas con el evento de salida dependerán de la máquina en la que sucedan.

Habiendo definido los elementos básicos de un modelo de simulación, indicaremos cómo se ejecuta el modelo. La figura 18.4 muestra la representación esquemática de ocurrencias típicas de eventos de la escala de tiempo de la simulación. Después de haber efectuado todas las acciones asociadas con un evento actual, la simulación avanza "saltando" al siguiente evento cronológico. En esencia, la ejecución de la simulación sucede en los instantes en que suceden los eventos.

¿Cómo determina la simulación el momento de ocurrencia de los eventos? Los eventos de llegada están separados por el tiempo entre llegadas (el intervalo entre llegadas sucesivas), y los eventos de salida son función del tiempo de servicio en la instalación. Esos tiempos pueden ser determinísticos (por ejemplo, un tren llega a una estación cada 5 minutos) o probabilísticos (por ejemplo, la llegada aleatoria de clientes a un banco). Si el tiempo entre eventos es determinista, la determinación de sus tiempos de ocurrencia es directa. Si es probabilístico se usa un procedimiento especial para muestrear a partir de la distribución correspondiente de probabilidades. Este punto se describirá en la siguiente sección.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.3A

1. Identifique los eventos discretos necesarios para simular el siguiente caso: llegan dos clases de trabajos, procedentes de fuentes distintas. Ambas clases se procesan en una sola máquina, y se da la prioridad a los trabajos que llegan de la primera fuente.
2. Los trabajos llegan con frecuencia constante a un sistema de transportador de carrusel. Si el servidor está inactivo cuando llega un trabajo a la estación, el trabajo se saca del transportador para

su procesamiento. En caso contrario, el carrusel continúa girando hasta que encuentre un servidor disponible. Un trabajo procesado se guarda en un área de embarque adyacente. Identifique los eventos discretos necesarios para simular este caso.

3. A un banco llegan automóviles por dos carriles, y cada carril tiene lugar para un máximo de cuatro vehículos. Si los dos carriles están llenos, los automóviles que llegan se van. Si en cualquier momento en un carril hay dos automóviles más que en el otro, el último vehículo de la fila más larga saltará a la última posición de la fila más corta. Esta instalación de servicio en automóvil atiende de las 8:00 A.M. a las 3:00 P.M. cada día hábil. Defina los eventos discretos para esta situación.

4. La cafetería de la escuela Elmdale despacha almuerzo de menú fijo en una bandeja a todos sus alumnos. Los alumnos llegan a la ventanilla de entrega cada 30 segundos. La recepción de cada bandeja con almuerzo tarda 18 segundos. Haga un mapa de los eventos de llegada y salida en la escala de tiempo, para los cinco primeros alumnos.

18.3.2 Muestreo a partir de distribuciones de probabilidades

La aleatoriedad se presenta en la simulación cuando el intervalo t entre eventos sucesivos es probabilístico. En esta sección se presentan tres métodos para generar muestras aleatorias sucesivas ($t = t_1, t_2, ...$) a partir de una distribución de probabilidades $f(t)$.

1. Método de la inversa.
2. Método de convolución.
3. Método de aceptación o rechazo.

El método de la inversa se presta en especial para manejar funciones analíticas de densidad de probabilidades, por ejemplo la exponencial y la uniforme. Los otros dos métodos tienen que ver con casos más complejos, como la distribución normal y la de Poisson. Los tres métodos tienen su base en el uso de números aleatorios uniformes (0, 1) independientes e idénticamente distribuidos.

Método de la inversa. Supongamos que se trata de obtener una muestra aleatoria x partiendo de la función de densidad de probabilidad (continua o discreta) $f(x)$. En el método inverso se determina primero una expresión cerrada de la función de densidad acumulada $F(x) = P\{y \leq x\}$, en donde $0 \leq F(x) \leq 1$ para todos los valores definidos de y. Como R es una variable aleatoria obtenida de una distribución uniforme (0, 1), y suponiendo que F^{-1} es la inversa de F, los pasos del método son los siguientes:

Paso 1. Generar el número aleatorio (0, 1), R.
Paso 2. Calcular la muestra deseada, $x = F^{-1}(R)$.

En la figura 18.5 se ilustran los procedimientos para una distribución aleatoria continua y para otra función aleatoria discreta. El valor aleatorio uniforme (0, 1), R_1, se proyecta desde la escala vertical de $F(x)$ para obtener el valor deseado x_1 de la muestra, en la escala horizontal.

La validez del método propuesto descansa en demostrar que la variable aleatoria $z = F(x)$ está uniformemente distribuida en el intervalo $0 \leq z \leq 1$, como se hará en el siguiente teorema.

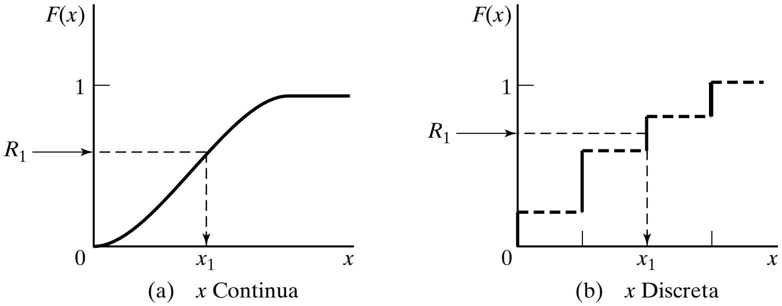


FIGURA 18.5
Muestreo de una distribución de probabilidades con el método de la inversa

Teorema 18.3-1. *Dada la función de densidad acumulada $F(x)$ de la variable aleatoria x, $-\infty \leq x \leq \infty$, la variable aleatoria $z = F(x)$, $0 \leq z \leq 1$ tiene la siguiente función uniforme 0-1 de densidad:*

$$g(z) = 1, \; 0 \leq z \leq 1$$

Demostración. La variable aleatoria está uniformemente distribuida si, y sólo si

$$P\{z \leq Z\} = Z, \; 0 \leq Z \leq 1$$

Este resultado se aplica a $F(x)$, porque

$$P\{z \leq Z\} = P\{F(x) \leq Z\} = P\{x \leq F^{-1}(Z)\} = F[F^{-1}(Z)] = Z$$

Además, $0 \leq Z \leq 1$ porque $0 \leq P\{z \leq Z\} \leq 1$.

Ejemplo 18.3-2 (Distribución exponencial)

El tiempo t entre llegadas de clientes a una instalación se representa con una distribución exponencial con media $E\{t\} = \frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo; es decir,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0$$

Determinar una muestra aleatoria de t a partir de $f(t)$.

La función de densidad acumulada es la siguiente:

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}, \; t > 0$$

Al igualar $R = F(t)$ se puede despejar t, y se llega a

$$t = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(1 - R)$$

Como $1 - R$ es el complemento de R, se puede reemplazar a $\ln(1 - R)$ por $\ln(R)$.

En términos de simulación, el resultado indica que las llegadas están distanciadas t unidades de tiempo. Por ejemplo, si $\lambda = 4$ clientes por hora y $R = 0.9$, el tiempo que transcurre hasta la ocurrencia de la siguiente llegada se calcula como sigue:

$$t_1 = -\left(\frac{1}{4}\right)\ln(1 - 0.9) = 0.577 \text{ hora} = 34.5 \text{ minutos}$$

Los valores de R usados para obtener muestras sucesivas se deben seleccionar *en forma aleatoria* de una distribución uniforme (0, 1). En la sección 18.4 se indicará cómo generar esos valores aleatorios (0, 1) durante el curso de la simulación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.3B

1. En el ejemplo 18.3-2 suponga que el primer cliente llega cuando el tiempo es 0. Use los primeros tres números aleatorios de la columna 1, tabla 18.1, para generar los tiempos de llegada de los tres clientes siguientes, y haga una gráfica en la escala de tiempo, de los eventos que resulten.

2. *Distribución uniforme*. Suponga que el tiempo necesario para fabricar una parte en una máquina se describe con la siguiente distribución uniforme:

$$f(t) = \frac{1}{b - a},\ a \leq t \leq b$$

Deduzca una ecuación para el tiempo t de la muestra, dado el número aleatorio R.

3. En un taller con una sola máquina se reciben trabajos en forma aleatoria. El tiempo entre llegadas tiene distribución exponencial, con una media de 2 horas. El tiempo necesario para procesar un trabajo tiene una distribución uniforme entre 1.1 y 2 horas. Suponiendo que el primer trabajo llegue cuando el tiempo es 0, determine el tiempo de llegada y de salida para los cinco primeros trabajos, usando los números aleatorios (0, 1) de la columna 1, tabla 18.1.

4. La demanda de una parte de repuesto costosa, para un avión de pasajeros, es de 0, 1, 2 o 3 unidades por mes, con probabilidades respectivas de 0.2, 0.3, 0.4 y 0.1. El taller de mantenimiento de la aerolínea comienza a trabajar con una existencia de 5 unidades, y se desea regresar el nivel a 5 unidades inmediatamente cuando baje a menos de 3 unidades.

a) Describa el procedimiento para determinar muestras de la demanda.

b) ¿Cuántos meses pasarán hasta el primer reabastecimiento? Use valores sucesivos de R de la primera columna en la tabla 18.1.

5. En una simulación, se inspeccionan aparatos de TV para ver sus posibles defectos. Hay un 80% de probabilidades de que una unidad pase la inspección, en cuyo caso se manda a empaque. En caso contrario, la unidad se repara. El caso se puede representar en forma simbólica en una de dos maneras:

```
goto REPARAR/0.2, EMPACAR/0.8
goto EMPACAR/0.8, REPARAR/0.2
```

Estas dos representaciones parecen ser equivalentes. Sin embargo, cuando se aplica determinada sucesión de números aleatorios (0, 1) a las dos representaciones, pueden resultar distintas decisiones (REPARAR o EMPACAR). Explique por qué.

6. Un jugador lanza una moneda varias veces, hasta que sale una cara. La recompensa correspondiente es 2^n, donde n es la cantidad de lanzamientos hasta que sale la cara.

a) Determine el procedimiento de muestreo del juego.

b) Use los números aleatorios de la columna 1, tabla 18.1, para determinar la recompensa acumulada cuando salgan dos caras.

7. *Distribución triangular.* En simulaciones, la falta de datos puede hacer imposible la determinación de la distribución de probabilidades correspondiente a una actividad de simulación. En la mayor parte de esos casos podrá facilitarse describir la variable deseada estimando sus valores mínimo, más probable y máximo. Estos tres valores son suficientes para definir una distribución triangular, que entonces se puede usar como una estimación "gruesa" de la distribución real.

a) Deduzca la fórmula para muestrear de la siguiente distribución triangular, cuyos parámetros son a, b y c, siendo $a < b < c$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x - a)}{(b - a)(c - a)}, & a \leq x \leq b \\ \dfrac{2(c - x)}{(c - b)(c - a)}, & b \leq x \leq c \end{cases}$$

b) Genere tres muestras de una distribución triangular con parámetros (1, 3, 7) usando los tres primeros números aleatorios de la columna 1, tabla 18.1.

8. Una distribución de probabilidades consiste en un rectángulo flanqueado a su derecha e izquierda por dos triángulos rectángulos simétricos. Los intervalos respectivos del triángulo de la izquierda, el rectángulo y el triángulo de la derecha son $[a, b]$, $[b, c]$ y $[c, d]$, $a < b < c < d$. Cada triángulo tiene la misma altura que el rectángulo.

a) Formule el procedimiento de muestreo.

b) Determine cinco muestras con $(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 6)$ usando los primeros números aleatorios de la columna 1, tabla 18.1.

9. *Distribución geométrica*. Indique cómo se puede obtener una muestra aleatoria a partir de la siguiente distribución geométrica:

$$f(x) = p(1 - p)^x, \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

El parámetro x es la cantidad de fallas (de Bernoulli) hasta cuando ocurre un éxito y p es la probabilidad de un éxito, $0 < p < 1$. Genere cinco muestras para $p = 0.6$ usando los primeros 5 números aleatorios de la columna 1 en la tabla 18.1.

10. *Distribución de Weibull*. Indique cómo se puede obtener una muestra aleatoria de la distribución de Weibull, cuya función densidad de probabilidades se define como sigue:

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, \ x > 0$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de la forma y $\beta > 0$ es el parámetro de la escala.

Método de convolución. La idea del método de convolución es expresar la muestra que se desea como suma estadística de otras variables aleatorias fáciles de muestrear. Entre esas distribuciones, la de Erlang y la de Poisson son típicas, cuya muestra se puede obtener a partir de muestras con distribución exponencial.

Ejemplo 18-3.3 (Distribución de Erlang)

La variable aleatoria de m-Erlang se define como la suma estadística (convoluciones) de m variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas. Sea y la variable aleatoria de m-Erlang; entonces

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

en donde y_i, $i = 1, 2, ..., m$ son variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas, cuya función de densidad de probabilidades se define como sigue:

$$f(y_i) = \lambda e^{-\lambda y_i}, \ y_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

Del ejemplo 18.3-2, la i-ésima muestra de distribución exponencial es

$$y_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_i), \ i = 1, 2, \ldots, m$$

Entonces la muestra m-Erlang se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\{\ln(R_1) + \ln(R_2) + \ldots + \ln(R_m)\} \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_1R_2\ldots R_m) \end{aligned}$$

Para ilustrar el uso de la fórmula, suponga que $m = 3$ y $\lambda = 4$ eventos por hora. Los tres primeros números aleatorios de la columna 1 en la tabla 18.1 dan como resultado $R_1R_2R_3 = (0.0589)(0.6733)(0.4799) = 0.0190$, que da como resultado

$$y = -(\tfrac{1}{4})\ln(0.019) = 0.991 \text{ hora}$$

Ejemplo 18.3-4 (Distribución de Poisson)

En la sección 17.3.1 se muestra que si la distribución del tiempo entre la ocurrencia de eventos sucesivos es exponencial, la distribución de la cantidad de eventos por unidad de tiempo debe ser de Poisson, y viceversa. Se usará esta relación para muestrear la distribución de Poisson.

Se supone que la distribución de Poisson tiene un valor medio de λ eventos por unidad de tiempo. Entonces, el tiempo entre eventos es exponencial, con una media $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo. Eso quiere decir que una muestra de Poisson n se efectuará durante t unidades de tiempo si, y sólo si

Periodo hasta que suceda el evento $n \leq t <$ Periodo hasta que suceda el evento $n + 1$

Esta condición se traduce en

$$t_1 + t_2 + \ldots t_n \leq t < t_1 + t_2 + \ldots t_{n+1},\ n > 0$$
$$0 \leq t < t_1,\ n = 0$$

en donde t_i, $i = 1, 2, ..., n$ es una muestra de la distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$. A partir del resultado del ejemplo 18.3-3, se tiene

$$-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_1R_2\ldots R_n) \leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_1R_2\ldots R_{n+1}),\ n > 0$$
$$0 \leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_1),\ n = 0$$

que se reduce a

$$R_1R_2\ldots R_n \geq e^{-\lambda t} > R_1R_2\ldots R_{n+1},\ n > 0$$
$$1 \geq e^{-\lambda t} > R_1,\ n = 0$$

Para ilustrar la implementación del proceso de muestreo, supongamos que $\lambda = 4$ eventos por hora, y que se quiere obtener una muestra para un periodo de $t = 0.5$ hora. Esto da como resultado $e^{-\lambda t} = 0.1353$. Se usan los números aleatorios de la columna 1 en la tabla 18.1, y se ve que $R_1 = 0.0589$ es menos que $e^{-\lambda t} = 0.1353$. Por consiguiente, la muestra correspondiente es $n = 0$.

Ejemplo 18.3.5 (Distribución normal)

El teorema del límite central (véase la sección 12.4.4) establece que la suma (la convolución) de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se vuelve asintóticamente normal cuando n se vuelve suficientemente grande. Se usará este resultado para generar muestras de la distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

Se define a

$$x = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

La variable aleatoria es asintóticamente normal de acuerdo con el teorema del límite central. Como el número aleatorio (0, 1) uniforme R tiene una media de $\frac{1}{2}$ y varianza de $\frac{1}{12}$, entonces x tiene promedio $\frac{n}{2}$ y varianza $\frac{n}{12}$. Así, una muestra aleatoria y de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, $N(\mu, \sigma)$, se puede calcular a partir de x como sigue:

$$y = \mu + \sigma\left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)$$

En la práctica se supone que $n = 12$ por comodidad, con lo que la ecuación se reduce a

$$y = \mu + \sigma(x - 6)$$

Para ilustrar el uso de este método supondremos que se desea generar una muestra a partir de $N(10, 2)$ (media $\mu = 10$ y desviación estándar $\sigma = 2$). Al sumar los primeros 12 números aleatorios en las columnas 1 y 2 de la tabla 18.1 se obtiene $x = 6.1094$. Entonces, $y = 10 + 2(6.1094 - 6) = 10.2188$.

La desventaja de este proceso está en que requiere generar 12 números aleatorios para cada muestra normal, lo cual es ineficiente desde el punto de vista computacional. Un procedimiento más eficiente es usar la transformación

$$x = \sqrt{-2\ln(R_1)}\cos(2\pi R_2)$$

Box y Muller (1958) demuestran que x tiene distribución normal $N(0, 1)$. Entonces $y = \mu + \sigma x$ producirá una muestra a partir de $N(\mu, \sigma)$. El procedimiento nuevo es eficiente, porque además Box y Muller demuestran que con esta fórmula se producirá otra muestra $N(0, 1)$ sólo reemplazando $\cos(2\pi R_2)$ por $\text{sen}(2\pi R_2)$. Eso significa que dos números aleatorios, R_1 y R_2, generan *dos* muestras $N(0, 1)$.

Para ilustrar la implementación del procedimiento de Box-Muller a la distribución normal $N(10, 2)$, los dos primeros números aleatorios de la columna 1 en la tabla 18.1 dan como resultado las siguientes muestras $N(0, 1)$:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln(0.0589)}\cos(2\pi \times 0.6733) \approx -1.103$$
$$x_2 = \sqrt{-2\ln(0.0589)}\,\text{sen}(2\pi \times 0.6733) \approx -2.109$$

Entonces, las muestras $N(10, 2)$ correspondientes son

$$y_1 = 10 + 2(-1.103) = 7.794$$
$$y_2 = 10 + 2(-2.109) = 5.782$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.3C[1]

1. En el ejemplo 18.8-3 calcule una muestra de Erlang, dadas $m = 4$ y $\lambda = 5$ eventos por hora.
2. En el ejemplo 18.3-4, genere muestras de Poisson durante un periodo de 1 hora, si la media de Poisson es 5 eventos por hora.
3. En el ejemplo 18.4-5, genere dos muestras a partir de $N(8, 1)$ usando el método de convolución y también el método de Box-Muller.
4. Los trabajos le llegan al taller Metalco siguiendo una distribución de Poisson, con una media de seis por día. Los trabajos recibidos se asignan a los cinco centros de maquinado del taller en base

[1]En todos los problemas de este conjunto use los números aleatorios de la tabla 18.1, comenzando con la columna 1.

estrictamente rotativa. Determine una muestra del intervalo entre la llegada de los trabajos al primer centro de maquinado.

5. Las calificaciones ACT de la generación saliente de la Secundaria Springdale tienen distribución normal con una media de 27 puntos y desviación estándar de 3 puntos. Suponga que se toma una muestra aleatoria de seis egresados de esa generación. Use el método de Box-Muller para determinar la media y la desviación estándar de la muestra.
6. Yataha, profesor de psicología, está haciendo un experimento de aprendizaje en el que se adiestran ratones para que encuentren el camino por un laberinto restringido. La base del laberinto es un cuadrado. Un ratón entra al laberinto en una de las cuatro esquinas y debe encontrar el camino para salir en el mismo punto donde entró. El diseño del laberinto es tal que el ratón debe pasar por cada una de las otras tres esquinas exactamente una vez antes de salir. Los diversos caminos del laberinto unen las cuatro esquinas en un orden estrictamente en el sentido de las manecillas del reloj. El profesor Yataha estima que el tiempo que tarda el ratón en llegar a una esquina desde otra tiene una distribución uniforme entre 10 y 20 segundos, dependiendo de la trayectoria que se tome. Formule un procedimiento de muestreo para el tiempo que pasa el ratón en el laberinto.
7. En el problema 6 suponga que una vez que sale un ratón del laberinto, otro entra en el mismo instante. Formule un procedimiento de muestreo para la cantidad de ratones que salen del laberinto en 5 minutos.
8. *Distribución binomial negativa* (*de Pascal*). Indique cómo se puede determinar una muestra aleatoria a partir de la muestra binomial negativa cuya distribución es

$$f(x) = C_x^{r+x-1} p^r (1-p)^x,\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

en donde x es la cantidad de fallas hasta que sucede el r-ésimo éxito en una secuencia de intentos independientes de Bernoulli, y p es la probabilidad de éxito, $0 < p < 1$. (*Sugerencia:* la distribución binomial negativa es la convolución de muestras independientes con distribución geométrica. Véase el problema 9, conjunto 18.3b.)

Método de aceptación o rechazo. El método de aceptación o rechazo está diseñado para funciones complicadas de distribución de probabilidades que no pueden manejarse con los métodos anteriores. La idea general del método es reemplazar la función complicada de densidad de probabilidades, $f(x)$, por una función densidad de probabilidades "representante" $h(x)$, más fácil de manejar analíticamente. A continuación se pueden usar muestras de $h(x)$ para muestrear la función original $f(x)$ de densidad de probabilidades.

Se define la **función dominante** $g(x)$ tal que domine a $f(x)$ en todo su intervalo, esto es,

$$g(x) \geq f(x),\ -\infty < x < \infty$$

A continuación se define $h(x)$, la función densidad de probabilidades "representante", normalizando a $g(x)$ como sigue:

$$h(x) = \frac{g(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)d(y)},\ -\infty < x < \infty$$

Por consiguiente, los pasos del método de aceptación o rechazo son:

Paso 1. Obtener una muestra $x = x_1$ de $h(x)$, usando la inversa o el método de convolución.

Paso 2. Obtener un número aleatorio R (0, 1).

Paso 3. Si $R \leq \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$, aceptar a x_1 como una muestra de $f(x)$. En caso contrario desechar a x_1 y regresar al paso 1.

La validez del método se basa en la siguiente igualdad:

$$P\left\{x \leq a | x = x_1 \text{ se acepta}, -\infty < x_1 < \infty\right\} = \int_{-\infty}^{a} f(y)dy, -\infty < a < \infty$$

Este enunciado de probabilidad indica que la muestra $x = x_1$ que satisfaga la condición del paso 3 en realidad es una muestra de $f(x)$, la función densidad de probabilidades original, que es lo que se buscaba.

La eficiencia el método propuesto se amplía al decrecer la probabilidad de rechazo del paso 3. Esta probabilidad depende de la elección específica de la función dominante $g(x)$ y debe disminuir con la selección de una $g(x)$ que "domine" con más estrechez a $f(x)$.

Ejemplo 18.3-6 (Distribución beta)

Aplicar el método de aceptación o rechazo a la siguiente distribución beta:

$$f(x) = 6x(1 - x), 0 \leq x \leq 1$$

La figura 18.6 muestra $f(x)$ y una función dominante $g(x)$.

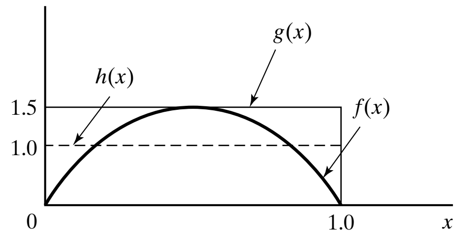


FIGURA 18.6
Función dominante, $g(x)$, para la distribución beta $f(x)$

La altura de la función dominante $g(x)$ es igual al máximo de $f(x)$, que está en $x = 0.5$. Así, la altura del rectángulo es $f(0.5) = 1.5$. Esto quiere decir que

$$g(x) = 1.5, 0 \leq x \leq 1$$

La función representante de densidad de probabilidades, $h(x)$ también se ve en la figura 18.6, y se calcula como sigue:

$$h(x) = \frac{g(x)}{\text{Área bajo } g(x)} = \frac{1.5}{1 \times 1.5} = 1, 0 \leq x \leq 1$$

En los pasos que siguen se demostrará el proceso usando la secuencia aleatoria (0, 1) de la tabla 18.1.

Paso 1. $R = 0.0589$ produce la muestra $x = 0.0589$ a partir de $h(x)$.

Paso 2. $R = 0.6733$.

Paso 3. Como $\frac{f(0.0589)}{g(0.0589)} = \frac{0.3326}{1.5} = 0.2217$ es menor que $R = 0.6733$, se acepta la muestra $x_1 = 0.0589$.

Para obtener una segunda muestra se continúa como sigue:

Paso 1. Al usar $R = 0.4799$ se obtiene $x = 0.4799$ a partir de $h(x)$.

Paso 2. $R = 0.9486$.

Paso 3. Como $\frac{f(0.4799)}{g(0.4799)} = 0.9984$ es mayor que $R = 0.9486$, se rechaza $x = 0.4799$ como muestra válida de beta. Esto quiere decir que se deben repetir los pasos con números aleatorios "frescos" hasta satisfacer la condición del paso 3.

La eficiencia del método de aceptación o rechazo se refuerza seleccionando una función dominante $g(x)$ que "cubra" a $f(x)$ lo más estrechamente posible y que al mismo tiempo produzca una función representante $h(x)$ manejable analíticamente. Por ejemplo, el método será más eficiente si se sustituye la función dominante rectangular $g(x)$ de la figura 18.5 por una función de pirámide escalonada (véase como ejemplo el problema 2, conjunto 18.3d). Mientras mayor cantidad de escalones tenga, $g(x)$ dominará más estrechamente a $f(x)$ y en consecuencia la probabilidad de aceptar una muestra será mayor. Sin embargo, por lo general una función dominante "ajustada" implica cálculos adicionales que, si son demasiados, pueden perder los ahorros obtenidos al aumentar la probabilidad de aceptación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.3D

1. En el ejemplo 18.3-6 continúe los pasos del procedimiento hasta obtener una muestra válida. Use los números aleatorios (0, 1) de la tabla 18.1 en el mismo orden en que se usan en el ejemplo.
2. En el caso de la función densidad de probabilidades beta, en el ejemplo 18.3-6, determine una función dominante que sea piramidal de dos escalones $g(x)$ con dos saltos iguales, cada uno de altura $\frac{1.5}{2} = 0.75$. Obtenga una muestra beta con base en la nueva función dominante usando la misma secuencia aleatoria (0, 1) de la tabla 18.1 que se usó en el ejemplo 18.3-6. La conclusión, en general, es que una función dominante más estrecha aumentará la probabilidad de aceptación. Sin embargo vea cómo aumenta la cantidad de cálculos correspondientes con la nueva función.
3. Determine las funciones $g(x)$ y $h(x)$ para aplicar el método de aceptación o rechazo a la función siguiente:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x) + \cos(x)}{2},\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

   Use los números aleatorios (0, 1) de la columna 1, en la tabla 18.1, para generar dos muestras a partir de $f(x)$. [*Sugerencia:* por comodidad, use una $g(x)$ rectangular en el intervalo definido de $f(x)$.]
4. El tiempo entre llegadas de clientes a HairKare se describe con la distribución siguiente:

$$f_1(t) = \frac{k_1}{t},\ 12 \leq t \leq 20$$

   El tiempo que tarda un corte de pelo se representa con la siguiente distribución:

$$f_2(t) = \frac{k_2}{t^2},\ 18 \leq t \leq 22$$

   Las constantes k_1 y k_2 se determinan de tal modo que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ sean funciones de densidad de probabilidades. Aplique el método de aceptación o rechazo (y los números aleatorios de la tabla 18.1) para determinar cuándo saldrá de HairKare el primer cliente y cuándo llegará el siguiente. Suponga que el primer cliente llega cuando $T = 0$.

18.4 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Los números aleatorios distribuidos uniformemente en (0, 1) [(o "números aleatorios (0, 1)"] desempeñan un papel clave en muestreos de distribuciones. Los números aleatorios (0, 1) verdaderos sólo se pueden generar con dispositivos electrónicos. Sin embargo, como los modelos de simulación se ejecutan en computadora, el empleo de dispositivos electrónicos para generar números aleatorios es demasiado lento para esos fines. Además, los dispositivos electrónicos se activan con leyes del azar, y en consecuencia es imposible reproducir a voluntad la misma sucesión de números aleatorios. Esto es importante porque para corregir, verificar y validar el modelo de simulación se suele requerir la duplicación de la misma sucesión de números aleatorios.

La única forma práctica de generar números aleatorios (0, 1) para usarse en simulación está basada en operaciones aritméticas. Tales números no son verdaderamente aleatorios porque pueden ser generados con anticipación. Por lo que es más apropiado referirse a ellos como **números pseudoaleatorios**.

La operación aritmética más común para generar números aleatorios (0, 1) es el **método congruente multiplicativo**. Dados los parámetros u_0, b, c y m, se puede generar un número pseudoaleatorio R_n con las fórmulas:

$$u_n = (bu_{n-1} + c) \bmod (m),\ n = 1, 2, \ldots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m},\ n = 1, 2, \ldots$$

Al valor inicial u_0 se le suele llamar **semilla** del generador.

En Law y Kelton (2000) se pueden encontrar variaciones del método congruente multiplicativo que mejoran la calidad del generador.

Ejemplo 18.4-1

Genere tres números aleatorios basados en el método congruente multiplicativo usando los siguientes valores iniciales: $b = 9$, $c = 5$, $u_0 = 11$ y $m = 12$.

$$u_1 = (9 \times 11 + 5) \bmod 12 = 8,\ R_1 = \frac{8}{12} = 0.6667$$

$$u_2 = (9 \times 8 + 5) \bmod 12 = 5,\ R_2 = \frac{5}{12} = 0.4167$$

$$u_3 = (9 \times 5 + 5) \bmod 12 = 2,\ R_3 = \frac{2}{12} = 0.1667$$

Para mayor comodidad, la plantilla ch18RandomNumberGenerator.xls de Excel está diseñada para efectuar los cálculos congruentes multiplicativos. La figura 18.7 muestra la sucesión correspondiente a los parámetros de este ejemplo. Observe con cuidado que la longitud del ciclo es 4, exactamente, y después de lo cual se repite esa sucesión. La conclusión en este caso es que la elección de u_0, b, c y m es crítica para determinar la calidad (estadística) del generador y su longitud de ciclo. Se debe entonces usar un generador fiable y ya probado. Casi todos los programas comerciales tienen incorporados generadores fiables de números aleatorios.

	A	B
1	**Multiplicative Congruential Method**	
2	**Input data**	
3	b =	9
4	c =	5
5	u0 =	11
6	m =	12
7	How many numbers?	10
8	**Output results**	
9	**Press to Generate Sequence**	
10	Generated random numbers:	
11	1	0.66667
12	2	0.41667
13	3	0.16667
14	4	0.91667
15	5	0.66667
16	6	0.41667
17	7	0.16667
18	8	0.91667
19	9	0.66667
20	10	0.41667

FIGURA 18.7

Números aleatorios obtenidos con Excel, para los datos del ejemplo 18.4-1

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.4A

1. Use la plantilla ch18RandomNumberGenerator.xls de Excel para observar el cambio en la longitud de ciclo del generador. Use el siguiente conjunto de parámetros y compare los resultados con los del ejemplo 18.4-1:

$$b = 17,\ c = 111,\ u_0 = 7,\ m = 103$$

2. Busque un generador de números aleatorios de su computadora y úselo para generar 1000 números aleatorios (0, 1). El histograma de los valores resultantes (obtenido con la herramienta histograma de Microsoft; véase la sección 12.5) y convénzase visualmente de que los números aleatorios se apeguen en forma razonable a la distribución uniforme (0, 1). En realidad, para probar bien la sucesión, necesitaría aplicar las siguientes pruebas: bondad de ajuste con ji cuadrada (véase la sección 12.6), pruebas de independencia de funcionamiento en corridas y prueba de correlación (véase los detalles en Law y Kelton [2000]).

18.5 MECÁNICA DE LA SIMULACIÓN DISCRETA

En esta sección se detalla cómo se recopilan las medidas estadísticas (o "los estadísticos") típicas en un modelo de simulación. El vehículo de la explicación será un modelo de una sola cola. En la sección 18.5.1 se usará un ejemplo numérico para detallar las acciones y cálculos que se hacen en un modelo de cola con un solo servidor. Por lo tedioso de los cálculos que tipifican la ejecución de un modelo de simulación, en la sección 18.5.2 se indica cómo se representa el modelo de un solo servidor, y cómo se ejecuta, usando una hoja de cálculo de Excel.

18.5.1 Simulación manual de un modelo con un servidor

El tiempo entre llegadas de clientes a HairKare Barbershop tiene distribución exponencial con una media de 15 minutos. En el local hay un solo peluquero, y tarda de 10 a 15 minutos, con distribución uniforme, para terminar un corte de pelo. A los clientes se les atiende con el

sistema FIFO (*first-in, first-out*, "primero en llegar, primero en salir"). El objetivo de la simulación es calcular las siguientes medidas de desempeño:

1. La utilización promedio del local.
2. La cantidad promedio de clientes en espera.
3. El tiempo de espera promedio de un cliente en la cola.

La lógica del modelo de simulación se puede describir en términos de las acciones asociadas con sus eventos de llegada y de salida.

Evento de llegada.

1. Genere y guarde cronológicamente la hora de llegada del siguiente cliente (= hora de simulación actual + tiempo entre llegada).
2. Si la instalación (el peluquero) está inactiva
   a) Inicie el servicio y declare ocupada la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación.
   b) Genere y guarde cronológicamente la hora de salida del cliente (= hora de simulación actual + tiempo de servicio).
3. Si la instalación está ocupada, ponga al cliente en la línea de espera y actualice las estadísticas de la cola.

Evento de salida.

1. Si la cola está vacía, declare inactiva a la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación.
2. Si la cola no está vacía
   a) Seleccione un cliente de la cola y colóquelo en la instalación. Actualice las estadísticas de la cola y de utilización de la instalación.
   b) Genere y guarde cronológicamente la hora de salida del cliente (= hora de simulación actual + tiempo de servicio).

Según los datos del problema, el tiempo entre llegadas tiene distribución exponencial con una media de 15 minutos, y el tiempo de servicio tiene distribución uniforme entre 10 y 15 minutos. Si p y q representan muestras aleatorias de tiempos entre llegadas y de servicio, entonces, como se explicó en la sección 18.3.2 se obtiene

$$p = -15\ln(R) \text{ minutos}, \ 0 \leq R \leq 1$$

$$q = 10 + 5R \text{ minutos}, \ 0 \leq R \leq 1$$

Para fines de este ejemplo usaremos R de la tabla 18.1, comenzando con la columna 1. También usaremos el símbolo T para representar la simulación de la hora indicada en el reloj. Además supondremos que el primer cliente llega cuando $T = 0$, y que la instalación comienza vacía.

Como los cálculos de simulación suelen ser voluminosos y tediosos, la simulación se limitará a las primeras 5 llegadas. El ejemplo tiene por objeto cubrir todas las situaciones posibles que se puedan presentar en el curso de la simulación. Después en la sección presentaremos la plantilla ch18SingleServerSimulator.xls de Excel, que le permite experimentar con el modelo sin necesidad de hacer cálculos a mano.

Llegada del cliente 1 cuando $T = 0$. Generar la llegada del cliente 2 a los

$$T = 0 + p_1 = 0 + [-15 \ln(0.0589)] = 42.48 \text{ minutos}$$

Como la instalación está inactiva cuando $T = 0$, el cliente 1 inicia el servicio de inmediato. La hora de salida se calcula como sigue:

$$T = 0 + q_1 = 0 + (10 + 5 \times 0.6733) = 13.37 \text{ minutos}$$

La lista *cronológica* de los eventos futuros es entonces

Hora, T	Evento
13.37	Salida del cliente 1
42.48	Llegada del cliente 2

Salida del cliente 1 cuando $T = 13.37$. Como la instalación está vacía, se declara inactiva. Al mismo tiempo se anota que la instalación ha estado ocupada entre $T = 0$ y $T = 13.37$ minutos. La lista actualizada de eventos futuros es

Hora, T	Evento
42.48	Llegada del cliente 2

Llegada del cliente 2 cuando $T = 42.48$. El cliente 3 llegará a los

$$T = 42.48 + [-15 \ln(0.4799)] = 53.49 \text{ minutos}$$

Como la instalación está inactiva, el cliente 2 inicia el servicio y la instalación se declara ocupada. La hora de salida es

$$T = 42.48 + (10 + 5 \times 0.9486) = 57.22 \text{ minutos}$$

La lista de eventos futuros está actualizada

Hora, T	Evento
53.49	Llegada del cliente 3
57.22	Salida del cliente 2

Llegada del cliente 3 cuando $T = 53.49$. El cliente 4 llegará a los

$$T = 53.49 + [-15 \ln(0.6139)] = 60.81 \text{ minutos}$$

Como en ese momento la instalación está ocupada (hasta que $T = 57.22$), el cliente 3 se forma en la cola cuando $T = 53.49$. La lista actualizada de eventos futuros es

Hora, T	Evento
57.22	Salida del cliente 2
60.81	Llegada del cliente 4

Salida del cliente 2 cuando $T = 57.22$. El cliente 3 sale de la cola e inicia su servicio. Su tiempo de espera fue

$$W_3 = 57.22 - 53.49 = 3.73 \text{ minutos}$$

La hora de salida es

$$T = 57.22 + (10 + 5 \times 0.5933) = 70.19 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de los eventos futuros es

Hora, T	Evento
60.81	Llegada del cliente 4
70.19	Salida del cliente 3

Llegada del cliente 4 cuando $T = 60.81$. El cliente 5 llegará a los

$$T = 60.81 + [-15\ln(0.9341)] = 61.83 \text{ minutos}$$

Como la instalación está ocupada hasta que $T = 70.19$, el cliente 4 se pone en la cola. La lista actualizada de los eventos futuros es

Hora, T	Evento
61.83	Llegada del cliente 5
70.19	Salida del cliente 3

Llegada del cliente 5 cuando $T = 61.83$. La simulación sólo se limitará a 5 llegadas, por lo que no se genera la llegada del cliente 6. La instalación sigue ocupada y en consecuencia el cliente se forma en la cola cuando $T = 61.83$. La lista actualizada de eventos es

Hora, T	Evento
70.19	Salida del cliente 3

Salida del cliente 3 cuando $T = 70.19$. El cliente 4 sale de la cola para iniciar su servicio. Su tiempo de espera fue

$$W_4 = 70.19 - 60.81 = 9.38 \text{ minutos}$$

La hora de salida es

$$T = 70.19 + [10 + 5 \times 0.1782] = 81.08 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

Hora, T	Evento
81.08	Salida del cliente 4

Salida del cliente 4 cuando $T = 81.08$. El cliente 5 sale de la cola para iniciar su servicio. Su tiempo de espera fue

$$W_5 = 81.08 - 61.83 = 19.25 \text{ minutos}$$

La hora de salida es

$$T = 81.08 + (10 + 5 \times 0.3473) = 92.82 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de los eventos futuros es

Hora, T	Evento
92.82	Salida del cliente 5

Salida del cliente 5 cuando $T = 92.82$. No hay más clientes en el sistema (cola e instalación) y termina la simulación.

La figura 18.8 es un resumen de los cambios en la longitud de la cola y de la utilización de la instalación, en función de la hora o tiempo de simulación.

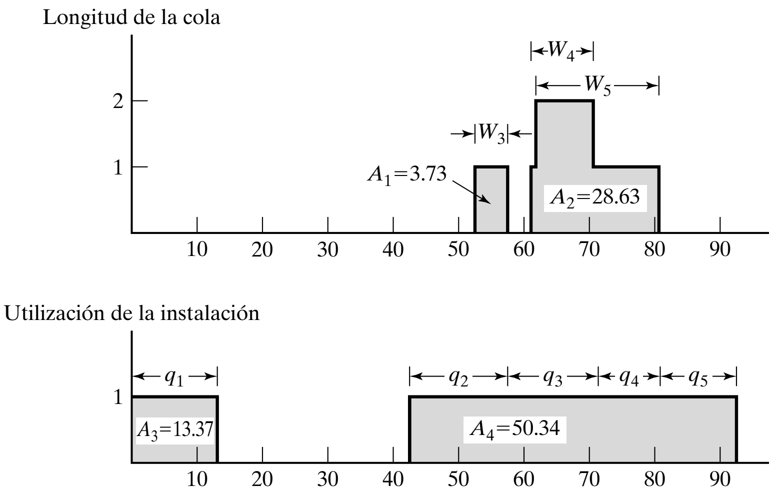


FIGURA 18.8
Cambios en longitud de cola y utilización de instalación en función del tiempo de simulación T

La longitud de la cola y la utilización de la instalación se llaman variables **basadas en tiempo**, porque su variación es función del tiempo. En consecuencia, sus valores promedio se calculan como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Valor medio de una variable} \\ \text{basada en tiempo}\end{pmatrix} = \frac{\text{Área bajo la curva}}{\text{Periodo simulado}}$$

Al aplicar esta fórmula a los datos de la figura 18.8 se obtiene

$$\begin{pmatrix}\text{Longitud promedio} \\ \text{de la cola}\end{pmatrix} = \frac{A_1 + A_2}{92.82} = \frac{32.36}{92.82} = 0.349 \text{ cliente}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Utilización promedio}\\ \text{de la instalación}\end{pmatrix} = \frac{A_3 + A_4}{92.82} = \frac{63.71}{92.82} = 0.686 \text{ peluquero}$$

El tiempo promedio de espera en la cola es una variable **basada en observación**, cuyo valor se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Valor promedio de una variable}\\ \text{basada en observación}\end{pmatrix} = \frac{\text{Suma de las observaciones}}{\text{Cantidad de observaciones}}$$

Al examinar la figura 18.8 se ve que el área bajo la curva de longitud de cola en realidad es igual a la suma del tiempo de espera de los tres clientes que formaron la cola, es decir

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0 + 0 + 3.73 + 9.38 + 19.25 = 32.36 \text{ minutos}$$

El tiempo promedio de espera de todos los clientes se calcula entonces como

$$\overline{W}_q = \tfrac{32.36}{5} = 6.47 \text{ minutos}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.5A

1. Suponga que la barbería de la sección 18.5.1 trabaja con dos peluqueros, y que a los clientes se les atiende con el sistema PLPS (primero en llegar primero en salir). Además suponga que el tiempo para hacer un corte de pelo tiene distribución uniforme entre 15 y 30 minutos. El tiempo entre llegadas de los clientes tiene distribución exponencial, con una media de 10 minutos. Simule manualmente el sistema durante 75 unidades de tiempo. De acuerdo con los resultados de la simulación, calcule el tiempo promedio de espera de un cliente en la cola, la cantidad promedio de clientes en espera y la utilización promedio de los peluqueros. Use los números aleatorios de la tabla 18.1.
2. Clasifique las variables siguientes como *basada en observación* o *basada en tiempo*:
   a) Tiempo hasta que falla (“tiempo a la falla de”) un componente electrónico.
   b) Nivel de inventario de un artículo.
   c) Cantidad pedida de un artículo en inventario.
   d) Cantidad de piezas defectuosas en un lote.
   e) Tiempo necesario para calificar los exámenes escritos.
   f) Cantidad de automóviles en el estacionamiento de una arrendadora de automóviles.
3. La tabla siguiente representa la variación de la cantidad de clientes que esperan en una cola, en función de la hora de la simulación.

Hora de simulación, T	Cantidad de clientes en espera
$0 \le T \le 3$	0
$3 < T \le 4$	1
$4 < T \le 6$	2
$6 < T \le 7$	1
$7 < T \le 10$	0
$10 < T \le 12$	2
$12 < T \le 18$	3
$18 < T \le 20$	2
$20 < T \le 25$	1

Calcule las siguientes medidas de desempeño:

a) La longitud promedio de la cola.

b) El tiempo promedio de espera en la cola, para quienes deban esperar.

4. Suponga que en la barbería del ejemplo 18.5-1 hay tres peluqueros. Además, suponga que la utilización de los servidores (peluqueros) se resume en la siguiente tabla:

Hora de simulación, T	Cantidad de servidores ocupados
$0 < T \leq 10$	0
$10 < T \leq 20$	1
$20 < T \leq 30$	2
$30 < T \leq 35$	1
$35 < T \leq 40$	0
$40 < T \leq 60$	1
$60 < T \leq 70$	2
$70 < T \leq 75$	3
$75 < T \leq 80$	2
$80 < T \leq 90$	1
$90 < T \leq 100$	0

Determine las siguientes medidas de desempeño:

a) La utilización promedio de la instalación.

b) El tiempo promedio de inactividad de la instalación.

18.5.2 Simulación del modelo con un servidor basado en hoja de cálculo

En la explicación de la sección 18.5.1 se muestra que los cálculos de simulación suelen ser tediosos y voluminosos. Entonces, el uso de la computadora para ejecutar modelos de simulación es un imperativo. En esta sección se explica un modelo basado en hoja de cálculo para el modelo con un solo servidor. El objetivo del desarrollo es reforzar las ideas presentadas en la sección 18.5.1. Naturalmente que el modelo con un solo servidor es un caso sencillo, y por esta razón se puede modificar con facilidad en un ambiente de hoja de cálculo. Hay otros casos que requieren esfuerzos más intensivos para modelarlas, y se pueden facilitar con los paquetes de simulación disponibles (véase la sección 18.7).

La presentación de la sección 18.5.1 demuestra que el modelo de simulación de la instalación con un solo servidor requiere dos elementos básicos:

1. Una lista cronológica de los eventos del modelo.
2. Una gráfica que registre los cambios de utilización de la instalación y de la longitud de la cola.

Estos dos elementos siguen siendo esenciales en el desarrollo del modelo de simulación basado en hoja de cálculo (en realidad de cualquiera basado en computadora). La diferencia es que la implementación se hace de forma compatible con el uso de la computadora. Como en la sección 18.5.1, a los clientes se les sirve por orden de su llegada (FIFO, PLPS).

En la figura 18.9 se ve la plantilla ch18SingleServerSimulator.xls de Excel. Los datos permiten representar los tiempos entre llegadas y de servicio en una de cuatro maneras: constante y siguiendo la distribución exponencial, uniforme y triangular. La distribución triangular

Simulation of a Single-Server Queueing Model

Nbr of arrivals =	20	<<Maximum 500			
Enter x in column A to select interarrival pdf:					
	Constant =				
x	Exponential: λ =	0.0667			
	Uniform:	a =		b =	
	Triangular:	a =		b =	c =
Enter x in column A to select service time pdf:					
	Constant =				
	Exponential: μ =				
x	Uniform:	a =	10	b =	15
	Triangular:	a =		b =	c =

Output Summary	
Av. facility utilization =	0.98
Percent idleness (%) =	1.57
Maximum queue length=	5
Av. queue length, Lq =	2.03
Av. nbr in system, Ls =	3.02
Av. queue time, Wq =	25.66
Av. system time, Ws =	38.09
Sum(ServiceTime) =	248.66
Sum(Wq) =	513.14
Sum(Ws) =	761.81

Press F9 to trigger a new simulation run.

Simulation Calculations

Nbr	InterArvlTime	ServiceTime	ArvlTime	DepartTime	Wq	Ws
1	15.15	14.35	0.00	14.35	0.00	14.35
2	3.74	11.26	15.15	26.41	0.00	11.26
3	10.74	14.84	18.89	41.25	7.52	22.36
4	1.29	13.29	29.64	54.55	11.62	24.91
5	7.85	14.71	30.93	69.26	23.62	38.32
6	11.31	14.55	38.78	83.80	30.48	45.02
7	11.67	12.60	50.09	96.40	33.71	46.31
8	4.30	12.39	61.76	108.79	34.64	47.04
9	0.16	10.52	66.06	119.31	42.74	53.25
10	16.40	13.96	66.22	133.27	53.09	67.05
11	15.82	11.03	82.63	144.30	50.64	61.67
12	42.34	12.83	98.45	157.13	45.85	58.68
13	13.76	10.10	140.79	167.23	16.35	26.44
14	7.92	13.01	154.55	180.24	12.68	25.69
15	0.16	13.52	162.47	193.76	17.77	31.29
16	10.35	11.55	162.63	205.31	31.13	42.69
17	10.29	10.97	172.98	216.29	32.34	43.31
18	7.42	10.37	183.27	226.65	33.02	43.38
19	50.50	11.36	190.69	238.01	35.97	47.32
20	10.98	11.45	241.19	252.64	0.00	11.45

FIGURA 18.9

Salida Excel de modelado de simulación con un servidor

es útil porque se puede usar como estimación inicial gruesa de cualquier distribución, con sólo proporcionar tres estimaciones, a, b y c, que representen los valores mínimo, más probable y máximo del tiempo entre llegadas o de servicio. La única información adicional necesaria para que funcione la simulación es la duración de ella, que en este modelo se especifica con la cantidad de llegadas que pueden generarse en el modelo.

Los cálculos de la hoja reservan un renglón para cada llegada. Los tiempos entre llegadas y de servicio para cada llegada se generan a partir de los datos. Se supone que la primera llegada sucede cuando $T = 0$. Como la instalación comienza inactiva, el cliente inicia el servicio de inmediato. Entonces,

$$\begin{pmatrix}\text{Hora de salida}\\ \text{del cliente 1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Hora de llegada}\\ \text{del cliente 1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo de servicio}\\ \text{del cliente 1}\end{pmatrix}$$

$$= 0 + 14.35 = 14.35$$

$$\begin{pmatrix}\text{Hora de llegada}\\ \text{del cliente 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Hora de llegada}\\ \text{del cliente 1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo entre llegadas}\\ \text{a partir del cliente 1}\end{pmatrix}$$

$$= 0 + 15.15 = 15.15$$

Para determinar la hora de salida de cualquier cliente *i* se usa la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix}\text{Hora de salida}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix} = \text{máx}\left\{\begin{pmatrix}\text{Hora de llegada}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\text{Hora de salida}\\ \text{del cliente } i-1\end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo de servicio}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix}$$

La fórmula indica que un cliente no puede iniciar el servicio sino hasta que esté disponible la instalación. Para ilustrar el uso de esta fórmula en la figura 18.9, se tiene que

$$\text{Hora de salida del cliente } 3 = \text{máx}\{18.89, 26.41\} + 14.86 = 41.25$$

Ahora dirigiremos nuestra atención a la recopilación de las medidas estadísticas del modelo. Primero, obsérvese que para el cliente *i*, el tiempo de espera $W_q(i)$ en la cola, y $W_s(i)$ en todo el sistema, se calculan como sigue:

$$W_q(i) = \begin{pmatrix}\text{Hora de salida}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Hora de llegada}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Tiempo de servicio}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix}$$

$$W_s(i) = \begin{pmatrix}\text{Hora de salida}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Hora de llegada}\\ \text{del cliente } i\end{pmatrix}$$

Ahora bien, parecerá que para calcular las estadísticas restantes del modelo se necesita rastrear los cambios de utilización de la instalación y de longitud de la cola (como hicimos en la sección 18.5.1). Por fortuna, los cálculos se simplifican con las dos observaciones que se hicieron en la sección 18.5.1 y que se explicaron en la figura 18.8:

1. Área bajo la curva de utilización de la instalación = Suma de los tiempos de servicio para todas las llegadas.
2. Área bajo la curva de longitud de cola = Suma de los tiempos de espera de todas las llegadas.

Para explicar lo anterior, en los resultados de Excel de la figura 18.9, se calculan tres sumas:

$$\begin{aligned}&\text{Suma de los tiempos de servicio} = 248.66\\ &\text{Suma de } W_q = 513.14\\ &\text{Suma de } W_s = \text{Suma de } W_q + \text{Suma de los tiempos de servicio}\\ &\qquad\qquad = 761.81\ (\simeq 248.66 + 513.14)\end{aligned}$$

Como la última llegada (cliente 20) sale cuando $T = 252.64$, entonces

$$\begin{pmatrix}\text{Utilización promedio}\\ \text{de la instalación}\end{pmatrix} = \frac{248.66}{252.64} = 0.9842$$

$$\begin{pmatrix}\text{Longitud promedio}\\ \text{de la cola}\end{pmatrix} = \frac{513.14}{252.64} = 2.03$$

El porcentaje de inactividad de la instalación se calcula así: $(1 - 0.9842) \times 100 = 1.575\%$.

El resto de los estadísticos se calculan en forma directa; es decir,

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo promedio de}\\ \text{espera en la cola}\end{pmatrix} = \frac{\text{Suma de } W_q}{\text{Cantidad de llegadas}} = \frac{513.14}{20} = 25.66$$

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo promedio}\\ \text{en el sistema}\end{pmatrix} = \frac{\text{Suma de } W_s}{\text{Cantidad de llegadas}} = \frac{761.81}{20} = 38.09$$

La plantilla de Excel está diseñada para un máximo de 500 llegadas. También se pueden obtener distintas muestras de la simulación oprimiendo F9 o cambiando cualquiera de las celdas de los datos.

Se desarrolló otra hoja de cálculo para simular modelos con varios servidores (o "multiservidores") (ch18MultiServerSimulator.xls). El diseño de la plantilla se basa en los mismos conceptos que se usaron en el caso de un solo servidor. Sin embargo, la determinación de la hora de salida no es tan directa y, en consecuencia, requiere usar macros de VBA.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.5B

1. Con los datos de la sección 18.5.1 ejecute el simulador de Excel para 10 llegadas, y haga una gráfica de los cambios en la utilización de la instalación y de la longitud de la cola en función del tiempo de simulación. Compruebe que las áreas bajo las curvas respectivas sean iguales a la suma de los tiempos de servicio y a la suma de los tiempos de espera, respectivamente.

2. Simule el modelo *M/M/*1 para 500 llegadas, con la frecuencia de llegadas $\lambda = 4$ clientes por hora y la rapidez de servicio $\mu = 6$ salidas por hora. Ejecute 5 réplicas (refrescando la hoja de cálculo, apretando F9) y determine un intervalo de confianza para todas las medidas de desempeño del modelo. Compare los resultados con los valores teóricos de estado estable para el modelo *M/M/*1.

3. Los televisores llegan sobre un transportador de banda cada 11.5 minutos, para su inspección en una estación con un solo operador. No hay datos detallados disponibles sobre la estación de inspección. Sin embargo, el operador estima que "en promedio" tarda 9.5 minutos para inspeccionar una unidad. Bajo las peores condiciones, el tiempo de inspección no pasa de 15 minutos, y en ciertas unidades el tiempo de inspección puede bajar hasta a 9 minutos.

  a) Use el simulador en Excel para simular la inspección de 200 televisores.

  b) Con base en 5 réplicas, estime la cantidad promedio de unidades que esperan la inspección, y la utilización promedio de la estación de inspección.

18.6 MÉTODOS PARA REUNIR OBSERVACIONES ESTADÍSTICAS

La simulación de un experimento estadístico y de sus resultados se debe interpretar usando los métodos adecuados de inferencia estadística (por ejemplo, intervalos de confianza y prueba de hipótesis). Para lograrlo, las observaciones del experimento de simulación deben satisfacer tres condiciones:

1. Que las observaciones se tomen de distribuciones estacionarias (idénticas).
2. Que las observaciones sean muestreadas de una población con distribución normal.
3. Que las observaciones sean independientes.

Sucede que, en el sentido estricto, el experimento de simulación no satisface ninguna de estas condiciones. Sin embargo, podemos hacer que esas condiciones sean estadísticamente viables restringiendo la forma en que se recopilan las observaciones de la simulación.

Primero se examinará la cuestión de lo estacionario. El resultado de la simulación es función de la longitud del periodo simulado. El periodo inicial produce comportamiento errático, y se suele llamar **periodo transitorio** o **de calentamiento**. Cuando los resultados se es-

tabilizan, el sistema trabaja bajo un **estado estable**. Desafortunadamente no hay forma de decir por adelantado cuál es el punto inicial del estado estable. En general, una corrida de simulación más larga tiene mejores probabilidades de alcanzar el estado estable. Esto se demuestra en el ejemplo 18.1-1, donde la exactitud de estimación del área de un círculo con el método de Monte Carlo aumenta al aumentar el tamaño de la muestra. Por lo anterior, se puede tener en cuenta la falta de estabilidad usando un tamaño de muestra suficientemente grande.

A continuación veamos el requisito que las observaciones de la simulación se tomen de una población con distribución normal. Este requisito se cumple usando el *teorema del límite central* (véase la sección 12.4.4), que establece que la distribución del promedio de una muestra tiene una distribución asintóticamente normal, independientemente de la población de origen de la muestra. En consecuencia, el teorema del límite central es la principal herramienta que se usa para satisfacer la hipótesis de distribución normal.

La tercera condición tiene que ver con la independencia de las observaciones. La naturaleza de la simulación no garantiza la independencia entre observaciones sucesivas en una simulación. Sin embargo, si se usa el promedio muestral para representar una observación de simulación, se puede paliar el problema de la falta de independencia. Esto tiene especial validez al aumentar la base de tiempo que se use para calcular el promedio muestral.

Habiendo descrito las peculiaridades del experimento de simulación, y las formas de manejarlas, presentaremos los tres métodos más comunes para recolectar observaciones en la simulación:

1. Método del subintervalo.
2. Método de réplica.
3. Método regenerativo (o de ciclos).

18.6.1 Método del subintervalo

La figura 18.10 ilustra la idea del método del subintervalo. Suponga que la simulación se ejecuta durante T unidades de tiempo, es decir, que la longitud de la corrida $= T$; y que se desea recolectar n observaciones. En el método del subintervalo se trunca primero el periodo transitorio inicial y a continuación se divide el resto de la corrida de simulación en n subintervalos (o lotes) iguales. El promedio de la medida de desempeño que se busca (es decir, de longitud de cola o del tiempo de espera en la cola) en cada subintervalo se usa entonces para representar una sola observación. El truncamiento del periodo transitorio inicial implica que no se recolectan datos durante ese periodo.

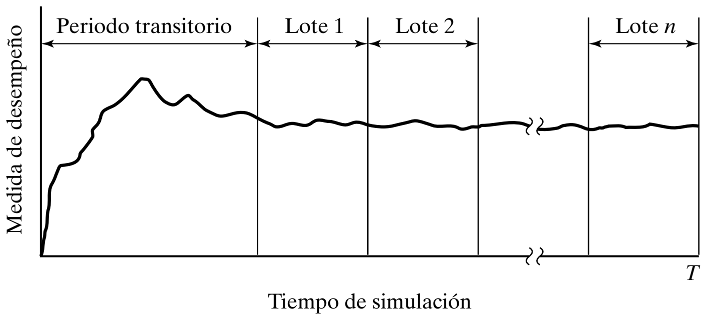


FIGURA 18.10
Recopilación de datos de simulación con el método del subintervalo

La ventaja del método del subintervalo es que el efecto de las condiciones transitorias (no estacionarias) se mitiga, en especial para aquellas observaciones reunidas al final de la corrida de simulación. La desventaja del método es que los lotes sucesivos con condiciones a la frontera comunes están correlacionados por necesidad. El efecto de la correlación se puede mitigar aumentando la base de tiempo para cada lote.

Ejemplo 18.6-1

La figura 18.11 muestra el cambio en longitud de cola en función del tiempo de simulación, para un modelo de una sola cola. La longitud de corrida de la simulación es $T = 35$ horas, y la longitud del periodo transitorio se estima igual a 5 horas. Se desea recolectar 5 observaciones, esto es, $n = 5$. La base de tiempo correspondiente a cada lote es igual, por tanto, a $\frac{(35 - 5)}{5} = 6$ horas.

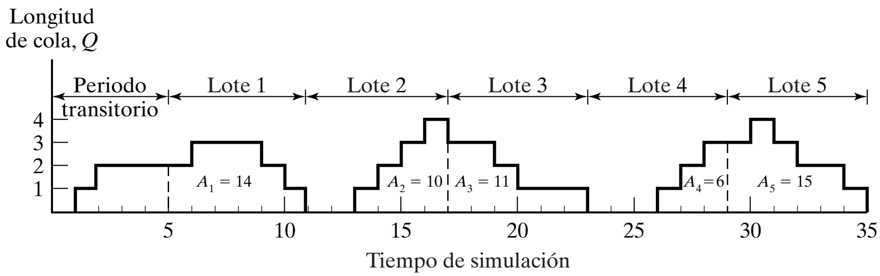


FIGURA 18.11

Cambio de longitud de cola en función del tiempo de simulación, en el ejemplo 18.6-1

Sea $\overline{Q}_i$ la longitud promedio de la cola en el lote i. Como la longitud de la cola es una variable basada en tiempo,

$$\overline{Q}_i = \frac{A_i}{t}, \ i = 1, 2, \ \ldots, 5$$

donde A_i es el área bajo la curva de longitud de cola correspondiente al lote (a la observación) i, y t es la base de tiempo por lote. En el ejemplo actual, $t = 6$ horas.

Los datos de la figura 18.11 producen las observaciones siguientes:

Observación i	1	2	3	4	5
A_i	14	10	11	6	15
$\overline{Q}_i$	2.33	1.67	1.83	1.00	2.5
Promedio muestral = 1.87		Desviación estándar muestral = 0.59			

Se pueden usar la media y la varianza muestrales para calcular un intervalo de confianza, si se desea. El cálculo de la varianza muestral en el ejemplo 18.6-1 se basa en la siguiente y conocida fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}$$

Esta fórmula sólo es una aproximación de la varianza verdadera, porque no tiene en cuenta el efecto de la autocorrelación entre lotes sucesivos. La fórmula exacta se puede encontrar en Law y Kelton (2000, págs. 249-253).

18.6.2 Método de réplica

En el método de réplica se representa cada observación con una corrida independiente de simulación en la que se trunca el periodo transitorio, como se ilustra en la figura 18.12. El cálculo de los promedios de observación para cada lote es igual que en el método del subintervalo. La única diferencia es que se puede aplicar la fórmula acostumbrada de la varianza, porque los lotes no están correlacionados.

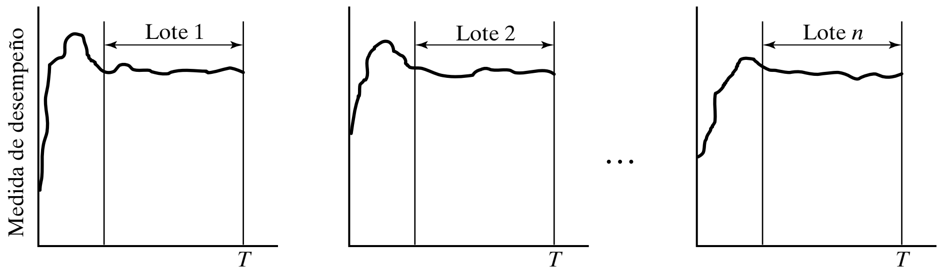


FIGURA 18.12

Recopilación de datos de simulación con el método de réplica

La ventaja del método de réplica es que cada corrida de simulación se hace con una serie distinta de números aleatorios (0, 1), con lo que se producen observaciones que realmente son independientes estadísticamente. La desventaja es que cada observación se puede sesgar por el efecto inicial de las condiciones transitorias. Ese problema se puede mitigar haciendo suficientemente grande la longitud de las corridas.

18.6.3 Método regenerativo (ciclo)

El método regenerativo se puede considerar como una ampliación del método del subintervalo. La motivación para este método es que trata de reducir el efecto de la autocorrelación que caracteriza al método del subintervalo pidiendo condiciones iniciales parecidas para cada lote. Por ejemplo, si la variable que se maneja es la longitud de la cola, cada lote debería comenzar en un instante en el que la longitud de la cola sea cero. A diferencia del método del subintervalo, la naturaleza del método regenerativo puede dar como resultado distintas bases de tiempo para los distintos lotes.

Aunque el método regenerativo puede reducir la autocorrelación, tiene la desventaja de producir menor cantidad de lotes para determinada longitud de corrida. Esto se debe a que no se puede predecir cuándo comenzará un nuevo lote, ni cuánto durará un lote. Sin embargo, bajo condiciones de estado estable, cabe esperar que los puntos de inicio de los lotes sucesivos estén distanciados más o menos uniformemente.

El cálculo del promedio para el lote *i* en el método regenerativo se define en general como la relación de dos variables aleatorias, a_i y b_i; esto es, $x_i = \frac{a_i}{b_i}$. Las definiciones de a_i y de b_i dependen de la variable que se esté calculando. En forma específica, si la variable es *basada en el tiempo*, entonces a_i representaría el área bajo la curva, y b_i sería igual a la base de tiempo correspondiente. Si la variable se *basa en observación*, entonces a_i sería la suma total de las observaciones dentro del lote *i*, y b_i sería la cantidad correspondiente de observaciones.

Ya que x_i es la relación de dos variables aleatorias, se puede demostrar que un estimado no sesgado del promedio muestral es

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

en donde

$$y_i = \frac{n\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{(n-1)(n\bar{a} - a_i)}{n\bar{b} - b_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$$

En este caso el intervalo de confianza se basa en la media y en la desviación estándar de y_i.

Ejemplo 18.6-2

La figura 18.13 representa la cantidad de servidores ocupados en una sola instalación con tres servidores en paralelo. La longitud de la corrida de simulación es 35 unidades de tiempo, y la

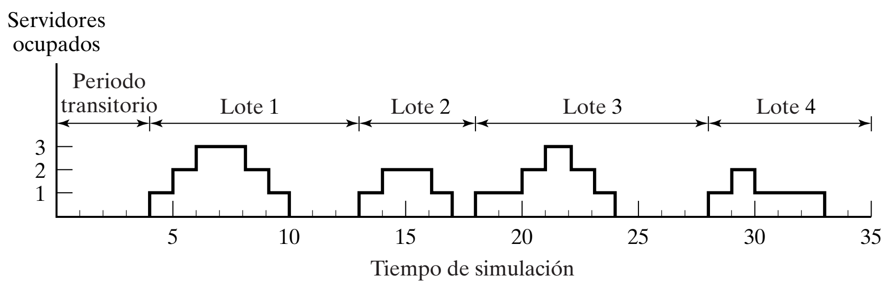


FIGURA 18.13

Cambios en la cantidad de servidores ocupados en función del tiempo, para el ejemplo 18.6-2

longitud del periodo transitorio es 4 unidades de tiempo. Se desea estimar la utilización promedio de la instalación, con base en el método regenerativo.

Después de truncar el periodo transitorio, en la figura 18.13 se ven cuatro lotes con la característica común de comenzar con los tres servidores inactivos. Los valores asociados de a_i y b_i se ven en la siguiente tabla:

Lote i	a_i	b_i
1	12	9
2	6	5
3	10	10
4	6	7
Promedios	$\bar{a} = 8.50$	$\bar{b} = 7.75$

Con estos datos se obtiene

$$y_i = \frac{4 \times 8.5}{7.75} - \frac{(4 - 1) \times (4 \times 8.5 - a_i)}{4 \times 7.75 - b_i} = 4.39 - \frac{102 - 3a_i}{31 - b_i}$$

Estos cálculos se pueden automatizar con facilidad con la plantilla ch18Regenerative.xls de Excel. La figura 18.14 muestra los resultados correspondientes.

	A	B	C	D	E
1	Regenerative (Cycles) Method				
2	Input Data		Output Results		
3	No. Batches	4	<<Maximum 100		
4	ai	bi	yi		
5	12	9	1.38709677	$\bar{a}$=	8.5000
6	6	5	1.15632754	$\bar{b}$=	7.7500
7	10	10	0.95852535	Average yi =	1.0973
8	6	7	0.88709677	Std Dev yi =	0.2243

FIGURA 18.14
Cálculos de las observaciones de simulación, para el ejemplo 18.6-2, basados en el método regenerativo y hechos con Excel

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6A

1. En el ejemplo 18.6-1 use el método del subintervalo para calcular el tiempo promedio de espera en la cola, para quienes deben esperar.
2. En un modelo de simulación, el método del subintervalo se usa para calcular promedios de lote. Se estima que el periodo transitorio es 100, y que cada lote tiene una base de tiempo de 100 unidades (de tiempo) también. Con los siguientes datos de los tiempos de espera de los clientes en función del tiempo de simulación, estime el intervalo de 95% de confianza del tiempo promedio de espera.

Intervalo de tiempo	Tiempos de espera
0–100	10, 20, 13, 14, 8, 15, 6, 8
100–200	12, 30, 10, 14, 16
200–300	15, 17, 20, 22
300–400	10, 20, 30, 15, 25, 31
400–500	15, 17, 20, 14, 13
500–600	25, 30, 15

3. En el ejemplo 18.6-2 suponga que el punto inicial para cada observación es el momento en que acaban de desocuparse todos los servidores. Así, en la figura 18.13, esos puntos corresponden a $t = 10$, 17, 24 y 33. Calcule el intervalo de 95% de confianza de la utilización de los servidores con base en la nueva definición de los puntos regenerativos.

4. En un caso de cola con un solo servidor, se simula el sistema durante 100 horas. Los resultados de la simulación indican que el servidor sólo estuvo ocupado durante los siguientes intervalos de tiempo: (0, 10), (15, 20), (25, 30), (35, 60), (70, 80) y (90, 95). Se estima que la longitud del periodo transitorio es 10 horas.

a) Defina el punto inicial de la observación, necesario para implementar el método regenerativo.

b) Calcule el intervalo de 95% de confianza de la utilización promedio del servidor, con base en el método regenerativo.

c) Aplique el método del subintervalo al mismo problema con un tamaño muestral $n = 5$. Calcule el intervalo de 95% de confianza correspondiente y compárelo con uno obtenido con el método regenerativo.

18.7 LENGUAJES DE SIMULACIÓN

La ejecución de modelos de simulación implica dos clases distintas de cálculos: 1) manipulaciones de archivo que tienen que ver con el almacenamiento y procesamiento cronológico de los eventos del modelo, y 2) cálculos aritméticos y de registro relacionados con la generación de muestras aleatorias y la recolección de los estadísticos del modelo. La primera clase de cálculos implica un desarrollo lógico extenso en procesamiento de listas, y el segundo tipo implica cálculos tediosos y tardados. La naturaleza de esos cálculos hace que la computadora sea un medio esencial para ejecutar modelos de simulación y que, a su vez, estimule el desarrollo de lenguajes especiales de cómputo de simulación, para efectuar esos cálculos en forma cómoda y eficiente.

Los lenguajes disponibles de simulación discreta caen en dos categorías amplias:

1. Programación de eventos.
2. Orientados a proceso.

En los lenguajes de programación de eventos, el usuario detalla las acciones asociadas con la ocurrencia de cada evento, casi en la forma que se usó en el ejemplo 18.5-1. El papel principal del lenguaje en este caso es 1) automatizar el muestreo de distribuciones, 2) almacenar y recuperar elementos en orden cronológico y 3) recolectar medidas estadísticas del modelo.

Los lenguajes orientados a proceso se usan bloques o nodos que se pueden vincular entre sí formando una red que describe los movimientos de **transacciones** o **entidades** (es decir, clientes) en el sistema. Por ejemplo, en cualquier lenguaje de simulación de proceso los tres bloques o nodos más prominentes son una *fuente* de donde se crean las transacciones, una

cola donde pueden esperar si es necesario y una *instalación* donde se efectúa el servicio. Cada uno de esos bloques/nodos se define con toda la información necesaria para hacer funcionar la simulación en forma automática. Por ejemplo, una vez especificado el tiempo entre llegadas, un lenguaje orientado a proceso "sabe" en forma automática cuándo sucederán los eventos de llegada. En efecto, cada bloque o nodo del modelo tiene instrucciones vigentes que definen *cómo* y *cuándo* se mueven las transacciones en la red de simulación.

Los lenguajes orientados a proceso se activan internamente con las mismas acciones que se usan en los de programación de eventos. La diferencia es que se automatizan esas acciones para liberar al usuario de los tediosos detalles de cómputo y lógicos. En cierto sentido, se puede considerar que los lenguajes orientados a proceso se basan en el concepto de entrada y salida con una "caja negra". Esto significa, esencialmente, que los lenguajes orientados a proceso sacrifican la flexibilidad del modelado en aras de la simplicidad y la facilidad de uso.

Entre los lenguajes importantes de programación de eventos están SIMSCRIPT, SLAM y SIMAN. Al paso de los años estos lenguajes han evolucionado e incluyen posibilidades orientadas a proceso. Los tres lenguajes permiten que el usuario escriba (una parte de) el modelo en lenguaje de nivel elevado, como FORTRAN o C. Esta posibilidad es necesaria para permitir al usuario modelar operaciones lógicas complicadas, que de otra manera no se podrían lograr con las posibilidades normales de los lenguajes de programación de eventos. Una razón principal de esta limitación es la forma restrictiva y quizá convolucionada con que esos lenguajes hacen las transacciones (o entidades) entre las colas y las instalaciones del modelo.

El lenguaje orientado a proceso más antiguo es GPSS. Éste, que fue el primero desarrollado a principios de la década de 1960, ha evolucionado desde entonces para admitir nuevas necesidades de modelado de sistemas complejos. Para usarlo con eficacia el usuario debe dominar los "funcionamientos internos" de unos 80 bloques distintos. A pesar de su larga historia, GPSS todavía tiene algunas peculiaridades de modelado que son difíciles de justificar. Un ejemplo de ellas es la necesidad de aproximar distribuciones continuas mediante otras distribuciones seccionalmente lineales. Es cierto que ciertas versiones recientes del lenguaje han proporcionado posibilidades directas para algunas de las distribuciones continuas (como la exponencial y la normal). Sin embargo, con las tremendas posibilidades actuales de la computadora, es difícil comprender por qué ha persistido tanto tiempo este obstáculo.

Algunos paquetes comerciales modernos dominan en la actualidad el mercado de la simulación, como son Arena, AweSim y GPSS/H, para mencionar sólo unos pocos. En estos paquetes se hace un uso intenso de interfaz con el usuario para simplificar el proceso de creación del modelo de simulación. También proporcionan funciones de animación, donde se pueden observar visualmente los cambios en el sistema. Sin embargo, al usuario con experiencia, le podrá parecer que esas interfaces reducen el desarrollo de un modelo de simulación hasta un ritmo de "cámara lenta". No es de sorprender que algunos usuarios prefieran escribir modelos de simulación en lenguajes de programación tan generales como C, Basic y FORTRAN.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.8A[2]

1. Las personas llegan al azar a una oficina de correos con tres despachadores. El tiempo entre llegadas tiene distribución exponencial con una media de 5 minutos. El tiempo que tarda un despachador en atender a una persona tiene distribución exponencial, con una media de 10 minutos.

[2]Haga estos problemas con un lenguaje de su elección, como BASIC, FORTRAN o C.

Todas las personas que llegan se forman en una cola y esperan al primer despachador disponible. Haga un modelo de simulación del sistema durante 480 minutos, para determinar lo siguiente:

a) La cantidad promedio de personas que esperan en la fila.

b) La utilización promedio de los despachadores.

c) Compare estos resultados de simulación con los del modelo de cola M/M/c (capítulo 17) y con los de la hoja de cálculo ch18MultiServerSiumulator.xls.

2. Los televisores llegan para su inspección sobre una banda transportadora, con una frecuencia constante de 5 aparatos por hora. El tiempo de inspección es de 10 a 15 minutos, con distribución uniforme. De acuerdo con la experiencia, hay que ajustar el 20% de las unidades, que después se regresan a la inspección. El tiempo de ajuste también tiene distribución uniforme entre 6 y 8 minutos. Corra un modelo de simulación para 480 minutos, para calcular lo siguiente:

a) El tiempo promedio que tarda una unidad para pasar la inspección.

b) La cantidad promedio de veces que se debe reinspeccionar una unidad para que salga del sistema.

3. Un ratón está atrapado en un laberinto y desea salir desesperadamente. Después de probar de 1 a 3 minutos, distribuidos uniformemente, hay 30% de probabilidades de que encuentre el camino correcto. En caso contrario vagará entre 2 y 3 minutos, distribuidos uniformemente, y finalmente terminará donde comenzó, sólo para comenzar a intentar de nuevo. El ratón puede tratar de liberarse todas las veces que quiera, pero todo tiene su límite. Con tanta energía invertida en tratar una y otra vez, morirá con seguridad si no logra salir dentro de un tiempo promedio de 10 minutos, distribuidos normalmente y con desviación estándar de 2 minutos. Escriba el modelo de simulación para estimar la probabilidad de que el ratón quede libre. Para fines de estimación de probabilidades, suponga que el modelo procesará 100 ratones (réplicas).

4. En la etapa final de la fabricación, un automóvil que se mueve sobre un transportador se sitúa entre dos estaciones de trabajo en paralelo para permitir que un trabajo se haga en sus lados izquierdo y derecho, al mismo tiempo. Los tiempos de operación en los lados izquierdo y derecho tienen distribución uniforme entre 15 y 20 minutos, y entre 18 y 22 minutos, respectivamente. El transportador llega a la zona de las estaciones de trabajo cada 20 minutos. Simule el proceso durante 480 minutos, para determinar la utilización de las estaciones izquierda y derecha.

5. En un lavado de autos llegan los vehículos con tiempos entre llegadas distribuidos exponencialmente, con una media de 10 minutos. Los automóviles que llegan se alinean en un carril donde pueden caber cinco vehículos en espera, cuando mucho. Si el carril está lleno, los que lleguen después se irán. Se necesitan de 10 a 15 minutos, distribuidos uniformemente, para lavar un automóvil. Simule el sistema durante 960 minutos y estime el tiempo que dura un vehículo en la instalación.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Box, G. y M. Muller, "A note on the Generation of Random Normal Deviates", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 29, págs 610-611, 1958.

Law, A. y W. Kelton, *Simulation Modelling & Analysis*, 3a. ed., McGraw-Hill, New York, 2000.

Ross, S., *A Course in Simulation*, Macmillan, New York, 1990.

Rubenstein, R., B. Melamed y A. Shapiro, *Modern Simulation and Modeling*, Wiley, New York, 1998.

Taha, H., *Simulation Modeling and SIMNET*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1988.

CAPÍTULO 19

Proceso de decisión markoviana

En este capítulo se aplica la programación dinámica a la solución de un proceso estocástico de decisión con una cantidad finita de estados. Las probabilidades de transición entre los estados se describen con una cadena de Markov.[1] La estructura de recompensa del proceso se describe con una matriz que representa el ingreso (o el costo) asociado con el movimiento de un estado a otro. Las matrices de transición e ingreso dependen de las alternativas de decisión disponibles para quien toma decisiones. El objetivo del problema es determinar la política óptima que maximice el ingreso esperado durante una cantidad finita o infinita de etapas.

19.1 ALCANCE DEL PROBLEMA DE DECISIÓN MARKOVIANA: EL PROBLEMA DEL JARDINERO

Usaremos un ejemplo para presentar los detalles del proceso markoviano de decisión (o proceso de decisión markoviana). El ejemplo parafrasea (es decir, ilustra) varias aplicaciones importantes en las áreas de inventarios, reposiciones, administración del flujo de efectivo y control de la capacidad de los depósitos de agua.

Cada año, al comenzar la estación para trabajar los jardines (de marzo a septiembre) un jardinero usa una prueba química para determinar el estado del suelo. Dependiendo de los resultados de las pruebas, la productividad para la nueva estación cae en uno de tres estados: 1) bueno, 2) regular y 3) malo.

A través de los años el jardinero observó que las condiciones meteorológicas prevalecientes durante el invierno (de octubre a febrero) juegan un papel importante en la determinación de la condición del suelo, dejándolo igual o empeorándolo, pero nunca mejorándolo. En este respecto, el estado del suelo en el año anterior es un factor importante para la productividad del presente año. Usando los datos de las pruebas hechas por el jardinero, las probabilidades de transición durante un periodo de un año, de un estado de productividad a otro, se representa con la siguiente cadena de Markov:

---

[1]En la sección 19.5 se presenta un repaso de cadenas de Markov.

$$\mathbf{P}^1 = \begin{matrix} \text{Estado del} \\ \text{sistema} \\ \text{este año} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \overset{\overbrace{\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix}}^{\text{Estado del sistema año próximo}}}{\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Las probabilidades de transición en $\mathbf{P}^1$ indican que la productividad de determinado año no puede ser mejor que la del año anterior. Por ejemplo, si las condiciones del suelo en el presente año son regulares (estado 2), la productividad en el próximo año permanecerá regular con una probabilidad de 0.5, o se volverán malas (estado 3) con una probabilidad de 0.5.

El jardinero puede alterar las probabilidades de transición $\mathbf{P}^1$ con otras acciones. En el caso normal, se aplica fertilizante para mejorar las condiciones del suelo, y se produce la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{pmatrix}}$$

Para poner en perspectiva el problema de decisión, el jardinero asocia una función de ingreso (o una estructura de recompensa) con la transición de un estado a otro. La función de ingreso expresa la ganancia o la pérdida durante un periodo de 1 año, dependiendo de los estados entre los que se hace la transición. Como el jardinero tiene la opción de usar fertilizante o no, la ganancia o la pérdida varían dependiendo de la decisión tomada. Las matrices $\mathbf{R}^1$ y $\mathbf{R}^2$ resumen las funciones de ingreso, en cientos de \$, correspondientes a las matrices $\mathbf{P}^1$ y $\mathbf{P}^2$, respectivamente.

$$\mathbf{R}^1 = \|r_{ij}^1\| = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{R}^2 = \|r_{ij}^2\| = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

Los elementos r_{ij}^2 de $\mathbf{R}^2$ tienen en cuenta el costo de aplicar el fertilizante. Por ejemplo, si las condiciones del suelo fueron regulares el año anterior (estado 2) y se vuelven malas (estado 3) en este año, su ganancia será $r_{23}^2 = 0$ en comparación con $r_{23}^1 = 1$ cuando no se usa fertilizante. A este respecto, $\mathbf{R}$ expresa la recompensa neta después de haber introducido el costo del fertilizante.

¿Qué clase de problema de decisión tiene el jardinero? Primero, se debe conocer si la actividad de jardinería continuará durante una cantidad limitada de años, o en forma indefinida. A estos casos se les llama problemas de decisión con **etapas finitas** o con **etapas infinitas**. En ambos casos, el jardinero usa el resultado de las pruebas químicas (estado del sistema) para determinar la *mejor* acción (fertilizar o no) que maximice el ingreso esperado.

También, al jardinero le puede interesar evaluar el ingreso esperado que resulte de las acciones especificadas de antemano para determinado estado del sistema. Por ejemplo, se puede aplicar fertilizante siempre que las condiciones del suelo sean malas (estado 3). Se dice que el proceso de toma de decisiones en este caso se representa por una **política estacionaria**.

Cada política estacionaria corresponderá a matrices de transición y de ingreso distintas, que se obtienen a partir de las matrices $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{R}^1$ y $\mathbf{R}^2$. Por ejemplo, para la política estacionaria de aplicar fertilizante sólo cuando las condiciones del suelo sean malas (estado 3), las matrices resultantes de transición y de ingreso son:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.50 & 0.30 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son distintas de $\mathbf{P}^1$ y $\mathbf{R}^1$ sólo en los terceros renglones, que se toman directamente de $\mathbf{P}^2$ y $\mathbf{R}^2$, las matrices asociadas con la aplicación del fertilizante.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.1A

1. En el modelo del jardinero, identifique las matrices **P** y **R** asociadas con la política estacionaria que indica usar fertilizante cuando las condiciones del suelo son regulares o malas.
2. Identifique a todas las políticas estacionarias para el modelo del jardinero.

19.2 MODELO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA CON ETAPAS FINITAS

Supongamos que el jardinero desea "jubilarse" de la jardinería dentro de N años. Lo que interesa es determinar las acciones óptimas de cada año (fertilizar o no) que produzcan los ingresos esperados máximos al final de N años.

Sean $k = 1$ y 2 las dos acciones (alternativas) disponibles para el jardinero. Las matrices $\mathbf{P}^k$ y $\mathbf{R}^k$ que representan las probabilidades de transición y la función de recompensa para la alternativa k se presentaron en la sección 19.1, y se muestran a continuación para mayor comodidad.

$$\mathbf{P}^1 = \|r_{ij}^1\| = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}^1 = \|r_{ij}^1\| = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \|p_{ij}^2\| = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.10 & 0.60 & 0.30 \\ 0.05 & 0.40 & 0.55 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R}^2 = \|r_{ij}^2\| = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

El problema del jardinero se expresa como un modelo de programación dinámica de etapas finitas como sigue. Para generalizar, se definen

m = Cantidad de estados en cada etapa (año) (= 3 en el problema del jardinero)

$f_n(i)$ = Ingreso óptimo *esperado* de las etapas $n, n + 1, ..., N$, cuando i es el estado del sistema (condiciones del suelo) al comenzar el año n

La ecuación recursiva *en reversa* que relaciona a f_n con f_{n+1} es

$$f_n(i) = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k [r_{ij}^k + f_{n+1}(j)] \right\}, \; n = 1, 2, \ldots, N$$

en donde $f_{N+1}(j) = 0$ para toda j.

Una justificación de esta ecuación es que el ingreso acumulado, $r_{ij}^k + f_{n+1}(j)$ que resulta de alcanzar el estado j en la etapa $n + 1$ desde el estado i en la etapa n tiene la probabilidad p_{ij}^k de suceder. Sea

$$v_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k r_{ij}^k$$

La ecuación recursiva de programación dinámica se puede escribir en la forma

$$f_N(i) = \max_k \{v_i^k\}$$

$$f_n(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f_{n+1}(j) \right\}, \; n = 1, 2 \ldots, N - 1$$

Para ilustrar el cálculo de v_i^k, veamos el caso en donde no se usa fertilizante ($k = 1$).

$$v_1^1 = 0.2 \times 7 + 0.5 \times 6 + 0.3 \times 3 = 5.3$$
$$v_2^1 = 0 \times 0 + 0.5 \times 5 + 0.5 \times 1 = 3$$
$$v_3^1 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times -1 = -1$$

Así, si la condición del suelo es buena, una sola transición produce 5.3 para ese año, si es regular la productividad es 3; y si es mala, la productividad es -1.

Ejemplo 19.2-1

En este ejemplo se resolverá el problema del jardinero con los datos resumidos en las matrices $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{R}^1$ y $\mathbf{R}^2$, dado un horizonte de 3 años ($N = 3$).

Como se usarán los valores de v_i^k en forma repetida en los cálculos, se resumen aquí por comodidad. Recuérdese que $k = 1$ representa "no fertilizar", y $k = 2$ representa "fertilizar".

i	v_i^1	v_i^2
1	5.3	4.7
2	3	3.1
3	−1	.4

Etapa 3.

	v_i^k		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f_3(i)$	k^*
1	5.3	4.7	5.3	1
2	3	3.1	3.1	2
3	−1	0.4	0.4	2

Etapa 2.

	$v_i^k + p_{i1}^k f_3(1) + p_{i2}^k f_3(2) + p_{i3}^k f_3(3)$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f_2(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.2 \times 5.3 + 0.5 \times 3.1 + 0.3 \times 0.4 = 8.03$	$4.7 + 0.3 \times 5.3 + 0.6 \times 3.1 + 0.1 \times 0.4 = 8.19$	8.19	2
2	$3 + 0 \times 5.3 + 0.5 \times 3.1 + 0.5 \times 0.4 = 4.75$	$3.1 + 0.1 \times 5.3 + 0.6 \times 3.1 + 0.3 \times 0.4 = 5.61$	5.61	2
3	$-1 + 0 \times 5.3 + 0 \times 3.1 + 1 \times 0.4 = -0.6$	$0.4 + 0.05 \times 5.3 + 0.4 \times 3.1 + 0.55 \times 0.4 = 2.13$	2.13	2

Etapa 1.

	$v_i^k + p_{i1}^k f_2(1) + p_{i2}^k f_2(2) + p_{i3}^k f_2(3)$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f_1(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.2 \times 8.19 + 0.5 \times 5.61 + 0.3 \times 2.13 = 10.38$	$4.7 + 0.3 \times 8.19 + 0.6 \times 5.61 + 0.1 \times 2.13 = 10.74$	10.74	2
2	$3 + 0 \times 8.19 + 0.5 \times 5.61 + 0.5 \times 2.13 = 6.87$	$3.1 + 0.1 \times 8.19 + 0.6 \times 5.61 + 0.3 \times 2.13 = 7.92$	7.92	2
3	$-1 + 0 \times 8.19 + 0 \times 5.61 + 1 \times 2.13 = 1.13$	$0.4 + 0.05 \times 8.19 + 0.4 \times 5.61 + 0.55 \times 2.13 = 4.23$	4.23	2

La solución óptima indica que para los años 1 y 2, el jardinero debe aplicar fertilizante ($k^* = 2$) independientemente del estado del sistema (condiciones del suelo, determinadas por medio de las pruebas químicas). En el año 3 se debe aplicar fertilizante sólo si el sistema está en el estado 2 o 3 (condiciones del suelo, regulares o malas). Los ingresos totales esperados en los tres años son $f_1(1) = 10.74$, si el estado del sistema en el año 1 es bueno, $f_1(2) = 7.92$, si es regular, y $f_1(3) = 4.23$ si es malo.

El problema del horizonte finito se puede generalizar de dos modos. En el primero, las probabilidades de transición y sus funciones de ingreso no necesitan ser iguales en todos los años. En el segundo, se puede aplicar un factor de descuento al ingreso esperado de las etapas sucesivas, de modo que $f_1(i)$ sea el *valor presente* de los ingresos esperados para todas las etapas.

En la primera generalización se requiere que los valores de ingreso r_{ij}^k y las probabilidades de transición p_{ij}^k sean funciones de la etapa n, como muestra la siguiente ecuación recursiva de programación dinámica:

$$f_N(i) = \max_k \{v_i^{k,N}\}$$

$$f_n(i) = \max_k \left\{ v_i^{k,n} + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{k,n} f_{n+1}(j) \right\},\ n = 1, 2, \ldots, N-1$$

en la que

$$v_i^{k,n} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{k,n} r_{ij}^{k,n}$$

En la segunda generalización, dado que α (< 1) es el factor de descuento por año, tal que $D dentro de un año tienen un valor de $\alpha D, la nueva ecuación recursiva es

$$f_N(i) = \max_k \{v_i^k\}$$

$$f_n(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f_{n+1}(j) \right\}, \; n = 1, 2, \ldots, N - 1$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.2A

1. Una empresa revisa cada año el estado de uno de sus productos importantes, y debe decidir si tiene éxito (estado 1) o no lo tiene (estado 2). La empresa debe decidir si tiene que anunciar o no el producto, para impulsar las ventas. Las siguientes matrices $\mathbf{P}^1$ y $\mathbf{P}^2$ representan las probabilidades de transición con y sin publicidad durante cualquier año. Los ingresos correspondientes se representan con las matrices $\mathbf{R}^1$ y $\mathbf{R}^2$. Determine las decisiones óptimas durante los 3 años próximos.

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \; \mathbf{R}^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \; \mathbf{R}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Una empresa se puede anunciar por radio, TV o en periódicos. Los costos semanales de publicidad en los tres medios se estiman en $200, $900 y $300, respectivamente. La empresa puede clasificar sus volúmenes de ventas durante cada semana en 1) regular, 2) bueno y 3) excelente. A continuación se ve un resumen de las probabilidades de transición correspondientes a cada medio publicitario.

$$\text{Radio} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{TV} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Periódico} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los ingresos semanales correspondientes (en miles de $) son

$$\text{Radio} \begin{pmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{pmatrix} \qquad \text{TV} \begin{pmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{pmatrix} \qquad \text{Periódico} \begin{pmatrix} 400 & 530 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{pmatrix}$$

Determine la política óptima de publicidad durante los 3 años siguientes.

3. *Problema de inventario*. Una tienda de electrodomésticos puede hacer pedidos de refrigeradores al inicio de cada mes, para su entrega inmediata. Cada vez que se coloca un pedido incurre en un costo fijo de $100. El costo de almacenamiento por refrigerador y por mes es de $5. La penalización por agotarse la mercancía se estima en $150 por refrigerador y por mes. La demanda mensual se ve en la siguiente función de distribución de probabilidades:

Demanda x	0	1	2
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

La política de la tienda es que la existencia máxima no debe ser mayor de dos refrigeradores en cualquier mes. Determine lo siguiente:

a) Las probabilidades de transición para las distintas alternativas del problema.

b) El costo esperado del inventario, por mes, en función del estado del sistema y de la alternativa de decisión.

c) La política óptima de pedidos durante los 3 meses siguientes.

4. Repita el problema 3, suponiendo que cambia la función de distribución de probabilidades durante el trimestre siguiente, y es la de la siguiente tabla:

	Mes		
Demanda, x	1	2	3
0	0.1	0.3	0.2
1	0.4	0.5	0.4
2	0.5	0.2	0.4

19.3 MODELO CON ETAPAS INFINITAS

Hay dos métodos para resolver el problema con etapas infinitas. En el primero se deben evaluar *todas* las políticas estacionarias del problema de decisión. Esto equivale a un proceso de *enumeración exhaustiva* y sólo se puede usar si la cantidad de políticas estacionarias es razonablemente pequeña. El segundo método, llamado *iteración de política*, en general es más eficiente, porque determina en forma iterativa la política óptima.

19.3.1 Método de enumeración exhaustiva

Supongamos que el problema de decisión tiene S políticas estacionarias, y supondremos que $\mathbf{P}^s$ y $\mathbf{R}^s$ son las matrices de transición y de ingreso (de un paso) correspondientes a la política, $s = 1, 2, ..., S$. Los pasos del método de enumeración son los siguientes:

Paso 1. Calcule v_i^s, el ingreso esperado de un paso (un periodo) de la política s, dado el estado i, $i = 1, 2, ..., m$.

Paso 2. Calcule π_i^s, las probabilidades estacionarias a largo plazo de la matriz de transición $\mathbf{P}^s$ asociadas con la política s. Estas probabilidades, cuando existen, se calculan con las ecuaciones

$$\boldsymbol{\pi}^s \, \mathbf{P}^s = \boldsymbol{\pi}^s$$

$$\pi_1^s + \pi_2^s + \cdots + \pi_m^s = 1$$

en donde $\boldsymbol{\pi}^s = (\pi_1^s, \pi_2^s, \cdots, \pi_m^s)$.

Paso 3. Determine E^s, el ingreso esperado de la política s por paso (periodo) de transición, con la fórmula

$$E^s = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^s v_i^s$$

Paso 4. Se determina la política óptima s^* tal que

$$E^{s^*} = \max_s\{E^s\}$$

Ilustraremos el método resolviendo el problema del jardinero con un horizonte de planeación de periodos infinitos.

Ejemplo 19.3-1

El problema del jardinero tiene un total de ocho políticas estacionarias, como se ve en la siguiente tabla:

Política estacionaria, *s*	Acción
1	No fertiliza.
2	Fertiliza a pesar del estado.
3	Fertiliza si está en estado 1.
4	Fertiliza si está en estado 2.
5	Fertiliza si está en estado 3.
6	Fertiliza si está en estado 1 o 2.
7	Fertiliza si está en estado 1 o 3.
8	Fertiliza si está en estado 2 o 3.

Las matrices $\mathbf{P}^s$ y $\mathbf{R}^s$ de las políticas 3 a 8 se deducen de las correspondientes a las políticas 1 y 2, y son las siguientes:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^6 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^6 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^7 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^7 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}^8 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, se pueden calcular los valores de v_i^s que aparecen en la tabla siguiente.

	v_i^s		
s	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1	5.3	3.0	−1.0
2	4.7	3.1	0.4
3	4.7	3.0	−1.0
4	5.3	3.1	−1.0
5	5.3	3.0	0.4
6	4.7	3.1	−1.0
7	4.7	3.0	0.4
8	5.3	3.1	0.4

Los cálculos de las probabilidades estacionarias se hacen con las ecuaciones

$$\boldsymbol{\pi}^s \mathbf{P}^s = \boldsymbol{\pi}^s$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m = 1$$

Por ejemplo, si $s = 2$, las ecuaciones correspondientes son

$$\begin{aligned} 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.6\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.4\pi_3 &= \pi_2 \\ 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.55\pi_3 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

(Observe que una de las tres primeras ecuaciones es redundante.) La solución es

$$\pi_1^2 = \tfrac{6}{59},\ \pi_2^2 = \tfrac{31}{59},\ \pi_3^2 = \tfrac{22}{59}$$

En este caso, el ingreso anual esperado es

$$\begin{aligned} E^2 &= \pi_1^2 v_1^2 + \pi_2^2 v_2^2 + \pi_3^2 v_3^2 \\ &= \left(\tfrac{6}{59}\right) \times 4.7 + \left(\tfrac{31}{59}\right) \times 3.1 + \left(\tfrac{22}{59}\right) \times 0.4 = 2.256 \end{aligned}$$

En la tabla siguiente se resumen π^s y E^s para todas las políticas estacionarias. (Aunque no afectará esto a los cálculos en modo alguno, observe que cada una de las políticas 1, 3, 4 y 6 tiene un estado absorbente: el estado 3. Es la razón por la que $\pi_1 = \pi_2 = 0$ y $\pi_3 = 1$ para todas esas políticas.)

s	π_1^s	π_2^s	π_3^s	E^s
1	0	0	1	-1
2	$\frac{6}{59}$	$\frac{31}{59}$	$\frac{22}{59}$	**2.256**
3	0	0	1	0.4
4	0	0	1	-1
5	$\frac{5}{154}$	$\frac{69}{154}$	$\frac{80}{154}$	1.724
6	0	0	1	-1
7	$\frac{5}{137}$	$\frac{62}{137}$	$\frac{70}{137}$	1.734
8	$\frac{12}{135}$	$\frac{69}{135}$	$\frac{54}{135}$	2.216

La política 2 produce el máximo ingreso anual esperado. La política óptima a largo plazo es aplicar fertilizante independientemente del estado del sistema.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3A

1. Resuelva el problema 2, conjunto de problemas 19.2a, para una cantidad infinita de periodos, con el método de enumeración exhaustiva.
2. Resuelva el problema 2, conjunto de problemas 19.2a, para horizonte de planeación infinito, con el método de enumeración exhaustiva.
3. Resuelva el problema 3, conjunto de problemas 19.2a, con el método de enumeración exhaustiva y suponiendo un horizonte infinito.

19.3.2 Método de iteración de política sin descuento

Para apreciar la dificultad asociada al método de enumeración exhaustiva, supondremos que el jardinero tiene cuatro acciones (alternativas) en lugar de dos: 1) no fertilizar, 2) fertilizar una vez durante la estación, 3) fertilizar dos veces y 4) fertilizar tres veces. En este caso, el jardinero tendría un total de $4^3 = 256$ políticas estacionarias. Al aumentar la cantidad de alternativas de 2 a 4, la cantidad de políticas estacionarias se "dispara" en forma exponencial, de 8 a 256. No sólo es difícil enumerar en forma explícita a todas las políticas, sino que también la cantidad de cálculos puede ser grande y prohibitiva. Es la razón por la que interesa desarrollar el método de iteración de política.

En la sección 19.2 se demostró que, para cualquier política específica, el ingreso esperado total en la etapa n se expresa con la ecuación recursiva

$$f_n(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f_{n+1}(j),\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Esta acción recursiva es la base del desarrollo del método de iteración de política. Sin embargo, se debe modificar un poco la forma actual, para permitir el estudio del comportamiento asintótico del proceso. Se definirá η como la cantidad de etapas *restantes* por considerar. Es

distinto de *n* en la ecuación, que define a la etapa *n*. La ecuación recursiva se escribe entonces como sigue:

$$f_\eta(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f_{\eta-1}(j), \ i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

Obsérvese que f_η es el ingreso esperado acumulado si η es la cantidad de etapas que faltan por considerar. Con la nueva definición, se puede estudiar el comportamiento asintótico del proceso haciendo que $\eta \to \infty$.

Ya que

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ \ldots, \pi_m)$$

es el vector de probabilidades de estado estable de la matriz de transición $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ y

$$E = \pi_1 v_1 + \pi_2 v_2 + \ \ldots \ + \pi_m v_m$$

es el ingreso esperado por etapa, como se calculó en la sección 19.3.1, se puede demostrar que cuando η es muy grande,

$$f_\eta(i) = \eta E + f(i)$$

donde $f(i)$ es un término constante que representa la intersección asintótica de f_η dado el estado i.

Ya que $f_\eta(i)$ es el ingreso óptimo acumulado cuando hay η etapas restantes, dado el estado i, y como E es el ingreso esperado *por etapa*, se puede ver en forma intuitiva por qué $f_\eta(i)$ es igual a ηE más un factor de corrección $f(i)$ para tener en cuenta el estado específico i. En este resultado se supone que $\eta \to \infty$.

Ahora, con esta información, la ecuación recursiva se escribe como sigue:

$$\eta E + f(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \{(\eta - 1)E + f(j)\}, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

Se simplifica y se obtiene

$$E + f(i) - \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f(j) = v_i, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

En este caso hay m ecuaciones con $m + 1$ incógnitas, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(m)$ y E.

Como en la sección 19.3.1, el objetivo es determinar la política óptima que produce el valor máximo de E. Como hay m ecuaciones con $m + 1$ incógnitas, el valor óptimo de E no se puede determinar en un paso. En lugar de ello se usa un método iterativo de dos pasos que, a partir de una política arbitraria, determina una nueva política que produce un valor mejor de E. El proceso iterativo termina cuando hay dos políticas sucesivas que son idénticas.

1. *Paso de determinación de valor*. Se elige la política s en forma arbitraria. Con sus matrices correspondientes $\mathbf{P}^s$ y $\mathbf{R}^s$ y suponiendo, en forma arbitraria, que $f^s(m) = 0$, se resuelven las ecuaciones

$$E^s + f^s(i) - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^s f^s(j) = v_i^s, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

con las incógnitas E^s, $f^s(1)$, ..., y $f^s(m-1)$. Continuar en el paso de mejoramiento de política.

2. *Paso de mejoramiento de política.* Para cada estado i, determinar la política t que corresponde a

$$\max_k \left\{ v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f^s(j) \right\}, \ i = 1, 2, \ \dots, m$$

Los valores de $f^s(j)$, $j = 1, 2, ..., m$ son los que se determinan en el paso de determinación de valor. Las decisiones óptimas resultantes para los estados 1, 2, ..., y m son la nueva política t. Si s y t son idénticas, t es óptima. En caso contrario, hacer $s = t$ y regresar al paso de determinación de valor.

Ejemplo 19.3-2

Se resolverá el problema del jardinero con el método de iteración de política.

Se comienza con la política arbitraria que indica no aplicar fertilizante. Las matrices correspondientes son

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del paso de iteración de valores son

$$\begin{aligned} E + f(1) - 0.2f(1) - 0.5f(2) - 0.3f(3) &= 5.3 \\ E + f(2) \qquad\qquad - 0.5f(2) - 0.5f(3) &= 3 \\ E + f(3) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - f(3) &= -1 \end{aligned}$$

Si en forma arbitraria $f(3) = 0$, la solución de las ecuaciones es

$$E = -1, \ f(1) = 12.88, \ f(2) = 8, \ f(3) = 0$$

A continuación se aplica el paso de mejoramiento de política. Los cálculos correspondientes se ven en el cuadro siguiente.

	$v_i^k + p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k f(3)$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.2 \times 12.88 + 0.5 \times 8 + 0.3 \times 0 = 11.876$	$4.7 + 0.3 \times 12.88 + 0.6 \times 8 + 0.1 \times 0 = 13.36$	13.36	2
2	$3 + 0 \times 12.88 + 0.5 \times 8 + 0.5 \times 0 = 7$	$3.1 + 0.1 \times 12.88 + 0.6 \times 8 + 0.3 \times 0 = 9.19$	9.19	2
3	$-1 + 0 \times 12.88 + 0 \times 8 + 1 \times 0 = -1$	$0.4 + 0.05 \times 12.88 + 0.4 \times 8 + 0.55 \times 0 = 4.24$	4.24	2

La nueva política indica aplicar fertilizante independientemente del estado. Como es distinta de la anterior, se hace de nuevo el paso de determinación de valor. Las matrices correspondientes a la nueva política son

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Estas matrices definen las siguientes ecuaciones:

$$E + f(1) - \ \ 0.3f(1) - 0.6f(2) - \ \ 0.1f(3) = 4.7$$
$$E + f(2) - \ \ 0.1f(1) - 0.6f(2) - \ \ 0.3f(3) = 3.1$$
$$E + f(3) - 0.05f(1) - 0.4f(2) - 0.55f(3) = 0.4$$

De nuevo si $f(3) = 0$, se llega a la solución

$$E = 2.26,\ f(1) = 6.75,\ f(2) = 3.80,\ f(3) = 0$$

Los cálculos del paso de mejoramiento de política se ven en el siguiente cuadro.

	$v_i^k + p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k f(3)$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.2 \times 6.75 + 0.5 \times 3.80 + 0.3 \times 0 = 8.55$	$4.7 + 0.3 \times 6.75 + 0.6 \times 3.80 + 0.1 \times 0 = 9.01$	9.01	2
2	$3 + 0 \times 6.75 + 0.5 \times 3.80 + 0.5 \times 0 = 4.90$	$3.1 + 0.1 \times 6.75 + 0.6 \times 3.80 + 0.3 \times 0 = 6.06$	6.06	2
3	$-1 + 0 \times 6.75 + 0 \times 3.80 + 1 \times 0 = -1$	$0.4 + 0.05 \times 6.75 + 0.4 \times 3.80 + 0.55 \times 0 = 2.26$	2.26	2

La nueva política, que establece aplicar fertilizante independientemente del estado, es idéntica a la anterior. Entonces esta última política es óptima, y termina el proceso iterativo. Es la misma conclusión a la que se llega con el método de enumeración exhaustiva (Sección 19.3.1). Sin embargo, obsérvese que el método de iteración de política converge con rapidez hacia al política óptima; ésta es una característica normal del nuevo método.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3B

1. En el problema 1, conjunto de problemas 19.2a, suponga que el horizonte de planeación es infinito. Resuelva el problema con el método de iteración de política, y compare los resultados con los del problema 1, conjunto de problemas 19.3a.
2. Resuelva el problema 2, conjunto de problemas 19.2a, con el método de iteración de política, suponiendo un horizonte de planeación infinito. Compare los resultados con los del problema 2, conjunto de problemas 19.3a.
3. Resuelva el problema 3, conjunto de problemas 19.2a, con el método de iteración de política, suponiendo un horizonte infinito de planeación, y compare los resultados con los del problema 3, conjunto de problemas 19.3a.

19.3.3 Método de iteración de política con descuento

El algoritmo de iteración de política se puede ampliar para abarcar descuentos. Dado el factor de descuento α (< 1), la ecuación recursiva de etapas finitas se puede plantear como sigue (véase la sección 19.2)

$$f_\eta(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f_{\eta-1}(j) \right\}$$

(Nótese que η representa la cantidad de etapas *que faltan*.) Se puede demostrar que cuando $\eta \to \infty$ (modelo infinito), $f_\eta(i) = f(i)$, siendo $f(i)$ el ingreso a valor presente (descontado), si el sistema está en el estado i y funciona durante un horizonte infinito. Así, el comportamiento

de $f_\eta(i)$ a largo plazo, cuando $\eta \to \infty$ es independiente del valor de η. Esto contrasta con el caso donde no hay descuentos, en el que $f_\eta(i) = \eta E + f(i)$. Cabría esperar este resultado, porque al descontar, el efecto de los ingresos futuros disminuye a cero, en forma asintótica. En realidad, el valor presente $f(i)$ debe tender a un valor constante cuando $\eta \to \infty$.

Con base en esta información, se modifican como sigue los pasos de iteración de política.

1. *Paso de determinación de valor.* Para una política arbitraria s con matrices $\mathbf{P}^s$ y $\mathbf{R}^s$, resolver las m ecuaciones

$$f^s(i) - \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^s f^s(j) = v_i^s,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

con las m incógnitas $f^s(1), f^s(2), \ldots, f^s(m)$.

2. *Paso de mejoramiento de política.* Para cada estado i, determinar la política t que corresponda a

$$\max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f^s(j) \right\},\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$f^s(j)$ se obtiene en el paso de determinación de valor. Si la política resultante t es la misma, detenerse; t es óptima. En caso contrario, poner $s = t$ y regresar al paso de determinación de valor.

Ejemplo 19.3-3

Se resolverá el ejemplo 19.3-2 con el factor de descuento $\alpha = 0.6$.

Partiremos de la política arbitraria $s = \{1, 1, 1\}$. Las matrices asociadas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{R}$ ($\mathbf{P}^1$ y $\mathbf{R}^1$ en el ejemplo 19.3-1) dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} f(1) - 0.6[0.2f(1) + 0.5f(2) + 0.3f(3)] &= 5.3 \\ f(2) - 0.6[\qquad 0.5f(2) + 0.5f(3)] &= 3. \\ f(3) - 0.6[\qquad\qquad f(3)] &= -1. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es

$$f_1 = 6.61,\ f_2 = 3.21,\ f_3 = -2.5$$

En el siguiente cuadro se presenta un resumen de la iteración de mejoramiento de política:

	$v_i^k + 0.6[p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k f(3)]$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.6[0.2 \times 6.61 + 0.5 \times 3.21 + 0.3 \times -2.5] = 6.61$	$4.7 + 0.6[0.3 \times 6.61 + 0.6 \times 0.21 + 0.1 \times -2.5] = 6.90$	6.90	2
2	$3 + 0.6[0 \times 6.61 + 0.5 \times 3.21 + 0.5 \times -2.5] = 3.21$	$3.1 + 0.6[0.1 \times 6.61 + 0.6 \times 3.21 + 0.3 \times -2.5] = 4.2$	4.2	2
3	$-1 + 0.6[0 \times 6.61 + 0 \times 3.21 + 1 \times -2.5] = -2.5$	$0.4 + 0.6[0.05 \times 6.61 + 0.4 \times 3.21 + 0.55 \times -2.5] = 0.54$	0.54	2

El paso de determinación de valor usando $\mathbf{P}^2$ y $\mathbf{R}^2$ (Ejemplo 19.3-1) produce las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(1) - 0.6[\ 0.3f(1) + 0.6f(2) + \ \ 0.1f(3)] &= 4.7 \\ f(2) - 0.6[\ 0.1f(1) + 0.6f(2) + \ \ 0.3f(3)] &= 3.1 \\ f(3) - 0.6[0.05f(1) + 0.4f(2) + 0.55f(3)] &= 0.4 \end{aligned}$$

La solución de esas ecuaciones es

$$f(1) = 8.89,\ f(2) = 6.62,\ f(3) = 3.37$$

El paso de mejoramiento de política da como resultado el siguiente cuadro:

	$v_i^k + 0.6[p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k (3)]$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.6[0.2 \times 8.89 + 0.5 \times 6.62 + 0.3 \times 3.37] = 8.96$	$4.7 + 0.6[0.3 \times 8.89 + 0.6 \times 6.62 + 0.1 \times 3.37] = 8.89$	8.96	1
2	$3 + 0.6[0 \times 8.89 + 0.5 \times 6.62 + 0.5 \times 3.37] = 6.00$	$3.1 + 0.6[0.1 \times 8.89 + 0.6 \times 6.62 + 0.3 \times 3.37] = 6.62$	6.62	2
3	$-1 + 0.6[0 \times 8.89 + 0 \times 6.62 + 1 \times 3.37] = 1.02$	$0.4 + 0.6[0.05 \times 8.89 + 0.4 \times 6.62 + 0.55 \times 3.37] = 3.37$	3.37	2

Como la nueva política (1, 2, 2) es distinta de la anterior, se repite el paso de determinación de valor con $\mathbf{P}^3$ y $\mathbf{R}^3$ (Ejemplo 19.3-1). Esto da como resultado las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(1) - 0.6[\ 0.2f(1) + 0.5f(2) + \ \ 0.3f(3)] &= 5.3 \\ f(2) - 0.6[\ 0.1f(1) + 0.6f(2) + \ \ 0.3f(3)] &= 3.1 \\ f(3) - 0.6[0.05f(1) + 0.4f(2) + 0.55f(3)] &= 0.4 \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones es

$$f(1) = 8.97,\ f(2) = 6.63,\ f(3) = 3.38$$

El paso de mejoramiento de política da como resultado el siguiente cuadro:

	$v_i^k + 0.6[p_{i1}^k f(1) + p_{i2}^k f(2) + p_{i3}^k f(3)]$		Solución óptima	
i	$k = 1$	$k = 2$	$f(i)$	k^*
1	$5.3 + 0.6[0.2 \times 8.97 + 0.5 \times 6.63 + 0.3 \times 3.38] = 8.97$	$4.7 + 0.6[0.3 \times 8.97 + 0.6 \times 6.63 + 0.1 \times 3.38] = 8.90$	8.98	1
2	$3 + 0.6[0 \times 8.97 + 0.5 \times 6.63 + 0.5 \times 3.38] = 6.00$	$3.1 + 0.6[0.1 \times 8.97 + 0.6 \times 6.63 + 0.3 \times 3.38] = 6.63$	6.63	2
3	$-1 + 0.6[0 \times 8.97 + 0 \times 6.63 + 1 \times 3.38] = 1.03$	$0.4 + 0.6[0.05 \times 8.97 + 0.4 \times 6.63 + 0.55 \times 3.38] = 3.37$	3.37	2

Como la nueva política (1, 2, 2) es idéntica a la anterior, es óptima. Obsérvese que los descuentos han producido una política óptima distinta que establece no aplicar fertilizante si el estado del sistema es bueno (estado 3).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3C

1. Repita los problemas siguientes, suponiendo que el factor de descuento es $\alpha = 0.9$.

a) Problema 1, conjunto de problemas 19.3b.

b) Problema 2, conjunto de problemas 19.3b.

c) Problema 3, conjunto de problemas 19.3b.

19.4 SOLUCIÓN CON PROGRAMACIÓN LINEAL

Los problemas de decisión de Markov con un número infinito de estados, tanto con como sin descuento, se pueden formular y resolver como programas lineales. Se examinará primero el caso sin descuento.

En la sección 19.3.1 se muestra que el problema de Markov con un número infinito de estados sin descuento se reduce en último término a determinar la política óptima s^*, que corresponde a

$$\max_{s\varepsilon S}\left\{\sum_{j=1}^{m}\pi_i^s v_i^s \mid \boldsymbol{\pi}^s\mathbf{P}^s = \boldsymbol{\pi}^s,\ \pi_1^s + \pi_2^s + \ \ldots\ + \pi_m^s = 1,\ \pi_i^s \geq 0\ i = 1, 2, \ldots, m\right\}$$

El conjunto S es el de todas las políticas posibles del problema. Las restricciones del problema aseguran que π_i^s, $i = 1, 2, ..., m$ representan la probabilidades de estado estable de la cadena de Markov $\mathbf{P}^s$.

El problema se resuelve en la sección 19.3.1 con enumeración exhaustiva. En forma específica, cada política s se especifica con un conjunto fijo de acciones (como se ilustra en el problema del jardinero, en el ejemplo 19.3-1. El mismo problema será la base para desarrollar la formulación del programa lineal. Sin embargo, se necesita modificar las incógnitas del problema de tal forma que la solución óptima determine *en forma automática* la acción (alternativa) óptima k cuando en el sistema esté en el estado i. El conjunto de todas las acciones óptimas definirá entonces a s^*, la política óptima.

Sea

q_i^k = Probabilidad condicional de elegir la alternativa k dado que el sistema está en el estado i

Así, este problema se puede expresar como

$$\text{Maximizar } E = \sum_{i=1}^{m}\pi_i\left(\sum_{k=1}^{K}q_i^k v_i^k\right)$$

sujeta a

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{m}\pi_i p_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m = 1$$

$$q_i^1 + q_i^2 + \cdots + q_i^K = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\pi_i \geq 0,\ q_i^k \geq 0,\ \text{ para toda } i \text{ y } k$$

Nótese que p_{ij} es una función de la política seleccionada, y en consecuencia de las alternativas específicas k de la política.

El problema se puede convertir en un programa lineal, con las sustituciones adecuadas donde intervenga q_i^k. Obsérvese que la formulación es equivalente a la original, en la sección 19.3.1, sólo si $q_i^k = 1$ para exactamente *una* k para cada i, con lo cual se reducirá la suma $\sum_{k=1}^{K} q_i^k v_i^k$ a $v_i^{k^*}$, donde k^* es la alternativa óptima elegida. El programa lineal que formularemos aquí tiene en cuenta esta condición, en forma automática.

Se definen

$$w_{ik} = \pi_i q_i^k, \text{ para toda } i \text{ y } k$$

Por definición, w_{ik} representa la probabilidad *conjunta* de que el estado i tome la decisión k. Según la teoría de las probabilidades,

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{K} w_{ik}$$

Por consiguiente

$$q_i^k = \frac{w_{ik}}{\sum_{k=1}^{K} w_{ik}}$$

Así, la restricción $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$ se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} w_{ik} = 1$$

También, se implica en forma automática la restricción $\sum_{k=1}^{K} q_i^k = 1$ por la forma en que se definió q_i^k en términos de w_{ik}. (¡Compruébelo!) Entonces el problema se puede escribir como sigue:

$$\text{Maximizar } E = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} v_i^k w_{ik}$$

sujeta a

$$\sum_{k=1}^{K} w_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} p_{ij}^k w_{ik} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} w_{ik} = 1$$

$$w_{ik} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

El modelo que resulta es un programa lineal en w_{ik}. Su solución óptima garantiza en forma automática que $q_i^k = 1$ para una k de cada i. Primero, obsérvese que el programa lineal tiene m ecuaciones independientes (una de las ecuaciones asociadas con $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ es redundante). En consecuencia, el problema debe tener m variables básicas. Se puede demostrar que w_{ik} debe ser estrictamente positiva para al menos una k de cada i. A partir de estos dos resultados se llega a la conclusión que

$$q_i^k = \frac{w_{ik}}{\sum_{k=1}^{K} w_{ik}}$$

sólo puede asumir un valor binario (0 o 1). (Por cierto, el resultado anterior también demuestra que $\pi_i = \sum_{k=1}^{K} w_{ik} = w_{ik^*}$, donde k^* es la alternativa que corresponde a $w_{ik} > 0$.)

Ejemplo 19.4-1

A continuación se ve la formulación del programa lineal para el problema del jardinero, sin descontar:

$$\text{Maximizar } E = 5.3w_{11} + 4.7w_{12} + 3w_{21} + 3.1w_{22} - w_{31} + 0.4w_{32}$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
w_{11} + w_{12} - (0.2w_{11} + 0.3w_{12} \qquad\qquad + 0.1w_{22} \qquad\quad + 0.5w_{32}) &= 0\\
w_{21} + w_{22} - (0.5w_{11} + 0.6w_{12} + 0.5w_{21} + 0.6w_{22} \qquad\quad + 0.4w_{32}) &= 0\\
w_{31} + w_{32} - (0.3w_{11} + 0.1w_{12} + 0.5w_{21} + 0.3w_{22} + w_{31} + 0.55w_{32}) &= 0\\
w_{11} + w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{31} + w_{32} &= 1\\
w_{ik} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } k
\end{aligned}$$

La solución óptima es $w_{11} = w_{12} = w_{31} = 0$ y $w_{12} = 0.1017$, $w_{22} = 0.5254$ y $w_{32} = 0.3729$. Este resultado quiere decir que $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = 1$. Entonces, la política óptima selecciona la alternativa $k = 2$ para $i = 1$, 2 y 3. El valor óptimo de E es $4.7(0.1017) + 3.1(0.5254) + 0.4(0.3729) = 2.256$. Los valores positivos de w_{ik} son exactamente iguales a los valores de π_i asociados con la política óptima en el procedimiento de enumeración exhaustiva del ejemplo 19.3-1, lo cual demuestra la relación directa entre los dos métodos.

A continuación examinaremos el problema de decisión de Markov con descuento. En la sección 19.3.2 se expresa el problema con la ecuación recursiva

$$f(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f(j) \right\}, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

Estas ecuaciones equivalen a

$$f(i) \geq \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f(j) + v_i^k, \text{ para toda } i \text{ y } k$$

siempre y cuando $f(i)$ alcance su valor mínimo para cada i. Ahora veamos la función objetivo

$$\text{Minimizar} \sum_{i=1}^{m} b_i f(i)$$

sonde b_i (> 0 para toda i) es una constante arbitraria. Se puede demostrar que la optimización de esta función sujeta a las desigualdades dadas dará como resultado el valor mínimo de $f(i)$. Así, el problema se puede formular como sigue:

$$\text{Minimizar} \sum_{i=1}^{m} b_i f(i)$$

sujeta a

$$f(i) - \alpha \sum_{i=1}^{m} p_{ij}^k f(j) \geq v_i^k, \text{ para toda } i \text{ y } k$$

$$f(i) \text{ sin restricción en símbolo para todas las } i$$

Ahora bien, el dual del problema es

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} v_i^k w_{ik}$$

sujeta a

$$\sum_{k=1}^{K} w_{jk} - \alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} p_{ij}^k w_{ik} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

$$w_{ik} \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

Ejemplo 19.4-2

En el problema del jardinero, el factor de descuento es $\alpha = 0.6$. Si se hace que $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, el dual del problema lineal se puede escribir como sigue:

$$\text{Maximizar } 5.3w_{11} + 4.7w_{12} + 3w_{12} + 3.1w_{22} - w_{31} + 4w_{32}$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
w_{11} + w_{12} - 0.6[0.2w_{11} + 0.3w_{12} \qquad\qquad + 0.1w_{22} \qquad\quad + \ 0.5w_{32}] &= 1 \\
w_{21} + w_{22} - 0.6[0.5w_{11} + 0.6w_{12} + 0.5w_{21} + 0.6w_{22} \qquad\quad + \ 0.4w_{32}] &= 1 \\
w_{31} + w_{32} - 0.6[0.3w_{11} + 0.1w_{12} + 0.5w_{21} + 0.3w_{22} + w_{31} + 0.55w_{32}] &= 1 \\
w_{ik} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } k &
\end{aligned}$$

La solución óptima es $w_{12} = w_{21} = w_{31} = 0$ y $w_{11} = 1.5678$, $w_{22} = 3.3528$, y $w_{32} = 2.8145$. Esta solución indica que la política óptima es (1, 2, 2).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.4A

1. Formule los siguientes problemas como programas lineales.

a) Problema 1, conjunto de problemas 19.3b

b) Problema 2, conjunto de problemas 19.3b

c) Problema 3, conjunto de problemas 19.3b

19.5 APÉNDICE: REPASO DE LAS CADENAS DE MARKOV

Sean los puntos discretos en el tiempo $\{t_k\}$ para $k = 1, 2, \ldots$, y sea ξ_{t_k} la variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en el momento t_k. La familia de variables aleatorias $\{\xi_{t_k}\}$ forma un **proceso estocástico**. Los estados en el momento (o tiempo) t_k representan en realidad los resultados (exhaustivos y mutuamente excluyentes) del sistema en ese momento. La cantidad de estados puede, entonces, ser finita o infinita. Por ejemplo, la distribución de Poisson

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

representa un proceso estocástico con una cantidad infinita de estados. La variable aleatoria n representa la cantidad de ocurrencias entre 0 y t, suponiendo que el sistema comienza cuando el tiempo es 0. Los estados del sistema en cualquier momento t se expresan entonces por $n = 0, 1, 2, \ldots$

Otro ejemplo es el lanzamiento de moneda con k intentos. Se puede considerar que cada intento es un punto en el tiempo. La sucesión de intentos que resulta forma un proceso estocástico. El estado del sistema en cualquier intento es una cruz o una cara.

En esta sección se presenta un resumen de una clase de sistemas estocásticos que incluye a los **procesos de Markov** y a las **cadenas de Markov**. Una cadena de Markov es un caso especial de los procesos de Markov. Se usa para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas estocásticos a corto y a largo plazo.

19.5.1 Procesos de Markov

La ocurrencia de un estado futuro en un proceso de Markov depende de el estado inmediatamente anterior, y sólo de él. Si $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) representa puntos en el tiempo, la familia de variables aleatorias $\{\xi_{t_n}\}$ es un proceso de Markov si posee la siguiente **propiedad de Markov**, o **propiedad markoviana**:

$$P\{\xi_{t_n} = x_n | \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, \xi_{t_0} = x_0\} = P\{\xi_{t_n} = x_n | \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

para todos los valores posibles de $\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$.

La probabilidad $p_{x_{n-1}, x_n} = P\{\xi_{t_n} = x_n | \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$ se llama **probabilidad de transición**. Representa la probabilidad *condicional* de que el estado esté en x_n cuando t es t_n, dado que estaba en x_{n-1} en t_{n-1}. A esta probabilidad también se le llama **transición de un paso**, porque describe al sistema entre t_{n-1} y t_n. Por consiguiente, una probabilidad de transición de m pasos se define como sigue:

$$p_{x_n, x_{n+m}} = P\{\xi_{t_{n+m}} = x_{n+m} | \xi_n = x_n\}$$

19.5.2 Cadenas de Markov

Sea E_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, los resultados exhaustivos y mutuamente excluyentes (estados) de un sistema en cualquier momento. Al iniciar, cuando el tiempo es t_0, el sistema puede estar en cualquiera de esos estados. Sea $a_j^{(0)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, la probabilidad absoluta de que el sistema esté en el estado E_j en t_0. Además, se supone que el sistema es de Markov.

Se define

$$p_{ij} = P\{\xi_{t_n} = j | \xi_{t_{n-1}} = i\}$$

como la probabilidad de transición de un paso, de ir del estado i en t_{n-1} al estado j en t_n y se supone que esas probabilidades son estables en el tiempo. Las probabilidades de transición del estado E_i al estado E_j se pueden ordenar con más comodidad en forma de una matriz como la siguiente:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

La matriz **P** se llama matriz de **transición homogénea**, porque todas las probabilidades de transición p_{ij} son fijas e independientes del tiempo. Las probabilidades p_{ij} deben satisfacer las condiciones

$$\sum_j p_{ij} = 1, \text{ para toda } i$$

$$p_{ij} \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

La matriz de transición **P** junto con las probabilidades iniciales $\{a_j^{(0)}\}$ asociadas a los estados E_j definen por completo una cadena de Markov. Se suele imaginar una cadena de Markov como una descripción del comportamiento de transición de un sistema durante intervalos iguales. Hay casos en donde la longitud del intervalo depende de las características del sistema, y por consiguiente puede no ser igual. A este caso se le refiere como una **cadena de Markov enclavada**.

Probabilidades absolutas y de transición. Dadas $\{a_j^{(0)}\}$ y **P** de una cadena de Markov, las probabilidades absolutas del sistema después de determinada cantidad de transiciones se determinan como sigue. Sean $\{a_j^{(n)}\}$ las probabilidades absolutas del sistema después de n transiciones, esto es, cuando t es t_n. La ecuación general de $\{a_j^{(n)}\}$ en función de $\{a_j^{(0)}\}$ y **P** se calculan como sigue:

$$a_j^{(1)} = a_1^{(0)}p_{1j} + a_2^{(0)}p_{2j} + a_3^{(0)}p_{3j} + \cdots = \sum_i a_i^{(0)}p_{ij}$$

También,

$$a_j^{(2)} = \sum_i a_i^{(1)}p_{ij} = \sum_i \left(\sum_k a_k^{(0)}p_{ki}\right)p_{ij} = \sum_k a_k^{(0)}\left(\sum_i p_{ki}\,p_{ij}\right) = \sum_k a_k^{(0)}p_{kj}^{(2)}$$

en donde $p_{kj}^{(2)} = \sum_i p_{ki}p_{ij}$ es la **probabilidad de transición de dos pasos**, o de **segundo orden**; esto es, la probabilidad de pasar del estado k al estado j exactamente en dos transiciones.

Se puede demostrar por inducción que

$$a_j^{(n)} = \sum_i a_i^{(0)}\left(\sum_k p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}\right) = \sum_i a_i^{(0)}p_{ij}^{(n)}$$

en donde $p_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad de transición de n pasos o de orden n definida por la fórmula recursiva

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}$$

En general,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-m)}p_{kj}^{(m)},\ 0 < m < n, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

A estas ecuaciones se les llama ecuaciones de **Chapman-Kolomogorov**.

Los elementos de una matriz de transición superior $\|p_{ij}^{(n)}\|$ se pueden obtener en forma directa por multiplicación de matrices. Así,

$$\|p_{ij}^{(2)}\| = \|p_{ij}\|\,\|p_{ij}\| = \mathbf{P}^2$$

$$\|p_{ij}^{(3)}\| = \|p_{ij}^{(2)}\|\,\|p_{ij}\| = \mathbf{P}^3$$

y en general,

$$\|p_{ij}^{(n)}\| = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$$

Por consiguiente, si se definen las probabilidades absolutas en forma vectorial como

$$\mathbf{a}^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \ldots)$$

entonces,

$$\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n$$

Ejemplo 19.5-1

Se tiene la siguiente cadena de Markov con dos estados,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{a}^{(0)} = (0.7,\ 0.3)$. Determinar $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(4)}$, y $\mathbf{a}^{(8)}$.

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.443 & 0.557 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^8 = \mathbf{P}^4\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.443 & 0.557 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.443 & 0.557 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4291 & 0.5709 \\ 0.4284 & 0.5716 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{a}^{(1)} = (0.7 \quad 0.3)\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = (0.32 \quad 0.68)$$

$$\mathbf{a}^{(4)} = (0.7 \quad 0.3)\begin{pmatrix} 0.443 & 0.557 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix} = (0.436 \quad 0.564)$$

$$\mathbf{a}^{(8)} = (0.7 \quad 0.3)\begin{pmatrix} 0.4291 & 0.5709 \\ 0.4284 & 0.5716 \end{pmatrix} = (0.4289 \quad 0.5711)$$

Los renglones de $\mathbf{P}^8$ tienden a ser idénticos. También, $\mathbf{a}^{(8)}$ tiende a ser idéntica con los renglones de $\mathbf{P}^{(8)}$. Es el resultado de las propiedades de las cadenas de Markov a largo plazo, que implica que las probabilidades absolutas a largo plazo son independientes de $\mathbf{a}^{(0)}$. En este caso, las probabilidades que resultan se llaman **probabilidades de estado estable**.

Clasificación de los estados en las cadenas de Markov. En las cadenas de Markov puede interesar el comportamiento del sistema durante un tiempo corto. Esto se representa con las probabilidades absolutas, como se indicó en la sección anterior. Una investigación importante implica el comportamiento del sistema a largo plazo, a medida que las transiciones tienden al infinito. En ese caso se necesita un procedimiento sistemático que pronostique el comportamiento del sistema a largo plazo.

Cadena de Markov irreducible. Se dice que una cadena de Markov es *irreducible* si todo estado E_i puede alcanzarse de cualquier otro estado E_j después de una cantidad finita de transiciones; esto es,

$$P_{ij}^{(n)} > 0,\ i \neq j,\ 1 \leq n < \infty$$

En este caso se *comunican* todos los estados de la cadena.

Conjunto cerrado y estados absorbentes. En un proceso de Markov, un conjunto C de estados se llama cerrado si el sistema, una vez en uno de los estados de C, permanece allí por tiempo indefinido. Un ejemplo especial de un conjunto cerrado es un estado único E_j con probabilidad de transición $p_{ij} = 1$. En ese caso a E_j se le llama **estado absorbente**. Todos los estados de una cadena irreducible deben formar un conjunto cerrado, y ningún subconjunto puede ser cerrado. El conjunto cerrado C también debe satisfacer todas las condiciones de una cadena de Markov, y por consiguiente se puede estudiar en forma independiente.

Ejemplo 19.5-2

Se tiene la siguiente cadena de Markov:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Esta cadena se ilustra en forma gráfica en la figura 19.1. Allí se ve que los cuatro estados *no* constituyen una cadena irreducible, porque desde el estado 3 no se puede llegar a los estados 0, 1 y 2. El estado 3 en sí forma un conjunto cerrado y en consecuencia es absorbente. También se puede decir que el estado 3 forma una cadena irreducible.

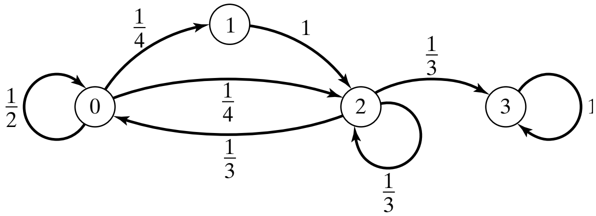


FIGURA 19.1

Ejemplo de los estados de una cadena Markov

Primeros tiempos de retorno. Una definición importante en la teoría de las cadenas de Markov es el **tiempo de primer retorno**. Si el sistema está inicialmente en el estado E_j puede regresar al estado E_j por *primera vez* en el n-ésimo paso, $n \geq 1$. La cantidad de pasos para que el sistema regrese a E_j se llama tiempo de primer retorno.

Sea $f_{ij}^{(n)}$ la probabilidad de que el primer retorno a E_j suceda en el n-ésimo paso. Entonces, si la matriz de transición es

$$\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$$

se puede llegar a una ecuación de $f_{ij}^{(n)}$ como sigue:

$$p_{jj} = f_{jj}^{(1)}$$
$$p_{jj}^{(2)} = f_{jj}^{(2)} + f_{jj}^{(1)} p_{jj}$$

o sea

$$f_{jj}^{(2)} = p_{jj}^{(2)} - f_{jj}^{(1)} p_{jj}$$

Por inducción,

$$f_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{jj}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}$$

La probabilidad de que haya *cuando menos* un retorno al estado E_j se determina entonces con

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$

Así, es seguro que el sistema regresa a j si $f_{jj} = 1$. En este caso, si μ_{jj} define al tiempo promedio de retorno (de recurrencia),

$$\mu_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

Si $f_{jj} < 1$, no es seguro que el sistema regrese a E_j, y en consecuencia, $\mu_{jj} = \infty$.

Los estados de una cadena de Markov se pueden clasificar con base en la definición del tiempo de primer retorno como sigue:

1. Un estado es **transitorio** si $f_{jj} < 1$; esto es, si $\mu_{jj} = \infty$.
2. Un estado es **recurrente** (persistente) si $f_{jj} = 1$.
3. Un estado recurrente es **nulo** si $\mu_{jj} = \infty$ y es **no nulo** si $\mu_{jj} < \infty$.
4. Un estado es **periódico** con periodo t si es posible un retorno sólo en t, $2t$, $3t$, . . . pasos. Esto quiere decir que $p_{jj}^{(n)} = 0$ siempre que n no es divisible entre t.
5. Un estado recurrente es **ergódico** si es no nulo y aperiódico (no periódico).

Si todos los estados de una cadena de Markov son ergódicos, la cadena es *irreducible*. En este caso, las probabilidades absolutas

$$\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n$$

siempre converge en forma única a una distribución límite cuando $n \rightarrow \infty$, donde la distribución límite es independiente de las probabilidades iniciales $\mathbf{a}^{(0)}$.

El siguiente teorema es pertinente:

Teorema 19.5-1. *Todos los estados de una cadena de Markov irreducible e infinita pueden pertenecer a uno, y sólo uno, de tres estados: transitorio, recurrente nulo y recurrente no nulo. En cada caso, todos los estados se comunican y tienen el mismo periodo. Para el caso especial en el que la cadena tiene una cantidad finita de estados, la cadena no puede consistir sólo de estados transitorios, y tampoco puede contener estados nulos.*

Distribución límite de cadenas irreducibles. En el ejemplo 19.5-1 se ve que a medida que aumenta la cantidad de transiciones, la probabilidad absoluta se vuelve independiente de la distribución inicial. Ésta es la propiedad de las cadenas de Markov a largo plazo. En esta sección se presenta la determinación de la distribución límite (a largo plazo) de una cadena irreducible. La explicación se restringirá al tipo aperiódico, por ser el único tipo necesario en este texto.

La existencia de una distribución límite en una cadena aperiódica irreducible depende de la clase de sus estados. Así, si se consideran las tres clases del teorema 19.5-1, se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 19.5-2. *En una cadena de Markov irreducible y aperiódica,*

a) *Si todos los estados son transitorios o nulos, entonces* $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ *cuando* $n \rightarrow \infty$ *para toda* i *y* j, *y no existe distribución límite.*

b) *Si todos los estados son ergódicos, entonces*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_j^{(n)} = \pi_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

en donde π_j *es la distribución límite* (*de estado estable*). *Existen las probabilidades* π_j *en forma única, y son independientes de* $a_j^{(0)}$. *En este caso, se puede determinar* π_j *a partir del conjunto de ecuaciones*[2]

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$
$$1 = \sum_j \pi_j$$

El tiempo medio de recurrencia para el estado j se define entonces por

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}$$

Ejemplo 19.5-3

Para determinar la distribución de probabilidades de estado estable en el ejemplo 19.5-1, se tienen

$$\pi_1 = 0.2\pi_1 + 0.6\pi_2$$
$$\pi_2 = 0.8\pi_1 + 0.4\pi_2$$
$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

La solución es $\pi_1 = 0.4286$ y $\pi_2 = 0.5714$. Estos resultados se acercan mucho a los valores de renglón en $\mathbf{a}^{(8)}$ del ejemplo 19.5-1.

Los tiempos promedio de recurrencia para los estados 1 y 2 son

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 2.3$$
$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 1.75$$

Ejemplo 19.5-4

Se tiene la siguiente cadena de Markov con tres estados:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

A ésta se le llama **matriz doblemente estocástica**, porque

$$\sum_{i=0}^{2} p_{ij} = \sum_{j=0}^{2} p_{ij} = 1$$

En esos casos, las probabilidades de estado estable son

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \tfrac{1}{3}$$

---

[2]Una de las ecuaciones $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$ es redundante.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.5A

1. Clasifique las siguientes cadenas de Markov y determine sus distribuciones estables.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p + q = 1$$

2. Determine el tiempo medio de recurrencia para cada estado de la siguiente cadena de Markov:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Derman, C., *Finite State Markovian Decision Processes*, Academic Press, New York, 1970.

Howard, R., *Dynamic Programming and Markov Processes*, MIT Press, Cambridge, MA, 1960.

CAPÍTULO 20

Teoría clásica de la optimización

En la teoría clásica de la optimización se usa el cálculo diferencial para determinar puntos extremos, o de máximo o mínimo, para funciones sin restricciones y restringidas. Puede ser que los métodos no sean adecuados para cálculos numéricos eficientes, pero la teoría básica proporciona el fundamento de la mayor parte de los algoritmos de programación no lineal (véase el capítulo 21).

En este capítulo se establecen las condiciones necesarias y suficientes para determinar puntos extremos no restringidos, los métodos (del) *jacobiano* y (del) *lagrangiano* para problemas con restricciones de igualdad, y las condiciones de *Karush-Kuhn-Tucker* para problemas con restricciones de desigualdad.

20.1 PROBLEMAS SIN RESTRICCIÓN

Un punto extremo de una función $f(\mathbf{X})$ define un máximo o un mínimo de ella. Matemáticamente, un punto $\mathbf{X}_0 = (x_1^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0)$ es máximo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$$

para toda $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_j, ..., h_n)$ y $|h_j|$ es suficientemente pequeña para toda j. En otras palabras, $\mathbf{X}_0$ es un valor máximo si el valor de f en cada punto de la proximidad de $\mathbf{X}_0$ no es mayor que $f(\mathbf{X}_0)$. En forma parecida, $\mathbf{X}_0$ es un mínimo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{X}_0)$$

La figura 20.1 ilustra los máximos y mínimos de una función $f(x)$ de una sola variable dentro del intervalo $[a, b]$. Todos los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_6 son extremos de $f(x)$, y x_1, x_3 y x_6 son máximos, y x_2 y x_4 son mínimos. Ya que

$$f(x_6) = \text{máx}\{f(x_1), f(x_3), f(x_6)\}$$

$f(x_6)$ es un máximo **global** o **absoluto**, y $f(x_1)$ y $f(x_3)$ son máximos **locales** o **relativos**. De igual modo, $f(x_4)$ es un mínimo local y $f(x_2)$ es un mínimo global.

Aunque x_1 (en la figura 20.1) es un punto máximo, se diferencia de los otros máximos locales porque el valor de f correspondiente a al menos un punto en la proximidad de x_1 es

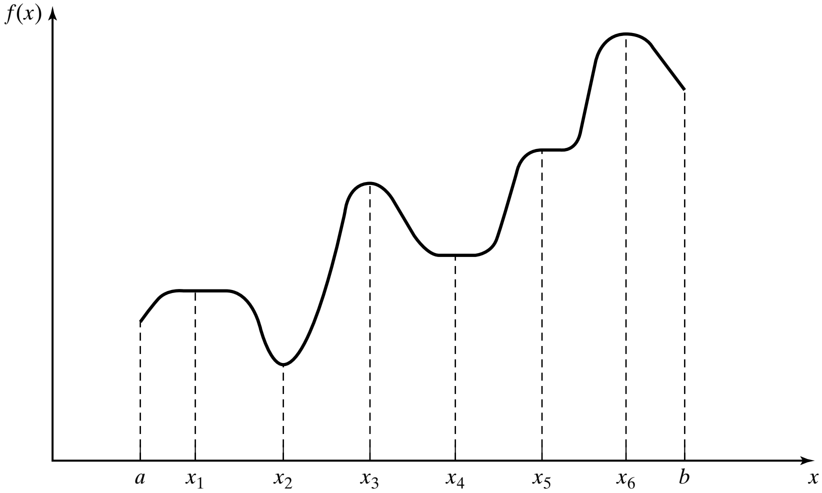


FIGURA 20.1

Ejemplos de puntos extremos para una función de una sola variable

igual a $f(x_1)$. A este respecto, es un **máximo débil**, mientras que x_3 y x_4 son **máximos fuertes**. En general, $\mathbf{X}_0$ es un máximo débil si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$, y es un máximo fuerte si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) < f(\mathbf{X}_0)$, donde $\mathbf{h}$ es como se definió arriba.

En la figura 20.1, la primera derivada o pendiente de f es igual a cero en todos los puntos extremos. Esta propiedad también se satisface en puntos de **inflexión** y de **silla**, como x_5. Si un punto con pendiente (gradiente) cero no es un extremo (máximo o mínimo), debe ser un punto de inflexión o un punto de silla.

20.1.1 Condiciones necesarias y suficientes

En esta sección se presentan las condiciones necesarias y suficientes para que una función $f(\mathbf{X})$ de n variables tenga puntos extremos. Se supone que las derivadas primera y segunda de $f(\mathbf{X})$ son continuos en toda x.

Teorema 20.1-1. *Una condición necesaria para que* $\mathbf{X}_0$ *sea un punto extremo de* $f(\mathbf{X})$ *es que*

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$$

Demostración. De acuerdo con el teorema de Taylor, para $0 < \theta < 1$,

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}_0) = \nabla f(\mathbf{X}_0)\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X}_0+\theta\mathbf{h}}$$

en donde $\mathbf{h}$ es lo que se definió antes. Para $|h_j|$ suficientemente pequeña, el término restante $\frac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}$ es del orden de h_j^2, y entonces

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}_0) = \nabla f(\mathbf{X}_0)\mathbf{h} + 0(h_j^2) \approx \nabla f(\mathbf{X}_0)\mathbf{h}$$

Se puede demostrar, por contradicción, que $\nabla f(\mathbf{X}_0)$ debe anularse en un punto mínimo $\mathbf{X}_0$. Si no lo hiciera, para una j específica, la condición siguiente será válida:

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_j} < 0 \text{ o } \frac{\partial f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_j} > 0$$

Si se selecciona h_j con el signo adecuado, siempre es posible tener

$$h_j \frac{\partial f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_j} < 0$$

Igualando a cero las demás h_j, con el desarrollo de Taylor se obtiene

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) < f(\mathbf{X}_0)$$

Este resultado contradice la hipótesis que $\mathbf{X}_0$ es un punto mínimo. En consecuencia $\nabla f(\mathbf{X}_0)$ debe ser igual a cero. Se puede hacer una demostración similar para el caso de la maximización.

Como la condición necesaria también queda satisfecha con los puntos de inflexión y de silla, los puntos obtenidos con la solución de

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$$

se llaman puntos **estacionarios**. El teorema que sigue establece las condiciones para que $\mathbf{X}_0$ sea un punto extremo.

Teorema 20.1-2. *Una condición suficiente para que un punto estacionario* $\mathbf{X}_0$ *sea un punto extremo es que la matriz hessiana* $\mathbf{H}$ *evaluada en* X_0 *satisfaga las siguientes condiciones:*

1. *Que* $\mathbf{H}$ *sea positiva definida si* $\mathbf{X}_0$ *es un punto mínimo.*
2. *Que* $\mathbf{H}$ *sea negativa definida si* $\mathbf{X}_0$ *es un punto máximo.*

Demostración. De acuerdo con el teorema de Taylor, para $0 < \theta < 1$,

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}_0) = \nabla f(\mathbf{X}_0)\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h}}$$

Ya que $\mathbf{X}_0$ es un punto estacionario, entonces $\nabla f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$ (Teorema 20.2-1). Así,

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{X}_0) = \tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h}}$$

Si $\mathbf{X}_0$ es un punto mínimo, entonces

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) > f(\mathbf{X}_0),\ \mathbf{h} \neq \mathbf{0}$$

Entonces, para que $\mathbf{X}_0$ sea un punto mínimo, se debe cumplir

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h}} > 0$$

Ya que la segunda derivada parcial es continua, la expresión $\frac{1}{2}\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}$ debe tener el mismo signo tanto en $\mathbf{X}_0$ como en $\mathbf{X}_0 + \theta\mathbf{h}$. Como $\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{x}_0}$ define a una forma cuadrática (véase la sección A.3), esta expresión (y en consecuencia $\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h}}$) es positiva si, y sólo si $\mathbf{H}|_{\mathbf{x}_0}$ es positiva definida. Eso quiere decir que una condición suficiente para que el punto estacionario $\mathbf{X}_0$ sea un mínimo es que la matriz hessiana H**,** evaluada en el mismo punto, sea positiva definida. Una demostración similar para el caso de la maximización indica que la matriz hessiana correspondiente debe ser negativa definida.

Ejemplo 20.1-1

Se tiene la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

La condición necesaria

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$$

da como resultado

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas es

$$\mathbf{X}_0 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3})$$

Para establecer la suficiencia se examina

$$\mathbf{H}|_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes menores principales de $\mathbf{H}|_{\mathbf{x}_0}$ tienen los valores –2, 4 y –6, respectivamente. Así, como se indica en la sección A.3 $\mathbf{H}|_{\mathbf{x}_0}$ es negativa definida y $\mathbf{X}_0 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3})$ representa un punto máximo.

En general, si $\mathbf{H}|_{\mathbf{x}_0}$ es indefinida, $\mathbf{X}_0$ debe ser un punto de silla. Para casos inciertos, $\mathbf{X}_0$ puede ser o no un punto extremo, y la condición de suficiente se vuelve muy complicada, porque se deben considerar términos de orden superior en el desarrollo de Taylor.

La condición de suficiencia establecida por el teorema 20.1-2 se aplica a funciones de una variable como se verá a continuación. Si y_0 es un punto estacionario, entonces

1. y_0 es un máximo si $f'(y_0) < 0$.
2. y_0 es un mínimo si $f'(y_0) > 0$.

Si en caso de una variable $f''(y_0) = 0$, se deben investigar variables de orden superior, como indica el siguiente teorema.

Teorema 20.1.3. *Dado y_0, un punto estacionario de $f(y)$, si las primeras $(n – 1)$ derivadas son cero y si $f^{(n)}(y_0) \neq 0$, entonces*

1. *y_0 es un punto de inflexión si n es impar.*
2. *y_0 es un punto mínimo si n es par y $f^{(n)}(y_0) > 0$.*
3. *y_0 es un punto máximo si n es par y $f^{(n)}(y_0) < 0$.*

Ejemplo 20.1-2

En la figura 20.2 se ven las gráficas de las dos funciones siguientes:

$$f(y) = y^4$$
$$g(y) = y^3$$

Para $f(y) = y^4$

$$f'(y) = 4y^3 = 0$$

con la que se obtiene el punto estacionario $y_0 = 0$. Ahora bien,

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto mínimo (véase la figura 20.2).

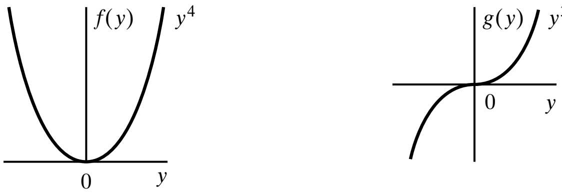


FIGURA 20.2
Puntos ectremos de $f(y) = y^4$ y $g(y) = y^3$

Para $g(y) = y^3$,

$$g'(y) = 3y^2 = 0$$

Esto indica que $y_0 = 0$ es un punto estacionario. También

$$g'(0) = g''(0),\ g^{(3)}(0) = 6 \neq 0$$

En consecuencia, y_0 es un punto de inflexión.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.1A

1. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 + x$

b) $f(x) = x^4 + x^2$

c) $f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$

d) $f(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$

e) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 10$

2. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones.

a) $f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

b) $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3$

3. Compruebe que la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

tiene los puntos estacionarios (0, 3, 1), (0, 1, –1), (1, 2, 0), (2, 1, 1) y (2, 3, –1). Use la condición de suficiencia para determinar los puntos extremos.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones simultáneas convirtiendo el sistema a una función objetivo no lineal sin restricciones.

$$x_2 - x_1^2 = 0$$
$$x_2 - x_1 = 2$$

(*Sugerencia*: el mín $f^2(x_1, x_2)$ está en $f(x_1, x_2) = 0$.)

5. Demuestre el teorema 20.1-3.

20.1.2 El método de Newton-Raphson

En general, las ecuaciones de condición necesaria, $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, pueden ser difíciles de resolver numéricamente. El método de Newton-Raphson es un procedimiento iterativo para resolver ecuaciones simultáneas no lineales. Aunque aquí se presenta el método en este contexto, en realidad es parte de los **métodos de gradiente** para optimizar numéricamente funciones no restringidas (véase la sección 21.1.2).

Se tienen las ecuaciones simultáneas

$$f_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Sea $\mathbf{X}^k$ un punto dado. Entonces, con el desarrollo de Taylor,

$$f_i(\mathbf{X}) \approx f_i(\mathbf{X}^k) + \nabla f_i(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^k), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Así, las ecuaciones originales, $f_i(\mathbf{X}) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$ se pueden aproximar de esta forma:

$$f_i(\mathbf{X}^k) + \nabla f_i(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^k) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

Estas ecuaciones se pueden escribir con notación matricial del siguiente modo:

$$\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}^k) = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{B}_k$ es no singular, entonces

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^k - \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A}_k$$

La idea del método es comenzar en un punto inicial $\mathbf{X}^0$. Al aplicar la ecuación anterior se determina un punto nuevo $\mathbf{X}^{k+1}$ a partir de $\mathbf{X}^k$. El procedimiento termina en $\mathbf{X}^m$ como punto de solución, cuando $\mathbf{X}^m \approx \mathbf{X}^{m-1}$.

Se ilustra en la figura 20.3 una interpretación geométrica del método, con una función de una sola variable. La relación entre x^k y x^{k+1} para una función $f(x)$ de una variable se reduce a

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

o bien

$$f'(x^k) = \frac{f(x^k)}{x^k - x^{k+1}}$$

En la figura se ve que x^{k+1} se determina con la pendiente de $f(x)$ en x^k, siendo $\tan\theta = f'(x^k)$.

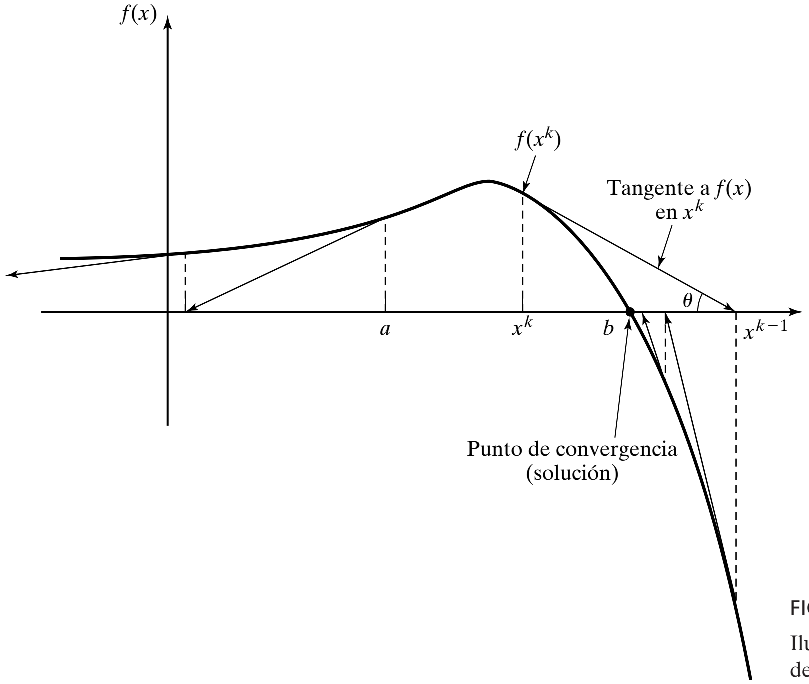


FIGURA 20.3

Ilustración del proceso iterativo del método Newton-Raphson

Una dificultad del método es que no siempre se garantiza la convergencia, a menos que la función f tenga buen comportamiento. En la figura 20.3, si el punto inicial es a, el método diverge. No hay manera fácil para ubicar un "buen" punto inicial.

Ejemplo 20.1-3

Para demostrar el uso del método de Newton-Raphson, se determinarán los puntos estacionarios de la función

$$f(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$$

La ecuación que se debe resolver para determinar los puntos estacionarios es $f'(x) = 0$, y de esta forma se obtiene

$$72x^3 - 234x^2 + 241x - 78 = 0$$

Se puede usar la plantilla ch20NewtonRaphson.xls de Excel para resolver cualquier ecuación de una variable. La figura 20.4 muestra las iteraciones para resolver $f'(x) = 0$. Esta plantilla requiere ingresar la relación siguiente en la celda C3, con la variable x sustituida con A3:

$$\frac{72x^3 - 234x^2 + 241x - 78}{216x^2 - 468x + 241}$$

Obsérvese que el denominador es la primera derivada del numerador, como se requiere en el método de Newton-Raphson. Se establece el límite de tolerancia $\mathbf{\Delta} = 0.001$ y se selecciona el punto inicial $x_0 = 10$. El límite de tolerancia indica la diferencia admisible entre x^k y x^{k+1} que señala el término de las iteraciones. El método converge hacia $x = 1.5$. En realidad, $f(x)$

C3 = =(72*A3^3-234*A3^2+241*A3-78)/(216*A3^2-468*A3+241)

ch20NewtonRaphson

	A	B	C	D
1	Newton-Raphson (One-Variable) Method			
2	Input data: Type f(A3)/f '(A3) in C3, where A3 represents x in f(x)			
3	A3		#VALUE!	
4	Λ =	0.001	Clear Calculations	
5	Initial x0=	10		
6	Solution:			
7	x* =	1.50000		
8	Clalculations:		Perform calculation	
9	x(k)	x(k+1)	f(x(k))/f '(x(k))	
10	10.000000	7.032108	2.967892314	
11	7.032108	5.055679	1.97642875	
12	5.055679	3.741312	1.314367243	
13	3.741312	2.869954	0.871358025	
14	2.869954	2.296406	0.573547408	
15	2.296406	1.925154	0.371251909	
16	1.925154	1.694452	0.230702166	
17	1.694452	1.565453	0.128999578	
18	1.565453	1.511296	0.054156405	
19	1.5'1296	1.500432	0.010864068	
20	1.500432	1.500001	0.000431385	

FIGURA 20.4

Solución de $72x^3 - 234x^2 + 241x - 78 = 0$ obtenida con Excel y el método de Newton-Raphson

tiene tres puntos estacionarios, en $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{13}{12}$ y $x = \frac{3}{2}$. Se pueden determinar los otros dos puntos seleccionando valores distintos de x_0. En efecto, con $x_0 = 0.5$ y $x_0 = 1$ se deberían determinar los puntos estacionarios que faltan. Se pide al lector usar x_0 distinta para adquirir sensibilidad para el funcionamiento del método.

En general, en el método de Newton-Raphson se requieren varios intentos para determinar "todas" las soluciones. En este ejemplo ya sabíamos que la ecuación tiene tres raíces. Sin embargo, ese no es el caso cuando hay funciones complejas o de varias variables.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.1B

1. Resuelva el problema 1(c), conjunto de problemas 20.1a, con ch20NewtonRaphson.xls.
2. Resuelva el problema 2(b), conjunto de problemas 20.1a, con el método de Newton-Raphson.

20.2 PROBLEMAS CON RESTRICCIONES

En esta sección se examina la optimización de funciones continuas con restricciones. En la sección 20.2.1 se presenta el caso de restricciones de igualdad, y en la sección 20.2.2 se manejan restricciones de desigualdad. La presentación de la sección 30.2.1 está en su mayor parte en Beightler y asociados (1979, págs. 45 a 55).

20.2.1 Restricciones de igualdad

En esta sección se presentan dos métodos: el **jacobiano** o **de Jacobi** y el **lagrangiano** o **de Lagrange**. El método lagrangiano se puede deducir en forma lógica a partir del método jacobiano. Esta relación proporciona una interesante interpretación económica del método lagrangiano.

Método de derivadas restringidas (jacobiano). Se tiene el problema

$$\text{Minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

en donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^T$$

Las funciones $f(\mathbf{X})$ y $g_i(\mathbf{X})$, $i = 1, 2, ..., m$ son doble y continuamente diferenciables.

La idea de usar derivadas restringidas es desarrollar una ecuación de forma cerrada para las primeras derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ en todos los puntos que satisfacen las restricciones $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Los puntos estacionarios correspondientes se identifican como aquellos en los que se anulan esas derivadas parciales. A continuación se pueden usar las condiciones de suficiencia introducidas en la sección 20.1 para comprobar la identidad de los puntos estacionarios.

Para aclarar el concepto propuesto, considérese a $f(x_1, x_2)$, que se ve en la figura 20.5. Esta función se va a minimizar, sujeta a la restricción

$$g_1(x_1, x_2) = x_2 - b = 0$$

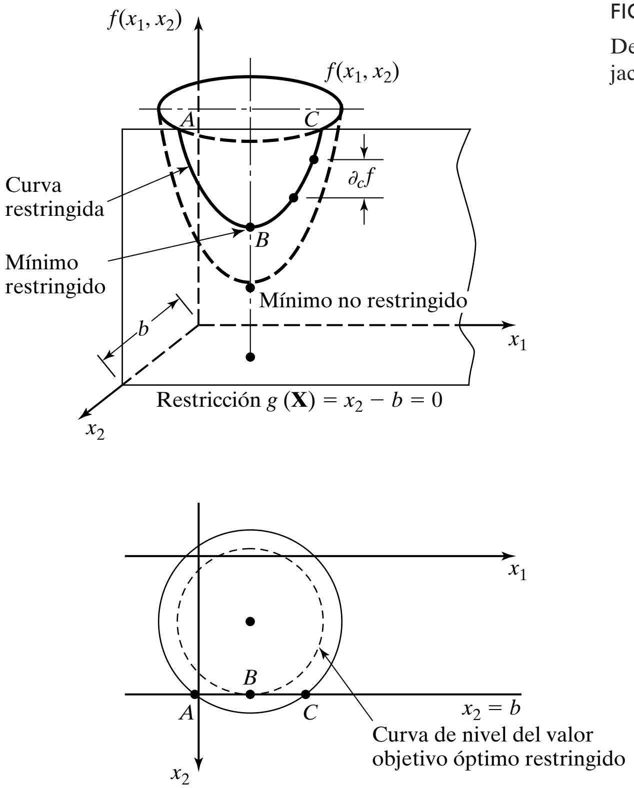


FIGURA 20.5

Demostración del concepto del método jacobiano

en donde b es una constante. De acuerdo con la figura 20.5, la curva definida por los tres puntos A, B y C representa los valores de $f(x_1, x_2)$ para los cuales siempre se satisface la restricción. El método de derivadas restringidas define al gradiente de $f(x_1, x_2)$ en cualquier punto de la curva ABC. El punto B en el que se anula la derivada restringida es un punto estacionario del problema con restricción.

A continuación se desarrollará matemáticamente este método. De acuerdo con el teorema de Taylor, se tiene que para $\mathbf{X} + \mathbf{\Delta X}$ en la proximidad factible de $\mathbf{X}$,

$$f(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} + O(\Delta\mathbf{x}_j^2)$$

Cuando $\Delta x_j \rightarrow 0$, las ecuaciones se reducen a

$$\partial f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X})\partial\mathbf{X}$$

y

$$\partial\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\partial\mathbf{X}$$

Para satisfacer la factibilidad debe cumplirse que $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, $\partial\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, y en consecuencia

$$\partial f(\mathbf{X}) - \nabla f(\mathbf{X})\partial\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$\nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\partial\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Éstas son $(m + 1)$ ecuaciones con $(n + 1)$ incógnitas, $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial\mathbf{X}$. Obsérvese que $\partial f(\mathbf{X})$ es una variable dependiente y en consecuencia está determinada una vez conocida $\partial\mathbf{X}$. Eso quiere decir que hay m ecuaciones con n incógnitas.

Si $m > n$, al menos $(m - n)$ ecuaciones son redundantes. Al eliminar la redundancia el sistema se reduce a $m \leq n$. Si $m = n$, la solución es $\partial\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{X}$ no tiene proximidad factible, lo que quiere decir que el espacio de soluciones está formado sólo por un punto. El caso restante, cuando $m < n$, requiere más desarrollo.

Se definirá

$$\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

tal que

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \ \mathbf{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-m})$$

Los vectores $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$ se llaman variable *dependiente* e *independiente*, respectivamente. Al reexpresar los vectores gradiente de f y g en términos de $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$ se obtiene

$$\nabla f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}} f, \nabla_{\mathbf{Z}} f)$$

$$\nabla\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{g}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{g})$$

Se definirán

$$\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Y}} g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Y}} g_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{z}}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{z}} g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{z}} g_m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}_{m\times m}$ es la llamada **matriz jacobiana**, y $\mathbf{C}_{m\times n-m}$ es la **matriz de control**. Se supone que la jacobiana **J** es no singular. Eso siempre es posible, porque las *m* ecuaciones dadas son independientes, por definición. Entonces, se deben seleccionar los componentes del vector **Y** tales que la matriz **J** sea no singular.

El conjunto original de ecuaciones en $\partial f(\mathbf{X})$ y en $\partial\mathbf{X}$ se pueden escribir como sigue:

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f\, \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{z}} f\, \partial \mathbf{Z}$$

y

$$\mathbf{J}\,\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{C}\,\partial \mathbf{Z}$$

Ya que **J** es no singular, existe su inversa, $\mathbf{J}^{-1}$. En consecuencia,

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\,\partial \mathbf{Z}$$

Al sustituir $\partial\mathbf{Y}$ en la ecuación de $\partial f(\mathbf{X})$ se obtiene ∂f en función de $\partial\mathbf{Z}$, esto es,

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C})\partial \mathbf{Z}$$

A partir de esta ecuación, la derivada restringida con respecto al vector independiente **Z** es

$$\nabla_c f = \frac{\partial_c f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{\partial_c \mathbf{Z}} = \nabla_z f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}$$

donde $\nabla_c f$ es el vector **gradiente restringido** de *f* con respecto a **Z**. Así, $\nabla_c f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ debe ser nulo en los puntos estacionarios.

Las condiciones de suficiencia son parecidas a las que se desarrollaron en la sección 20.1. La matriz hessiana corresponderá al vector independiente **Z**, y los elementos de ella deben ser las segundas derivadas *restringidas*. Para mostrar cómo se obtiene, sea

$$\nabla_c f = \nabla_{\mathbf{z}} f - \mathbf{WC}$$

Se ve entonces que el *i*-ésimo renglón de la matriz hessiana (restringida) es $\partial\nabla_c f/\partial z_i$. Obsérvese que **W** es una función de **Y**, y **Y** es una función de **Z**. Así, la derivada parcial de $\nabla_c f$ con respecto a z_i se basa en la siguiente regla de la cadena:

$$\frac{\partial w_j}{\partial z_i} = \frac{\partial w_j}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial z_i}$$

Ejemplo 20.2-1

El problema es el siguiente:

$$f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_3^2$$
$$g_1(\mathbf{X}) = x_1x_3 + 2x_2 + x_2^2 - 11 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 - 14 = 0$$

Para el punto factible $\mathbf{X}^0 = (1, 2, 3)$, se desea estudiar la variación de $f\,(= \partial_c f)$ en la proximidad factible de $\mathbf{X}^0$.

Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{Z} = x_2$$

Entonces,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (2x_1 + 5x_3^2, 10x_1x_3)$$

$$\nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que se debe estimar $\partial_c f$ en la proximidad factible del punto factible $\mathbf{X}^0 = (1, 2, 3)$ dado un pequeño cambio $\partial x_2 = 0.01$ en la variable independiente x_2. Entonces,

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{6}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, el valor incremental de la f restringida es

$$\partial_c f = (\nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C})\partial Z = \left(6(2) - (47, 30)\begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix}\right)\partial x_2 = -46.01\,\partial x_2$$

Al especificar el valor de ∂x_2 para la variable *independiente* x_2, se determinan valores factibles de ∂x_1 y ∂x_2 para las variables dependientes x_1 y x_3, con la fórmula

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\,\partial \mathbf{Z}$$

Entonces, para $\partial x_2 = 0.01$,

$$\begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_3 \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\,\partial x_2 = \begin{pmatrix} -0.0283 \\ 0.0250 \end{pmatrix}$$

Ahora se comparará el valor de $\partial_c f$ que se calculó arriba con la diferencia $f(\mathbf{X}^0 + \partial\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^0)$, para $\partial x_2 = 0.01$.

$$\mathbf{X}^0 + \partial\mathbf{X} = (1 - 0.0283, 2 + 0.01, 3 + 0.025) = (0.9717, 2.01, 3.025)$$

Esto da como resultado

$$f(\mathbf{X}^0) = 58, f(\mathbf{X}^0 + \partial\mathbf{X}) = 57.523$$

o sea

$$f(\mathbf{X}^0 + \partial\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^0) = -.477$$

La cantidad –0.477 se compara en forma favorable con $\partial_c = -46.01$, $\partial x_2 = -0.4601$. La diferencia de los dos valores se debe a la aproximación lineal al calcular $\partial_c f$ en $\mathbf{X}^0$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2A

1. Considere el ejemplo 20.2-1.

a) Calcule $\partial_c f$ con los dos métodos presentados en el ejemplo, usando $\partial x_2 = 0.001$ en lugar de $\partial x_2 = 0.01$. ¿Se vuelve más despreciable el efecto de la aproximación lineal al disminuir el valor de ∂x_2?

b) Especifique una relación entre ∂x_1, ∂x_2 y ∂x_3 en el punto factible $\mathbf{X}^0 = (1, 2, 3)$ que mantenga factible al punto $(x_1^0 + \partial x_1, x_2^0 + \partial x_2, x_3^0 + \partial x_3)$.

c) Si $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = x_1$, ¿cuál es el valor de ∂x_1 que produce el mismo valor de $\partial_c f$ que se mencionó en el ejemplo?

Ejemplo 20.2-2

En este ejemplo se ilustra el uso de las derivadas restringidas. El problema es

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \end{aligned}$$

Entonces, para determinar los puntos extremos restringidos, sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_2) \text{ y } \quad \mathbf{Z} = x_3$$

Entonces,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2x_1, 2x_2),\ \nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \nabla_c f = \frac{\partial_c f}{\partial_c x_3} &= 2x_3 - (2x_1, 2x_2)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10}{3}x_1 - \frac{28}{3}x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Las ecuaciones para determinar los puntos estacionarios son, entonces

$$\begin{aligned} \nabla_c f &= 0 \\ g_1(\mathbf{X}) &= 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 10 & -28 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\mathbf{X}^0 \approx (0.81, 0.35, 0.28)$$

La identidad de $\mathbf{X}^0$ se comprueba con la condición de suficiencia. Si x_3 es la variable independiente, de $\nabla_c f$ se concluye que

$$\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c x_3^2} = \tfrac{10}{3}\left(\frac{dx_1}{dx_3}\right) - \tfrac{28}{3}\left(\frac{dx_2}{dx_3}\right) + 2 = \left(\tfrac{10}{3}, -\tfrac{28}{3}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dx_3}\\ \dfrac{dx_2}{dx_3}\end{pmatrix} + 2$$

De acuerdo con el método jacobiano,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dx_3}\\ \dfrac{dx_2}{dx_3}\end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix}\tfrac{5}{3}\\ -\tfrac{14}{3}\end{pmatrix}$$

La sustitución da como resultado $\partial_c^2 f/\partial_c x_3^2 = \frac{460}{9} > 0$. En consecuencia, $\mathbf{X}^0$ es el punto mínimo.

Análisis de sensibilidad en el método jacobiano. Con el método jacobiano se puede estudiar el efecto que tienen cambios pequeños en el lado derecho de las restricciones, sobre el valor óptimo de f. En forma específica, ¿cuál es el efecto de cambiar de $g_i(\mathbf{X}) = 0$ a $g_i(\mathbf{X}) = \partial g_i$ en el valor óptimo de f? A este tipo de investigación se le llama **análisis de sensibilidad** y es similar al que se lleva a cabo en la programación lineal (véase el capítulo 4). Sin embargo, el análisis de sensibilidad en la programación no lineal sólo es válido en la proximidad (o cercanía) inmediata del punto extremo. El desarrollo es útil en el estudio del método lagrangiano.

Ya demostramos antes que

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f\,\partial\mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}} f\,\partial\mathbf{Z}$$
$$\partial\mathbf{g} = \mathbf{J}\,\partial\mathbf{Y} + \mathbf{C}\,\partial\mathbf{Z}$$

Ya que $\partial\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\partial\mathbf{Y} = \mathbf{J}^{-1}\partial\mathbf{g} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\,\partial\mathbf{Z}$$

Al sustituir en la ecuación de $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, se obtiene

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f\mathbf{J}^{-1}\partial\mathbf{g} + \nabla_c f\,\partial\mathbf{Z}$$

en donde

$$\nabla_c f = \nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}$$

como se definió antes. La expresión para $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ se puede usar para estudiar la variación de f en la proximidad factible de un punto factible $\mathbf{X}^0$ obtenido al hacer cambios pequeños $\partial\mathbf{g}$ y $\partial\mathbf{Z}$.

En el punto extremo (en realidad, en cualquier punto estacionario) $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$ se debe anular el gradiente restringido $\nabla_c f$. Entonces,

$$\partial f(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f\mathbf{J}^{-1}\partial\mathbf{g}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$$

o sea

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{g}} = \nabla_{Y_0} f\mathbf{J}^{-1}$$

Se puede estudiar el efecto que tiene el cambio pequeño $\partial\mathbf{g}$ sobre el valor *óptimo* de f, evaluando la tasa de cambio de f con respecto a $\mathbf{g}$. A esas tasas se les suele llamar **coeficientes de sensibilidad**.

Ejemplo 20.2-3

Examinar el mismo problema del ejemplo 20.2-2. El punto óptimo es $\mathbf{X}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) =$ 0.81, 0.35, 0.28). Si $\mathbf{Y}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, entonces

$$\nabla_{\mathbf{Y}_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2x_1^0,\ 2x_2^0) = (1.62,\ 0.70)$$

En consecuencia,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g_1}, \frac{\partial f}{\partial g_2}\right) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f\mathbf{J}^{-1} = (1.62,\ .7)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0.0876,\ 0.3067)$$

Esto quiere decir que para $\partial g_2 = 1$, f aumentará 0.0867 *aproximadamente*. De igual manera, para $\partial g_1 = 1$, f aumentará 0.3067 *aproximadamente.*

Aplicación del método jacobiano a un problema de programación lineal. Se tiene el problema de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para tener en cuenta las restricciones de no negatividad $x_j \geq 0$, se hace la sustitución $x_j = w_j^2$. Con esta sustitución, las condiciones de no negatividad se vuelven implícitas, y el problema original se transforma en

$$\text{Maximizar } z = 2w_1^2 + 3w_2^2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= 5 \\ w_1^2 - w_2^2 + w_4^2 &= 3 \end{aligned}$$

Para aplicar el método jacobiano, sean

$$\mathbf{Y} = (w_1,\ w_2), \mathbf{Z} = (w_3,\ w_4)$$

(En la terminología de programación lineal, $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$ corresponden a variables básicas y no básicas, respectivamente.) Así

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2w_1 & 2w_2 \\ 2w_1 & -2w_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4w_1} & \frac{1}{4w_1} \\ \frac{1}{4w_2} & \frac{-1}{4w_2} \end{pmatrix},\ w_1 \text{ y } w_2 \neq 0$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2w_3 & 0 \\ 0 & 2w_4 \end{pmatrix},\ \nabla_Y f = (4w_1,\ 6w_2),\ \nabla_Z f = (0,\ 0)$$

de modo que

$$\nabla_c f = (0,\ 0) - (4w_1,\ 6w_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{4w_1} & \frac{1}{4w_1} \\ \frac{1}{4w_2} & \frac{-1}{4w_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2w_3 & 0 \\ 0 & 2w_4 \end{pmatrix} = (-5w_3,\ w_4)$$

La solución del conjunto de ecuaciones formado por $\nabla_c f = \mathbf{0}$ y las restricciones del problema es el punto estacionario ($w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 0$, $w_4 = 4$). La matriz hessiana es

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c w_3^2} & \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c w_3\, \partial_c w_4} \\ \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c w_3\, \partial_c w_4} & \frac{\partial_c^2 f}{\partial_c w_4^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{H_c}$ es indefinida, el punto estacionario no determina un máximo.

La razón por la que la solución anterior no determina un máximo es que las elecciones específicas de **Y** y **Z** no son óptimas. De hecho, para determinar el óptimo se debe seguir alterando las elecciones de **Y** y **Z** hasta que se satisfaga la condición de suficiencia. Esto equivaldrá a ubicar el punto extremo óptimo del espacio de soluciones de programación lineal. Por ejemplo, si $\mathbf{Y} = (w_2, w_4)$ y $\mathbf{Z} = (w_1, w_3)$, el vector gradiente restringido correspondiente es

$$\nabla_c f = (4w_1,\ 0) - (6w_2,\ 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2w_2} & 0 \\ \frac{1}{2w_4} & \frac{1}{2w_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2w_1 & 2w_3 \\ 2w_1 & 0 \end{pmatrix} = (-2w_1,\ 6w_3)$$

El punto estacionario correspondiente corresponde a $w_1 = 0,\ w_2 = \sqrt{5},\ w_3 = 0,\ w_4 = \sqrt{8}$. Ya que

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

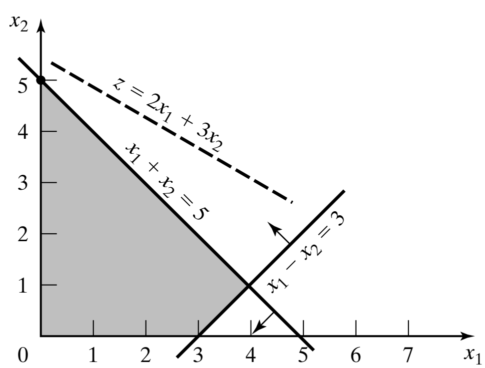
es negativa definida, la solución es un punto máximo.

Este resultado se comprueba en forma gráfica en la figura 20.6. La primera solución ($x_1 = 4$, $x_2 = 1$) no es óptima, y la segunda ($x_1 = 0$, $x_2 = 5$) sí lo es. Se puede comprobar que los dos puntos extremos restantes del espacio de soluciones no son óptimos. De hecho, con la condición de suficiencia se puede demostrar que el punto extremo ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) es un punto mínimo.

Cuando los coeficientes de sensibilidad $\nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1}$ se aplican a la programación lineal, producen los valores duales. Para ilustrar este punto con el ejemplo numérico que nos ocupa, sean

FIGURA 20.6

Puntos extremos del espacio de soluciones del programa lineal



u_1 y u_2 las variables duales correspondientes. En el punto óptimo $(w_1 = 0,\ w_2 = \sqrt{5},\ w_3 = 0,\ w_4 = \sqrt{8})$, estas variables cuales son

$$(u_1,\ u_2) = \nabla_{\mathbf{Y}_0}\mathbf{J}^{-1} = (6w_2,\ 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2w_2} & 0 \\ \frac{1}{2w_4} & \frac{1}{2w_4} \end{pmatrix} = (3,\ 0)$$

El valor objetivo dual correspondiente es $5u_1 + 3u_2 = 15$, que es igual al valor objetivo primal óptimo. También, esta solución satisface las restricciones duales, y en consecuencia es óptima y factible. Esto demuestra que los coeficientes de sensibilidad realmente son las variables duales del programa lineal. De hecho, ambos tienen la misma interpretación.

Se pueden sacar algunas conclusiones generales de la aplicación del método jacobiano al problema de programación lineal. De acuerdo con el ejemplo numérico, las condiciones necesarias requieren que las variables independientes sean igual a cero. También, las condiciones de suficiencia indican que la hessiana es una matriz diagonal. Entonces, todos sus elementos diagonales deben ser positivos para que haya mínimo, y negativos para que haya máximo. Las observaciones demuestran que la condición necesaria equivale a especificar que sólo se necesitan las soluciones básicas (factibles) para ubicar la solución óptima. En este caso, las variables independientes equivalen a las variables no básicas del problema de programación lineal. También, la condición de suficiencia demuestra la fuerte relación entre los elementos diagonales de la matriz hessiana y el indicador de optimalidad $z_j - c_j$ (véase la sección 7.2) en el método símplex.[1]

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2B

1. Suponga que se resuelve el ejemplo 20.2-2 del siguiente modo: primero, se resuelven las restricciones, expresando a x_1 y x_2 en función de x_3; después, se usan las ecuaciones obtenidas para expresar la función objetivo sólo en función de x_3. Sacando la derivada de la nueva función objetivo con respecto a x_3 se pueden determinar los puntos de máximos y mínimos.

   a) ¿Sería distinta la derivada de la nueva función objetivo (expresada en función de x_3) de la que se obtuvo con el método jacobiano?

   b) ¿En qué difiere el procedimiento sugerido del método jacobiano?

2. Aplique el método jacobiano al ejemplo 20.2-1 seleccionando $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = (x_1)$.

3. Resuelva lo siguiente con el método jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

sujeta a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = C$$

donde C es una constante positiva. Suponga que el lado derecho de la restricción cambia a $C + \delta$, donde δ es una cantidad positiva pequeña. Determine el cambio correspondiente en el valor óptimo de f.

---

[1]Véase la demostración formal de la validez de estos resultados, para el problema general de programación lineal, en H. Taha y G. Curry, "Classical Derivation of the Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Linear Programs", *Operations Research*, vol. 19, 1971, págs. 1045-1049. En esta publicación se demuestra que las ideas clave del método símplex se pueden deducir con el método jacobiano.

4. Resuelva, con el método jacobiano, lo siguiente:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

sujeta a

$$g(\mathbf{X}) = x_1x_2 - 10 = 0$$

a) Determine el cambio en el valor óptimo de $f(\mathbf{X})$ si se sustituye la restricción con $x_1x_2 - 9.99 = 0$.

b) Calcule el cambio de valor de $f(\mathbf{X})$ en la proximidad del punto factible (2, 5) si $x_1x_2 = 9.99$ y $\partial x_1 = 0.01$.

5. Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 5x_1x_2$$

sujeta a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2^2 + 3x_2x_3 - 5 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_3^2 - 7 = 0$$

Aplique el método jacobiano para determinar $\partial f(\mathbf{X})$ en la proximidad factible del punto factible (1, 1, 1). Suponga que esta proximidad factible se especifica con $\partial g_1 = -0.01$, $\partial g_2 = 0.02$ y $\partial x_1 = 0.01$.

6. El problema es

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

sujeta a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

a) Demuestre que al seleccionar a x_3 y x_4 como variables independientes, el método jacobiano no puede dar una solución y explique la razón.

b) Ahora resuelva el problema usando a x_1 y x_3 como variables independientes y aplique la condición de suficiencia para determinar el tipo de punto estacionario que resulta.

c) Determine los coeficientes de sensibilidad para la solución en b).

7. Se tiene el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a

$$g_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

No tenga en cuenta la restricción de no negatividad y demuestre que las derivadas restringidas $\nabla_c f(\mathbf{X})$ para este problema dan como resultado la misma ecuación de $\{z_j - c_j\}$ definida por la condición de optimalidad del problema de programación lineal (Sección 7.2); esto es,

$$\{z_j - c_j\} = \{\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\}, \text{ para toda } j$$

¿Se puede aplicar el método de la derivada restringida en forma directa al problema de programación lineal? ¿Por qué sí o por qué no?

Método lagrangiano. En el método de Jacobi, sea que el vector $\boldsymbol{\lambda}$ represente los coeficientes de sensibilidad; esto es

$$\boldsymbol{\lambda} = \nabla_{\mathbf{Y}_0}\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

Entonces,

$$\partial f - \boldsymbol{\lambda}\ \partial \mathbf{g} = 0$$

Esta ecuación satisface las condiciones necesarias para puntos estacionarios, porque $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$ se calcula de tal modo que $\nabla_c f = \mathbf{0}$. Una forma más cómoda de presentar estas ecuaciones es sacar sus derivadas parciales con respecto a todas las x_j. Con eso se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Las ecuaciones obtenidas, junto con las ecuaciones de restricción $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, dan como resultado los valores factibles de $\mathbf{X}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfacen las condiciones *necesarias* para puntos estacionarios.

Este procedimiento define al *método lagrangiano*, o *de Lagrange*, para identificar los puntos estacionarios de problemas de optimización con restricciones de *igualdad*. El procedimiento se puede desarrollar formalmente como sigue. Sea

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{X})$$

A la función L se le llama **función de Lagrange**, y a los parámetros $\boldsymbol{\lambda}$ se les llama **multiplicadores de Lagrange**. Por definición, esos multiplicadores tienen la misma interpretación que los coeficientes de sensibilidad del método jacobiano.

Las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0}$$

expresan las condiciones necesarias para determinar los puntos estacionarios de $f(\mathbf{X})$ sujetos a $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Las condiciones de suficiencia para el método de Lagrange se enunciarán sin demostración. Se define

$$\mathbf{H}^B = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \hline \mathbf{P}^T & \mathbf{Q} \end{array}\right)_{(m+n)\times(m+n)}$$

en donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \nabla g_m(\mathbf{X}) \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad \mathbf{Q} = \left\| \frac{\partial^2 L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{n\times n}, \ \text{para toda } i \text{ y } j$$

La matriz $\mathbf{H}^B$ es la **matriz hessiana de frontera** o **acotada**.

Dado el punto estacionario $(\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ de la función lagrangiana $L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$ y la matriz hessiana de frontera $\mathbf{H}^B$ evaluada en $(\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$, entonces $\mathbf{X}_0$ es

1. Un punto máximo si, comenzando con el determinante principal mayor de orden $(2m + 1)$, los *últimos* $(n - m)$ determinantes menores de $\mathbf{H}^B$ forman una pauta de signos alternativos con $(-1)^{m+1}$.
2. Un punto mínimo si, comenzando con el determinante menor principal de orden $(2m + 1)$, los *últimos* $(n - m)$ determinantes menores principales de $\mathbf{H}^B$ tienen el signo $(-1)^m$.

Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias, para identificar un punto extremo. Esto quiere decir que un punto estacionario puede ser un punto extremo sin satisfacer esas condiciones.

Existen otras condiciones que son necesarias y suficientes al mismo tiempo, para identificar puntos extremos. Sin embargo, el procedimiento puede ser computacionalmente inmanejable. Se define la siguiente matriz en el punto estacionario $(\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$:

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \hline \mathbf{P}^T & \mathbf{Q} - \mu\mathbf{I} \end{array}\right)$$

donde μ es un parámetro desconocido. Se considera el determinante $|\boldsymbol{\Delta}|$; entonces, cada una de las $(n - m)$ raíces reales μ del polinomio

$$|\Delta| = 0$$

debe ser

1. Negativa si $\mathbf{X}_0$ es un punto máximo.
2. Positiva si $\mathbf{X}_0$ es un punto mínimo.

Ejemplo 20.2-4

Para el problema del ejemplo 20.2-2, la función de Lagrange es

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

Esto produce las siguientes condiciones necesarias:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

La solución de esas ecuaciones simultáneas es

$$\mathbf{X}_0 = (x_1, x_2, x_3) = (0.8043, 0.3478, 0.2826)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (0.0870, 0.3043)$$

En esta solución se combinan los resultados de los ejemplos 20.2-2 y 20.2-3. Los valores de los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ son iguales a los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el ejemplo 20.2-3 (salvo errores de redondeo). El resultado demuestra que esos coeficientes son independientes de la elección de $\mathbf{Y}$, el vector dependiente en el método jacobiano.

Para demostrar que este punto es un mínimo, considérese

$$\mathbf{H}^B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Como $n = 3$ y $m = 2$, $n - m = 1$ y se debe comprobar sólo el determinante de $\mathbf{H}^B$, que debe tener el signo de $(-1)^2$ para que el punto estacionario $\mathbf{X}_0$ sea un mínimo. Como $\mathbf{H}^B = 460 > 0$, $\mathbf{X}^0$ es un punto mínimo.

Ejemplo 20.2-5

Se tiene el problema

$$\text{Minimizar } z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeta a

$$4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0$$

La función de Lagrange es

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14)$$

Las condiciones necesarias correspondientes son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14) = 0$$

Estas ecuaciones tienen una infinidad de soluciones porque $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ es independiente de x_2. A manera de ejemplo se examinarán las tres soluciones siguientes:

$$(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_1 = (2, 2, 1, 1)$$

$$(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_2 = (2, -2, 1, 1)$$

$$(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_3 = (2.8, 0, 1.4, 1.4)$$

Con las condiciones de suficiencia se obtiene

$$\mathbf{H}^B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2 - 2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $m = 1$ y $n = 3$, para que un punto estacionario sea mínimo, el signo de los últimos $(3-1) = 2$ determinantes menores principales debe ser igual al de $(-1)^m = -1$. Entonces, para $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_1 = (2, 2, 1, 1)$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0, \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0$$

Para $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_2 = (2, -2, 1, 1)$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0, \begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64 < 0$$

Por último, para $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_3 = (2.8, 0, 1.4, 1.4)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{vmatrix} = 12.8 > 0, \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Esto demuestra que $(\mathbf{X}_0)_1$ y $(\mathbf{X}_0)_2$ son puntos mínimos y que $(\mathbf{X}_0)_3$ no satisface las condiciones de suficiencia para ser máximo o mínimo. Esto no quiere decir que no sea un punto extremo, porque estas condiciones sólo son suficientes.

Para ilustrar el uso de la otra condición de suficiencia que emplea las raíces de un polinomio, se tiene

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ 4 & 2-\mu & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda-\mu & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-\mu \end{pmatrix}$$

Ahora, para $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_1 = (2, 2, 1, 1)$,

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0$$

Esto resulta en $\mu = 2$ o $\frac{8}{9}$. Como toda $\mu > 0$, $(\mathbf{X}_0)_1 = (2, 2, 1)$ es un punto mínimo. Para $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_2 = (2, -2, 1, 1)$,

$$|\Delta| = 9\mu^2 - 26\mu + 16 = 0$$

igual que en el caso anterior. Por consiguiente, $(\mathbf{X}_0)_2 = (2, -2, 1)$ es un punto mínimo. Por último, para $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)_3 = (2.8, 0, 1.4, 1.4)$,

$$|\Delta| = 5\mu^2 - 6\mu - 8 = 0$$

En este caso, $\mu = 2$ y -0.8, que quiere decir que no se conoce la identidad de $(\mathbf{X}_0)_3 = (2.8, 0, 1.4)$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2C

1. Resuelva el siguiente problema de programación lineal con los métodos jacobiano y de Lagrange:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = 3x_1 + x_2 + x_4 - 9 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. Determine la solución óptima del problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2$$

sujeta a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0$$

Suponga que $g_1(\mathbf{X}) = 0.01$ y $g_2(\mathbf{X}) = 0.02$. Determine el cambio correspondiente en el valor óptimo de $f(\mathbf{X})$.

3. Resuelva el problema 6, conjunto de problemas 20.2b, con el método de Lagrange y compruebe que los valores de los multiplicadores de Lagrange sean iguales a los coeficientes de sensibilidad obtenidos en ese problema.

20.2.2 Restricciones de desigualdad

En esta sección se amplía el método de Lagrange para manejar restricciones de desigualdad. La contribución principal en este caso es el desarrollo de las condiciones generales de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) que proporcionan la teoría básica de la programación no lineal.

Extensión del método de Lagrange. Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Las restricciones de no negatividad $\mathbf{X} \geq 0$, si las hay, se incluyen en las m restricciones.

Si el óptimo *no* restringido de $f(\mathbf{X})$ no satisface a todas las restricciones, el óptimo restringido debe ser un punto limiten la frontera del espacio de soluciones. Esto quiere decir que al menos una restricción se debe satisfacer en forma de ecuación. Por consiguiente, el método implica los siguientes pasos.

Paso 1. Resolver el problema sin restricciones:

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

Si el óptimo resultante satisface todas las restricciones, detenerse, porque todas las restricciones son redundantes. En caso contrario hacer $k = 1$ y seguir en el paso 2.

Paso 2. Activar todas las k restricciones (es decir, convertirlas en igualdades) y optimizar a $f(\mathbf{X})$ sujeta a las k restricciones activas, con el método de Lagrange. Si la solución obtenida es factible con respecto a las demás restricciones, detenerse; se tiene un

óptimo *local*.[2] En caso contrario, activar otro conjunto de k restricciones y repetir el paso. Si se han considerado *todos* los conjuntos de restricciones activas, tomadas de k en k, sin encontrar una solución factible, proceder al paso 3.

Paso 3. Si $k = m$, detenerse. No existe solución factible. En caso contrario, poner $k = k + 1$ y seguir en el paso 2.

Un punto importante que con frecuencia se pasa por alto al presentar el procedimiento es que *no* garantiza una optimalidad global, aun cuando el problema tenga buen comportamiento (es decir, que posea un óptimo *único*). Otro punto importante es la idea errónea implícita que para $p < q$, el óptimo de $f(\mathbf{X})$ sujeta a p restricciones de igualdad siempre es mejor que su óptimo sujeto a q restricciones de igualdad. Eso es cierto, en general, sólo si las q restricciones forman un subconjunto de las p restricciones. El ejemplo que sigue tiene por objeto ilustrar estos puntos.

Ejemplo 20.2-6

$$\text{Maximizar } z = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La representación gráfica de la figura 20.7 ayuda a comprender el procedimiento analítico. Observe que el problema tiene buen comportamiento (función objetiva cóncava sujeta a un espacio de soluciones convexo), y eso quiere decir que un algoritmo razonablemente bien definido debería garantizar la optimalidad global. Sin embargo, como se demostrará, el método ampliado de Lagrange sólo produce un máximo local.

El óptimo sin restricciones se obtiene resolviendo

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -4(2x_1 - 5) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -4(2x_2 - 1) = 0$$

La solución es $(x_1, x_2) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, que no satisface la restricción $x_1 + 2x_2 \leq 2$. Así, se activan las restricciones una por una. Se considerará $x_1 = 0$. La función lagrangiana es

$$L(x_1, x_2, \lambda) = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2 - \lambda x_1$$

Entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4(2x_1 - 5) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(2x_2 - 1) \qquad = 0$$

---

[2]Un óptimo *local* se define entre los óptimos que resultan de optimizar a $f(\mathbf{X})$ sujeta a *todas* las combinaciones de k restricciones de *igualdad*, $k = 1, 2, \ldots, m$.

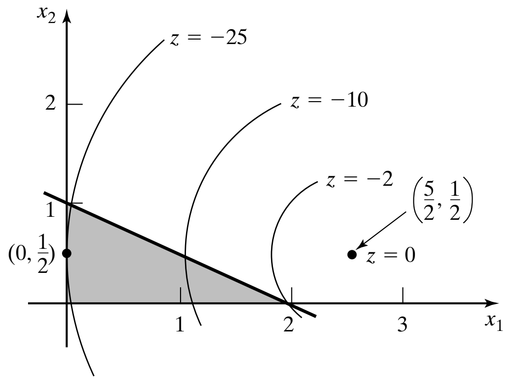


FIGURA 20.7

Espacio de soluciones en el ejemplo 20.2-6

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 = 0$$

Con esto se obtiene el punto de solución $(x_1, x_2) = (0, \frac{1}{2})$, que se puede demostrar, con la condición de suficiencia, que es un máximo. Como este punto satisface todas las demás restricciones, el procedimiento se termina con $(x_1, x_2) = (0, \frac{1}{2})$ como solución óptima local del problema. El valor objetivo es $z = -25$. (Las restricciones restantes $x_2 \geq 0$ y $x_1 = 2x_2 \leq 2$, activadas una por una, producen soluciones no factibles.

En la figura 20.7, la solución factible $(x_1, x_2) = (2, 0)$, que es el punto de intersección de las *dos* restricciones $x_2 = 0$ y $x_1 + 2x_2 = 2$ produce el valor objetivo $z = -2$. Este valor es mejor que el obtenido con una restricción activa.

El procedimiento que acabamos de describir ilustra que lo mejor que cabe esperar usando el método de Lagrange es una (posiblemente) buena solución factible. Esto es especialmente cierto si la función objetivo no es unimodal. Si las funciones del problema tienen buen comportamiento (es decir, el problema posee un solo óptimo restringido como en el ejemplo 20.2-6), se puede rectificar el procedimiento para localizar al óptimo global. En forma específica, considérense el óptimo no restringido y los óptimos restringidos sujetos a *todos* los conjuntos de una restricción activa, después a dos restricciones activas, y así sucesivamente, hasta que se activen todas las *m* restricciones. El mejor de *todos* los óptimos *factibles* es el óptimo global.

Si se sigue este procedimiento en el ejemplo 20.2-6, será necesario resolver siete problemas para verificar la optimalidad. Esto indica que el uso del método para resolver problemas de cualquier tamaño práctico es limitado.

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).[3] En esta sección se presentan las condiciones *necesarias* KKT para identificar puntos estacionarios de un problema no lineal restringido sujeto a restricciones de desigualdad. El desarrollo se basa en el método de Lagrange. Esas condiciones también son suficientes, bajo ciertas reglas que se enunciarán después.

---

[3]Históricamente, W. Karush fue el primero en desarrollar las condiciones KKT en 1939, como parte de su tesis de maestría en la Universidad de Chicago. Las mismas condiciones fueron desarrolladas en forma independiente por W. Kuhn y A. Tucker.

En el problema

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Las restricciones de desigualdad se pueden convertir en ecuaciones usando variables *no negativas* de holgura. Sea S_i^2 (no negativa) la holgura agregada a la *i*-ésima restricción $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$, y defínanse

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_m)^T, \ \mathbf{S}^2 = (S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2)^T$$

donde *m* es la cantidad total de restricciones de desigualdad. Entonces, la función de Lagrange es

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}[\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2]$$

Dadas las restricciones

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

una condición necesaria para la optimalidad es que λ sea no negativo (no positivo) en problemas de maximización (minimización). Este resultado se justifica como sigue. El vector $\boldsymbol{\lambda}$ mide la rapidez de variación de *f* con respecto a **g**; esto es,

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

En el caso de la maximización, cuando el lado derecho de la restricción $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$ cambia de $\mathbf{0}$ a $\partial\mathbf{g}$ ($> \mathbf{0}$), el espacio de soluciones se hace menos restringido y en consecuencia *f* no puede decrecer. Eso quiere decir que $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. De igual modo para la minimización, a medida que aumenta el lado derecho de las restricciones, *f* no puede aumentar, lo que implica que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Si las restricciones son igualdades, esto es, $g(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, entonces λ es libre en signo (véase el problema 2, conjunto de problemas 20.2d).

Las restricciones de $\boldsymbol{\lambda}$ son parte de las condiciones KKT necesarias. A continuación se deducirán las demás condiciones.

Al sacar derivadas parciales de *L* con respecto a **X**, **S** y $\boldsymbol{\lambda}$ se obtienen

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = \nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = -2\lambda_i S_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -(\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2) = \mathbf{0}$$

El segundo conjunto de ecuaciones indica los siguientes resultados:

1. Si $\lambda_i \neq 0$, entonces $S_i^2 = 0$, lo que significa que el recurso correspondiente es escaso y, en consecuencia, se consume por completo (restricción de igualdad).
2. Si $S_i^2 > 0$, entonces $\lambda_i = 0$. Esto quiere decir que el recurso *i* no es escaso y, en consecuencia, no tiene efecto sobre el valor de *f* (es decir, $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial g_i} = 0$).

Del segundo y tercer conjunto de ecuaciones se obtiene

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Esta nueva condición repite esencialmente el argumento anterior, porque si $\lambda_i > 0$, $g_i(\mathbf{X}) = 0$, o $S_i^2 = 0$, y si $g_i(\mathbf{X}) < 0$, $S_i^2 > 0$ y $\lambda_i = 0$.

Las condiciones KKT necesarias para el problema de maximización se pueden resumir entonces como sigue:

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$
$$\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$
$$\lambda_i g_i(\mathrm{X}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Estas condiciones se aplican también al caso de minimización, con la excepción de que $\boldsymbol{\lambda}$ debe ser no positiva (¡compruébelo!). Tanto en la maximización como en la minimización, los multiplicadores de Lagrange que corresponden a las restricciones de igualdad deben ser libres en signo.

Suficiencia de las condiciones KKT. Las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker también son suficientes, si la función objetivo y el espacio de soluciones satisfacen las condiciones de la tabla 20.1.

TABLA 20.1

Sentido de la optimización	Condiciones requeridas	
	Función objetivo	*Espacio de soluciones*
Maximización	Cóncava	Conjunto convexo
Minimización	Convexa	Conjunto convexo

Es más fácil comprobar que una función es convexa o cóncava que demostrar que un espacio de soluciones es un conjunto convexo. Por esta razón se presenta una lista de condiciones que son más fáciles de aplicar en la práctica, en el sentido que se puede establecer la convexidad del espacio de soluciones comprobando la convexidad o la concavidad de las funciones de restricción. Para suministrar estas condiciones se definirán los problemas no lineales generalizados como sigue:

$$\text{Maximizar o minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$
$$g_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad i = r + 1, \ldots, p$$
$$g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = p + 1, \ldots, m$$

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i[g_i(\mathbf{X}) + S_i^2] - \sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i[g_i(\mathbf{X}) - S_i^2] - \sum_{i=p+1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{X})$$

donde λ_i es el multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción i. Las condiciones para establecer la suficiencia de las condiciones KKT se resumen en la tabla 20.2.

TABLA 20.2

Sentido de la optimización	Condiciones requeridas			
	$f(\mathbf{X})$	$g_i(\mathbf{X})$	λ_i	
Maximización	Cóncava	Convexa	≥ 0	$(1 \leq i \leq r)$
		Cóncava	≤ 0	$(r + 1 \leq i \leq p)$
		Lineal	Sin restricción	$(p + 1 \leq i \leq m)$
Minimización	Convexa	Convexa	≤ 0	$(1 \leq i \leq r)$
		Cóncava	≥ 0	$(r + 1 \leq i \leq p)$
		Lineal	Sin restricción	$(p + 1 \leq i \leq m)$

Las condiciones de la tabla 20.2 sólo representan un subconjunto de las condiciones de la tabla 20.1. La razón es que un espacio de soluciones puede ser convexo y no satisfacer las condiciones de la tabla 20.2.

La tabla 20.2 es válida, porque las condiciones dadas producen una función lagrangiana cóncava $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ en el caso de maximización, y una $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ convexa en el caso de minimización. Este resultado se comprueba al notar que si $g_i(x)$ es convexa, entonces $\lambda_i g_i(x)$ es convexa si $\lambda_i \geq 0$, y es cóncava si $\lambda_i \leq 0$. Se pueden establecer interpretaciones parecidas para todas las condiciones restantes. Observe que una función lineal es convexa y cóncava al mismo tiempo. También, si una función f es cóncava, entonces $(-f)$ es convexa, y viceversa.

Ejemplo 20.2-7

Se tiene el siguiente problema de minimización:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{X}) &= 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\
g_2(\mathbf{X}) &= x_1 + x_3 - 2 \leq 0 \\
g_3(\mathbf{X}) &= 1 - x_1 \leq 0 \\
g_4(\mathbf{X}) &= 2 - x_2 \leq 0 \\
g_5(\mathbf{X}) &= -x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Se trata de un problema de minimización, y entonces $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Así, las condiciones KKT son

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \leq \mathbf{0}$$

$$(2x_1, 2x_2, 2x_3) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \cdots = \lambda_5 g_5 = 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Estas condiciones se reducen a

$$\begin{aligned}
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 &\le 0 \\
2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\
2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\
2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 &= 0 \\
\lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) &= 0 \\
\lambda_2(x_1 + x_3 - 2) &= 0 \\
\lambda_3(1 - x_1) &= 0 \\
\lambda_4(2 - x_2) &= 0 \\
\lambda_5 x_3 &= 0 \\
2x_1 + x_2 &\le 5 \\
x_1 + x_3 &\le 2 \\
x_1 \ge 1, x_2 \ge 2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

La solución es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -4$. Como son convexos tanto $f(\mathbf{X})$ como el espacio de soluciones $g(\mathbf{X}) \le 0$, $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ debe ser convexa, y el punto estacionario que resulte produce un mínimo global restringido. Este ejemplo demuestra que el procedimiento no es adecuado para cálculos numéricos, porque puede ser difícil resolver en forma explícita las condiciones resultantes. Las condiciones KKT son básicas en el desarrollo de los algoritmos de programación no lineal del capítulo 21.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2D

1. El problema es:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \ge 0$$

Demuestre que las condiciones KKT son iguales que en la sección 20.2.2, excepto que los multiplicadores de Lagrange λ son no positivos.

2. Para el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = 0$$

Demuestre que las condiciones KKT son

$$\begin{aligned}
\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{g}(\mathbf{X}) &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{\lambda} &\text{ libre en signo}
\end{aligned}$$

3. Escriba las condiciones KKT necesarias para los siguientes problemas.

a) Maximizar $f(\mathbf{X}) = x_1^3 - x_2^2 + x_1x_3^2$

sujeta a

$$x_1 + x_2^2 + x_3 = 5$$
$$5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) Minimizar $f(\mathbf{X}) = x_1^4 + x_2^2 + 5x_1x_2x_3$

sujeta a

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 \leq 10$$
$$x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20$$

4. Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

Si $f(\mathbf{X})$ es cóncava y $g_i(\mathbf{X})$ ($i = 1, 2, ..., m$) es una función lineal, demuestre que las condiciones necesarias KKT también son suficientes. ¿Es cierto este resultado si $g_i(\mathbf{X})$ es una función *no* lineal convexa para toda i? ¿Por qué?

5. Para el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$g_1(\mathbf{X}) \geq 0,\ g_2(\mathbf{X}) = 0,\ g_3(\mathbf{X}) \leq 0$$

desarrolle las condiciones KKT y describa las estipulaciones para las cuales las condiciones son suficientes.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., H. Shrali y C. Shetty, *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, 2a. ed., Wiley, New York, 1993.

Beightler, C., D. Phillips y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, NJ, 1979.

Rardin, R. *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, NJ, 1998.

CAPÍTULO 21

Algoritmos de programación no lineal

Los métodos de solución de la programación no lineal se pueden clasificar, de manera general, en algoritmos *directos* o *indirectos*. Como ejemplo de los métodos directos están los algoritmos de gradiente, donde se busca el máximo (el mínimo) de un problema siguiendo la mayor tasa de aumento (disminución) de la función objetivo. En los métodos indirectos, el problema original se sustituye por otro del cual se determina el óptimo. Como ejemplos de estos casos están la programación cuadrática, la programación separable y la programación estocástica.

21.1 ALGORITMOS SIN RESTRICCIÓN

En esta sección se presentarán dos algoritmos para el problema no restringido: el algoritmo de *búsqueda directa* y el algoritmo de *gradiente*.

21.1.1 Método de búsqueda directa

Los métodos de búsqueda directa se aplican principalmente a funciones estrictamente unimodales de una variable. Aunque puede parecer trivial el caso, la sección 21.1.2 muestra que la optimización de funciones de una variable juega un papel clave en el desarrollo de los algoritmos de varias variables, más generales.

La idea de los métodos de búsqueda directa es identificar el **intervalo de incertidumbre** que comprenda al punto de solución óptima. El procedimiento localiza el óptimo estrechando en forma progresiva el intervalo de incertidumbre hasta cualquier grado de exactitud que se desee.

En esta sección se presentan dos algoritmos estrechamente relacionados: los métodos de búsqueda dicótomo y de sección dorada (o áurea). Ambos buscan la maximización de una función unimodal $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, que se sabe que incluye el punto óptimo x^*. Los dos métodos comienzan con $I_0 = (a, b)$ que representa el intervalo inicial de incertidumbre.

Paso general i. Sea $I_{i-1} = (x_L, x_R)$ el intervalo actual de incertidumbre (en la iteración 0, $x_L = a$ y $x_R = b$). A continuación se definen x_1 y x_2 tales que

$$x_L < x_1 < x_2 < x_R$$

El siguiente intervalo de incertidumbre, I_i, se define como sigue:

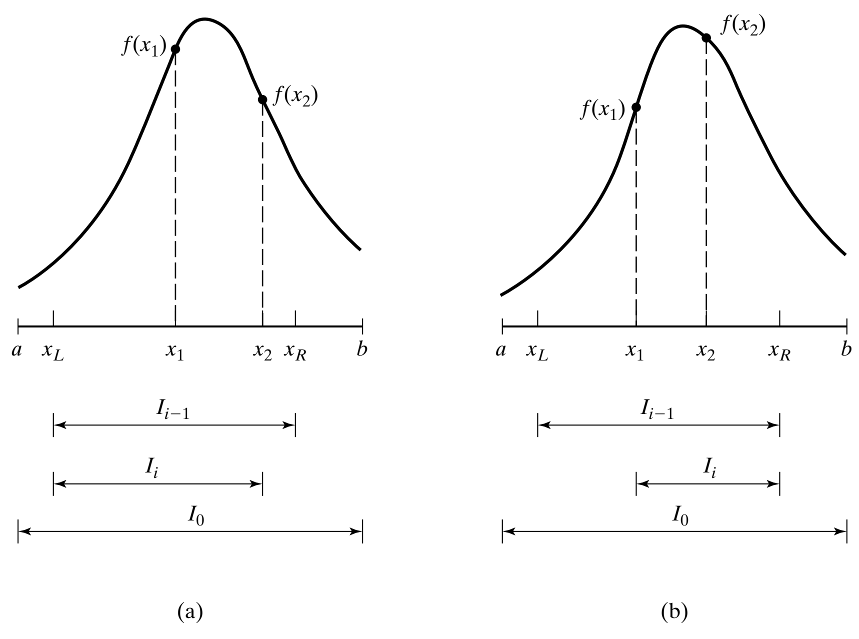
1. Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces $x_L < x^* < x_2$. Se definen $x_R = x_2$ e $I_i = (x_L, x_2)$ (véase la figura 21.2[a]).
2. Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_R$. Se definen $x_L = x_1$ e $I_i = (x_1, x_R)$ (véase la figura 21.1[b]).
3. Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_2$. Se definen $x_L = x_1$, $x_R = x_2$ e $I_i = (x_1, x_2)$.

La manera en que se determinan x_1 y x_2 garantiza que $I_i < I_{i-1}$, como se demostrará en breve. El algoritmo termina en la iteración k si $I_k \leq \Delta$, donde Δ es un grado de exactitud definido por el usuario.

La diferencia entre los métodos dicótomo y de sección dorada estriba en la forma en que se calculan x_1 y x_2. La tabla siguiente presenta las fórmulas.

Método dicótomo	Método de la sección dorada
$x_1 = \frac{1}{2}(x_R + x_L - \Delta)$	$x_1 = x_R - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})(x_R - x_L)$
$x_2 = \frac{1}{2}(x_R + x_L + \Delta)$	$x_2 = x_L + (\frac{\sqrt{5}-1}{2})(x_R - x_L)$

FIGURA 21.1
Ilustración del paso general de los métodos de búsqueda dicótomo y de la sección dorada



En el método dicótomo los valores x_1 y x_2 se encuentran simétricos respecto del punto medio del actual intervalo de incertidumbre. Esto significa que

$$I_i = 0.5(I_{i-1} + \Delta)$$

La aplicación repetida del algoritmo garantiza que la longitud del intervalo de incertidumbre se acercará al nivel de exactitud deseado, $\boldsymbol{\Delta}$.

En el método de la sección dorada la idea es de mayor involucramiento. Se puede apreciar que cada iteración del método dicótomo requiere calcular los dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, pero termina por descartar alguno de ellos. Lo que propone el método de la sección dorada es ahorrar cálculos mediante el reuso del valor descartado en la iteración inmediata siguiente.

Para definir $0 < \alpha < 1$,

$$x_1 = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$
$$x_2 = x_L + \alpha(x_R - x_L)$$

Cuando el intervalo de incertidumbre I_i en la iteración i es igual a (x_L, x_2) o a (x_1, x_R). Considere el caso en que $I_i = (x_L, x_2)$, lo cual significa que x_1 está incluido en I_i. En la iteración $i+1$, seleccione x_2 igual a x_1 de la iteración i, lo cual lleva a la siguiente ecuación:

$$x_2(\text{iteración } i+1) = x_1(\text{iteración } i)$$

Sustituyendo, se encuentra que:

$$x_L + \alpha[x_2(\text{iteración } i) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

o lo que es igual:

$$x_L + \alpha[x_L + \alpha(x_R - x_L) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

que finalmente se simplifica a:

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

La ecuación da $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como α es un valor entre 0 y 1, seleccionamos la raíz positiva $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.681$.

El diseño de los cálculos del método de la sección dorada, garantiza una reducción α en los intervalos de incertidumbre sucesivos; esto es:

$$I_{i+1} = \alpha I_i$$

Comparado con el método dicótomo, el método de la sección dorada converge más rápidamente hacia el nivel deseado de exactitud. Adicionalmente, cada iteración en el método de la sección dorada requiere la mitad de los cálculos, en virtud de que recicla siempre un conjunto de los cálculos correspondientes a la iteración inmediata anterior.

Ejemplo 21.1-1

$$\text{Maximizar } f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(-x + 20), & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

El máximo valor de $f(x)$ ocurre en $x = 2$. La siguiente tabla muestra los cálculos para las iteraciones 1 y 2, usando el método dicótomo y el de la sección dorada. Supondremos que $\Delta = 0.1$.

Método dicótomo	Método de la sección dorada
Iteración 1	*Iteración 1*
$I_0 = (0, 3) \equiv (x_L, x_R)$	$I_0 = (0, 3) \equiv (x_L, x_R)$
$x_1 = 0.5(3 + 0 - 0.1) = 1.45, f(x_1) = 4.35$	$x_1 = 3 - 0.618(3 - 0) = 1.146, f(x_1) = 3.438$
$x_2 = 0.5(3 + 0 + 0.1) = 1.55, f(x_2) = 4.65$	$x_2 = 0 + 0.618(3 - 0) = 1.854, f(x_2) = 5.562$
$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.45, I_1 = (1.45, 3)$	$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.146, I_1 = (1.146, 3)$
Iteración 2	*Iteración 2*
$I_1 = (1.45, 3) \equiv (x_L, x_R)$	$I_1 = (1.146, 3) \equiv (x_L, x_R)$
$x_1 = 0.5(3 + 1.45 - 0.1) = 2.175, f(x_1) = 5.942$	$x_1 = x_2$ en la iteración $0 = 1.854, f(x_1) = 5.562$
$x_2 = 0.5(3 + 1.45 + 0.1) = 2.275, f(x_2) = 5.908$	$x_2 = 1.146 + 0.618(3 - 1.146) = 2.292, f(x_2) = 5.903$
$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_R = 2.275, I_2 = (1.45, 2.275)$	$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.854, I_1 = (1.854, 3)$

Al continuar de la misma forma, el intervalo de incertidumbre terminará por estrecharse hasta la tolerancia Δ deseada.

La plantilla ch21DichotomousGoldenSection.xls de Excel está diseñada para manejar cualquiera de estos dos métodos en forma automática. Los datos son $f(x)$, a, b y Δ. La función $f(x)$ se captura en la celda E3 como sigue:

```
=IF(C3<=2,3*C3,(−C3+20)/3)
```

Obsérvese que C3 hace el papel de x en $f(x)$. Los límites a y b se escriben en las celdas B4 y D4, que representan el intervalo admisible de búsqueda de $f(x)$. También, el límite de tolerancia Δ se escribe en la celda B3. El método de búsqueda se selecciona ingresando **x** en D5 (dicótoma) o en F5 (sección dorada).

En la figura 21.2 se comparan los dos métodos. La sección dorada no sólo requiere 40% menos iteraciones, sino que también implica menos cálculos por iteración, como se explicó antes.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.1A

1. Use la plantilla ch21DichotomousGoldenSection.xls de Excel para resolver el ejemplo 21.1-1 suponiendo que $\Delta = 0.01$. Compare la cantidad de cálculos y la exactitud de los resultados con los de la figura 21.2.

2. Determine el máximo de las siguientes funciones por búsqueda dicótoma. Suponga que $\Delta = 0.05$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{|(x-3)^3|}, \quad 2 \leq x \leq 4$

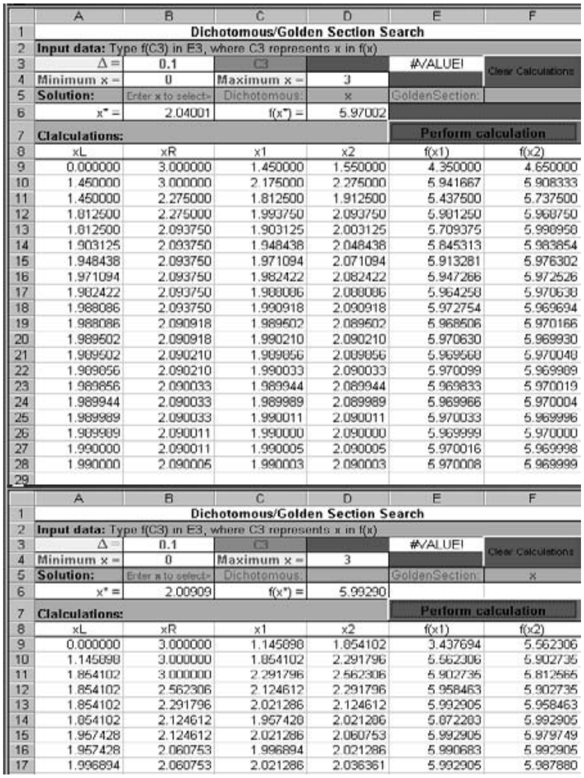
b) $f(x) = x\cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = x\,\text{sen}\,\pi x, \quad 1.5 \leq x \leq 2.5$

d) $f(x) = -(x-3)^2, \quad 2 \leq x \leq 4$

e) $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

3. Deduzca una ecuación para determinar la cantidad máxima de iteraciones necesarias para terminar el método de búsqueda dicótoma para determinado valor de Δ y un intervalo inicial de incertidumbre $I_0 = b - a$.



	A	B	C	D	E	F
1	Dichotomous/Golden Section Search					
2	**Input data:** Type f(C3) in E3, where C3 represents x in f(x)					
3	Δ =	0.1	C3		#VALUE!	Clear Calculations
4	Minimum x =	0	Maximum x =	3		
5	**Solution:**	Enter x to select>	Dichotomous:	x	GoldenSection:	
6	x* =	2.04001	f(x*) =	5.97002		
7	**Clalculations:**				Perform calculation	
8	xL	xR	x1	x2	f(x1)	f(x2)
9	0.000000	3.000000	1.450000	1.550000	4.350000	4.650000
10	1.450000	3.000000	2.175000	2.275000	5.941667	5.908333
11	1.450000	2.275000	1.812500	1.912500	5.437500	5.737500
12	1.812500	2.275000	1.993750	2.093750	5.981250	5.968750
13	1.812500	2.093750	1.903125	2.003125	5.709375	5.998958
14	1.903125	2.093750	1.948438	2.048438	5.845313	5.983854
15	1.948438	2.093750	1.971094	2.071094	5.913281	5.976302
16	1.971094	2.093750	1.982422	2.082422	5.947266	5.972526
17	1.982422	2.093750	1.988086	2.088086	5.964258	5.970638
18	1.988086	2.093750	1.990918	2.090918	5.972754	5.969694
19	1.988086	2.090918	1.989502	2.089502	5.968506	5.970166
20	1.989502	2.090918	1.990210	2.090210	5.970630	5.969930
21	1.989502	2.090210	1.989856	2.089856	5.969568	5.970048
22	1.989856	2.090210	1.990033	2.090033	5.970099	5.969989
23	1.989856	2.090033	1.989944	2.089944	5.969833	5.970019
24	1.989944	2.090033	1.989989	2.089989	5.969966	5.970004
25	1.989989	2.090033	1.990011	2.090011	5.970033	5.969996
26	1.989989	2.090011	1.990000	2.090000	5.969999	5.970000
27	1.990000	2.090011	1.990005	2.090005	5.970016	5.969998
28	1.990000	2.090005	1.990003	2.090003	5.970008	5.969999
29						

	A	B	C	D	E	F
1	Dichotomous/Golden Section Search					
2	**Input data:** Type f(C3) in E3, where C3 represents x in f(x)					
3	Δ =	0.1	C3		#VALUE!	Clear Calculations
4	Minimum x =	0	Maximum x =	3		
5	**Solution:**	Enter x to select>	Dichotomous:		GoldenSection:	x
6	x* =	2.00909	f(x*) =	5.99290		
7	**Clalculations:**				Perform calculation	
8	xL	xR	x1	x2	f(x1)	f(x2)
9	0.000000	3.000000	1.145898	1.854102	3.437694	5.562306
10	1.145898	3.000000	1.854102	2.291796	5.562306	5.902735
11	1.854102	3.000000	2.291796	2.562306	5.902735	5.812565
12	1.854102	2.562306	2.124612	2.291796	5.958463	5.902735
13	1.854102	2.291796	2.021286	2.124612	5.992905	5.958463
14	1.854102	2.124612	1.957428	2.021286	5.872283	5.992905
15	1.957428	2.124612	2.021286	2.060753	5.992905	5.979749
16	1.957428	2.060753	1.996894	2.021286	5.990683	5.992905
17	1.996894	2.060753	2.021286	2.036361	5.992905	5.987880

FIGURA 21.2

Resultados del ejemplo 21.1-1 obtenidos con los métodos dicótomo y de la sección dorada, en Excel

21.1.2 Método del gradiente

En esta sección se presenta un método para optimizar funciones que son doble continuamente diferenciables. La idea es generar puntos sucesivos en la dirección del gradiente de la función.

El método de Newton-Raphson presentado en la sección 20.1.2 es un método de gradiente para resolver ecuaciones simultáneas. En esta sección se presenta otra técnica, llamada método de **ascenso** (o **descenso**) **más pronunciado** o de la **pendiente más inclinada**.

El final del método del gradiente se encuentra en el punto donde el vector gradiente se anula. Esta sólo es una condición necesaria para la optimalidad. La optimalidad no se puede comprobar a menos que a priori se conozca que $f(\mathbf{X})$ es cóncava o convexa.

Supongamos que se busca el máximo de $f(\mathbf{X})$. Sea $\mathbf{X}^0$ el punto inicial donde se inicia el procedimiento, y se define a $\nabla f(\mathbf{X}^k)$ como el gradiente de f en el punto $\mathbf{X}^k$. Se trata de determinar una trayectoria particular p a lo largo de la cual $\frac{\partial f}{\partial p}$ se maximice en un punto dado. Esto se logra si se seleccionan los puntos sucesivos $\mathbf{X}^k$ y $\mathbf{X}^{k+1}$ de tal modo que

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + r^k \nabla f(\mathbf{X}^k)$$

donde r^k es el **tamaño de paso** óptimo en $\mathbf{X}^k$.

El tamaño de paso r^k se determina de tal modo que el siguiente punto, $\mathbf{X}^{k+1}$, conduzca al mayor mejoramiento de f. Esto equivale a determinar $r = r^k$ que maximice la función

$$h(r) = f[\mathbf{X}^k + r\nabla f(\mathbf{X}^k)]$$

Como $h(r)$ es función de una variable, con el método de búsqueda de la sección 21.1.1 se puede determinar el punto óptimo, siempre que $h(r)$ sea estrictamente unimodal.

El procedimiento propuesto termina cuando dos puntos sucesivos de prueba, $\mathbf{X}^k$ y $\mathbf{X}^{k+1}$, son aproximadamente iguales. Esto equivale a que

$$r^k\nabla f(\mathbf{X}^k) \approx \mathbf{0}$$

Ya que $r^k \neq 0$, la condición necesaria $\nabla f(\mathbf{X}^k) = \mathbf{0}$ se satisface en $\mathbf{X}^k$.

Ejemplo 21.1-2

Se tiene el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

El óptimo exacto está en $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

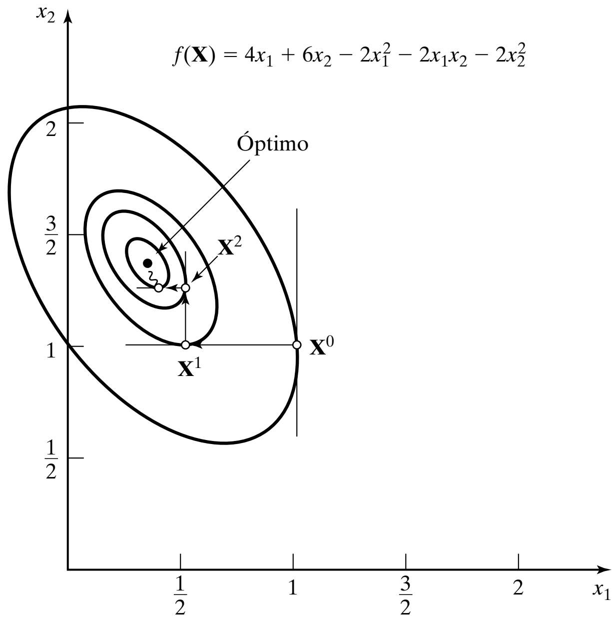
Para resolver el problema con el método de la pendiente más inclinada, se determina el gradiente:

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

La naturaleza cuadrática de la función hace que los gradientes en dos puntos sucesivos cualesquiera sean ortogonales (perpendiculares entre sí). Si el punto inicial es $\mathbf{X}^0 = (1, 1)$, la figura 21.3 muestra los puntos solución sucesivos.

FIGURA 21.3

Maximización de $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ con el método de la pendiente más pronunciada



Iteración 1.

$$\nabla f(\mathbf{X}^0) = (-2, 0)$$

El siguiente punto $\mathbf{X}^1$ se obtiene con la ecuación

$$\mathbf{X} = (1, 1) + r(-2, 0) = (1 - 2r, 1)$$

Así,

$$h(r) = f(1 - 2r, 1) = -2(1 - 2r)^2 + 2(1 - 2r) + 4$$

El tamaño óptimo del paso se obtiene usando las condiciones necesarias clásicas del capítulo 20 (también se podrían usar los algoritmos de búsqueda de la sección 21.1.1 para determinar el óptimo). El valor máximo de $h(r)$ es $r^1 = \frac{1}{4}$, que da como resultado el siguiente punto de solución, $\mathbf{X}^1 = (\frac{1}{2}, 1)$.

Iteración 2.

$$\nabla f(\mathbf{X}^1) = (0, 1)$$
$$\mathbf{X} = (\tfrac{1}{2}, 1) + r(0, 1) = (\tfrac{1}{2}, 1 + r)$$
$$h(r) = -2(1 + r)^2 + 5(1 + r) + \tfrac{3}{2}$$

Se obtiene así $r^2 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}^2 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

Iteración 3.

$$\nabla f(\mathbf{X}^2) = (-\tfrac{1}{2}, 0)$$
$$\mathbf{X} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}) + r(-\tfrac{1}{2}, 0) = (\tfrac{1 - r}{2}, \tfrac{5}{4})$$
$$h(r) = -\tfrac{1}{2}(1 - r)^2 + \tfrac{3}{4}(1 - r) + \tfrac{35}{8}$$

Por consiguiente, $r^3 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}^3 = (\frac{3}{8}, \frac{5}{4})$.

Iteración 4.

$$\nabla f(\mathbf{X}^3) = (0, \tfrac{1}{4})$$
$$\mathbf{X} = (\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{4}) + r(0, \tfrac{1}{4}) = (\tfrac{3}{8}, \tfrac{5 + r}{4})$$
$$h(r) = -\tfrac{1}{8}(5 + r)^2 + \tfrac{21}{16}(5 + r) + \tfrac{39}{32}$$

Por consiguiente, $r^4 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}^4 = (\frac{3}{8}, \frac{21}{16})$.

Iteración 5.

$$\nabla f(\mathbf{X}^4) = (-\tfrac{1}{8}, 0)$$
$$\mathbf{X} = (\tfrac{3}{8}, \tfrac{21}{16}) + r(-\tfrac{1}{8}, 0) = (\tfrac{3 - r}{8}, \tfrac{21}{16})$$
$$h(r) = -\tfrac{1}{32}(3 - r)^2 + \tfrac{11}{64}(3 - r) + \tfrac{567}{128}$$

Por consiguiente, $r^5 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}^5 = (\frac{11}{32}, \frac{21}{16})$.

Iteración 6.

$$\nabla f(\mathbf{X}^5) = (0, \tfrac{1}{16})$$

Como $\nabla f(\mathbf{X}^5) \approx \mathbf{0}$, se puede terminar el proceso en este punto. El punto máximo aproximado es $\mathbf{X}^5 = (0.3438, 1.3125)$. El óptimo exacto es $\mathbf{X}^* = (0.3333, 1.3333)$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.1B

1. Demuestre que, en general, el método de Newton-Raphson (Sección 20.1.2), al aplicarse a una función cuadrática estrictamente cóncava converge exactamente en un paso. Aplique el método para maximizar

$$f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

2. Haga cuando mucho cinco iteraciones para cada uno de los siguientes problemas, usando el método de pendiente más inclinada. Suponga que en cada caso $\mathbf{X}^0 = 0$.

a) Minimizar $f(\mathbf{X}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)$

b) Maximizar $f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} + \mathbf{X}^T\mathbf{AX}$
en donde

$$\mathbf{c} = (1, 3, 5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Maximizar $f(\mathbf{X}) = x_1 - x_2 + x_1{}^2 - x_1x_2$

21.2 ALGORITMOS CON RESTRICCIÓN

El problema general de programación no lineal con restricciones se define como sigue:

$$\text{Maximizar (o minimizar) } z = f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Las condiciones $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ de no negatividad forman parte de las restricciones. También, al menos una de las funciones $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ es no lineal, y todas las funciones son continuamente diferenciables.

No existe algoritmo general para manejar modelos no lineales, por el comportamiento errático de las funciones no lineales. Quizá el resultado más general aplicable al problema es el de las condiciones KKT (Sección 20.2.2). La tabla 20.2 muestra que a menos que $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ tengan buen comportamiento (condiciones de convexidad y concavidad), las condiciones KKT sólo son necesarias para alcanzar la optimalidad.

En esta sección se presentan varios algoritmos que se pueden clasificar en general como métodos *indirectos* y *directos*. Con los métodos indirectos se resuelve el problema no lineal manejando uno o más programas *lineales* derivados del programa original. Los métodos directos manejan el problema en su forma original.

Los métodos indirectos que se presentan en esta sección incluyen la programación separable, cuadrática, geométrica y estocástica. Entre los métodos directos está el de combinaciones lineales, y presentaremos una breve descripción de la técnica de maximización secuencial sin restricciones. Se pueden encontrar otras técnicas no lineales importantes en las referencias seleccionadas al final del capítulo.

21.2.1 Programación separable

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es **separable** si se puede expresar como la suma de n funciones de una variable, $f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n)$, esto es

$$f(x_1, x_1 \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$$

Por ejemplo, la función lineal

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

es separable (los parámetros a_i, $i = 1, 2, ..., n$, son constantes). Al revés, la función

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 \operatorname{sen}(x_2 + x_3) + x_2e^{x3}$$

no es separable.

Algunas funciones no lineales no son directamente separables, pero se pueden transformar con las sustituciones adecuadas. Por ejemplo, el caso de maximizar $z = x_1x_2$. Si $y = x_1x_2$, entonces $\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$, y el problema se transforma en

$$\text{Maximizar } z = y$$

sujeta a

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$$

que ya es separable. En la sustitución se supone que x_1 y x_2 son variables *positivas*; en caso contrario, la función logarítmica no está definida.

El caso en el que x_1 y x_2 asumen valor cero (es decir, $x_1, x_2 \geq 0$) se puede manejar en la siguiente forma. Sean δ_1 y δ_2 constantes positivas, y se definen

$$w_1 = x_1 + \delta_1$$
$$w_2 = x_2 + \delta_2$$

Las nuevas variables w_1 y w_2 son estrictamente positivas. Ahora

$$x_1x_2 = w_1w_2 - \delta_2w_1 - \delta_1w_2 + \delta_1\delta_2$$

Si $y = w_1w_2$, el problema se plantea como sigue:

$$\text{Maximizar } z = y - \delta_2w_1 - \delta_1w_2 + \delta_1\delta_2$$

sujeta a

$$\ln y = \ln w_1 + \ln w_2$$
$$y \geq 0, w_1 \geq \delta_1, w_2 \geq \delta_2$$

Este nuevo problema es separable.

Entre los ejemplos de otras funciones que se pueden hacer separables mediante sustituciones están $e^{x_1+x_2}$ y $x_1^{x_2}$. Se puede aplicar una variante del procedimiento que acabamos de presentar en esos casos, para llegar a la separabilidad.

La programación separable maneja problemas no lineales en los que la función objetivo y las restricciones son separables. Esta sección indica cómo se puede obtener una solución de

cualquier problema separable, mediante aproximación lineal y el método símplex de la programación lineal.

La función $f(x)$ de una sola variable se puede aproximar mediante una función lineal en intervalos, con programación entera mixta (Capítulo 9). Supongamos que se debe aproximar $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Se define a_k, $k = 1, 2, ..., K$ como el k-ésimo punto de quiebre (o de discontinuidad) en el eje x tal que $a_1 < a_2 < \cdots < a_K$. Los puntos a_1 y a_K coinciden con los extremos a y b del intervalo que se investiga. Así, $f(x)$ se aproxima como sigue:

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{K} f(a_k)t_k$$

$$x = \sum_{k=1}^{K} a_k t_k$$

donde t_k es un peso o factor de ponderación no negativo correspondiente al k-ésimo punto de quiebre, de tal modo que

$$\sum_{k=1}^{K} t_k = 1$$

Con la programación entera mixta se asegura la validez de la aproximación. En forma específica, la aproximación lineal en intervalos es válida si

1. Cuando mucho dos t_k son positivas.
2. Si t_k es positiva, entonces sólo una t_{k+1} o t_{k-1} puede tener valor positivo.

Para demostrar cómo se satisfacen estas condiciones, veamos el problema separable

$$\text{Maximizar (o minimizar) } z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{n} g_i^j(x_i) \leq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

Este problema se puede aproximar con un programa entero mixto como sigue. Sea K_i la cantidad de puntos de quiebre para la i-ésima variable x_i, y sea a_i^k su k-ésimo valor de quiebre. Sea t_i^k el peso asociado al k-ésimo punto de quiebre de la variable i.[1] Entonces, el problema mezclado equivalente es

$$\text{Maximizar (o minimizar) } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_i} f_i(a_i^k)t_i^k$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_i} g_i^j(a_i^k)t_i^k \leq b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$0 \leq t_i^1 \leq y_i^1,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

[1]Sería más exacto sustituir el índice k con k_i para tener una correspondencia única con la variable i. Sin embargo, no lo haremos para simplificar la notación.

$$0 \le t_i^k \le y_i^{k-1} + y_i^k, \quad k = 2, 3, \ldots, K_i - 1$$

$$0 \le t_i^{K_i} \le y_i^{K_i - 1}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^{K_i - 1} y_i^k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{K_i} t_i^k = 1$$

$$y_i^k = (0, 1), \; k = 1, 2, \ldots, K_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Las variables del problema de aproximación son t_i^k y y_i^k.

La formulación muestra cómo se puede resolver cualquier problema separable, al menos en principio, con programación entera mixta. La dificultad es que la cantidad de restricciones aumenta con mucha rapidez al aumentar la cantidad de puntos de quiebre. En particular, es dudosa la factibilidad computacional del procedimiento, porque no hay programas de cómputo fiables para resolver problemas grandes de programación entera mixta.

Otro método para resolver el modelo aproximado es el símplex normal (Capítulo 3) usando **base restringida**. En este caso no se necesitan las restricciones adicionales donde interviene y_i^k. La base restringida especifica que *no más* de dos t_i^k *positivas* pueden aparecer en la base. Además, sólo pueden ser positivas dos t_i^k si son adyacentes. Así, se aplica la condición estricta de optimalidad del método símplex para seleccionar a la variable entrante t_i^k *sólo si* satisface las condiciones anteriores. En caso contrario, se considera la variable t_i^k que tenga el siguiente mejor indicador $(z_i^k - c_i^k)$ de optimalidad para entrar a la solución. Se repite el proceso hasta que se satisface la condición de optimalidad o hasta que sea imposible introducir nuevas t_i^k sin violar la condición de base restringida, lo que suceda primero. La última tabla contiene la solución óptima aproximada del problema.

El método de programación entera mixta da como resultado un óptimo global del problema aproximado, pero el método de la base restringida sólo puede garantizar un óptimo local. Además, en los dos métodos, puede ser que la solución aproximada no sea factible para el problema original. De hecho, el modelo aproximado puede producir puntos extremos adicionales que no forman parte del espacio de soluciones del problema original.

Ejemplo 21.2-1

Se tiene el problema

$$\text{Maximizar} \quad z = x_1 + x_2^4$$

sujeta a

$$3x_1 + 2x_2^2 \le 9$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

La solución óptima exacta de este problema, obtenida por inspección, es $x_1 = 0$, $x_2 = 2.12$ y $z^* = 20.2$. Para mostrar el uso del método de aproximación, sean las funciones separables

$$f_1(x_1) = x_1$$

$$f_2(x_2) = x_2^4$$

$$g_1^1(x_1) = 3x_1$$
$$g_1^2(x_2) = 2x_2^2$$

Las funciones $f_1(x_1)$ y $g_1^1(x_1)$ quedan en su forma actual, porque ya son lineales. En este caso se considera que x_1 es una de las variables. En cuanto a $f_2(x_2)$ y $g_1^2(x_2)$, se supondrá que hay cuatro puntos de quiebre ($K_2 = 4$). Ya que el valor de x_2 no puede ser mayor que 3, entonces

k	a_2^k	$f_2(a_2^k)$	$g_1^2(a_2^k)$
1	0	0	0
2	1	1	2
3	2	16	8
4	3	81	18

Esto da como resultado

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &\approx t_2^1 f_2(a_2^1) + t_2^2 f_2(a_2^2) + t_2^3 f_2(a_2^3) + t_2^4 f_2(a_2^4) \\ &\approx 0t_2^1 + 1t_2^2 + 16t_2^3 + 81t_2^4 = t_2^2 + 16t_2^3 + 81t_2^4 \end{aligned}$$

De igual modo,

$$g_1^2(x_2) \approx 2t_2^2 + 8t_2^3 + 18t_2^4$$

Entonces, el problema de aproximación viene a ser

$$\text{Maximizar } z = x_1 + t_2^2 + 16t_2^3 + 81t_2^4$$

sujeta a

$$3x_1 + 2t_2^2 + 8t_2^3 + 18t_2^4 \leq 9$$
$$t_2^1 + t_2^2 + t_2^3 + t_2^4 = 1$$
$$t_2^k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4$$
$$x_1 \geq 0$$

La solución debe satisfacer la condición de base restringida.

La tabla símplex inicial (reordenando las columnas para dar una solución de arranque) es

Básica	x_1	t_2^2	t_2^3	t_2^4	s_1	t_2^1	Solución
z	−1	−1	−16	−81	0	0	0
s_1	3	2	8	18	1	0	9
t_2^1	0	1	1	1	0	1	1

La variable s_1 (≥ 0) es una holgura. (Sucede que este problema tiene una solución de arranque obvia. En general habrá que usar técnicas con variables artificiales, de la sección 3.4).

Según los coeficientes del renglón de z, la variable entrante es t_2^4. Como t_2^1 es básica en este momento a un nivel positivo, la condición de base restringida establece que debe salir antes de que t_2^4 pueda entrar a la solución. De acuerdo con la condición de factibilidad, s_1 debe ser la variable saliente. Esto quiere decir que t_2^4 no puede entrar a la solución. La siguiente mejor va-

riable entrante, t_2^3, requiere que t_2^1 salga de la solución básica, condición que ya está garantizada por la condición de factibilidad. La tabla nueva es

Básica	x_1	t_2^2	t_2^3	t_2^4	s_1	t_2^1	Solución
z	-1	15	0	-65	0	16	16
s_1	3	-6	0	10	1	-8	1
t_2^3	0	1	1	1	0	1	1

A continuación, t_2^4 es la variable entrante, lo cual es admisible ya que t_2^3 es positiva. El método símplex indica que s_1 debe salir. Así,

Básica	x_1	t_2^2	t_2^3	t_2^4	s_1	t_2^1	Solución
Z	$\frac{37}{2}$	-24	0	0	$\frac{13}{2}$	-36	$22\frac{1}{2}$
t_2^4	$\frac{3}{10}$	$-\frac{6}{10}$	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$
t_2^3	$-\frac{3}{10}$	$\frac{16}{10}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{9}{10}$

La tabla muestra que t_2^1 y t_2^2 son candidatas a ser la variable entrante. Como t_2^1 no es adyacente a t_2^3 o t_2^4 básicas, no puede entrar. De igual modo, t_2^4 no puede entrar, porque t_2^4 no puede salir. El proceso termina en este punto, y la solución obtenida es la óptima factible del problema aproximado.

La solución óptima del problema original es

$$x_1 = 0$$

$$x_2 \approx 2t_2^3 + 3t_2^4 = 2(\tfrac{9}{10}) + 3(\tfrac{1}{10}) = 2.1$$

$$z = 0 + 2.1^4 = 19.45$$

El valor óptimo aproximado de x_2 (= 2.1) es aproximadamente igual al óptimo verdadero (= 2.12).

Programación convexa separable. Un caso especial de la programación separable se da cuando $g_i^j(x_i)$ es convexa para toda i y j, asegurando así un espacio convexo de soluciones. Además, si $f_i(x_i)$ es convexa (minimización) o cóncava (maximización) para toda i, el problema tiene un óptimo global (véase la tabla 20.2, sección 20.2.2). Bajo esas condiciones se puede emplear una aproximación simplificada.

Supongamos que se tiene un problema de maximización, y sea $f_i(x_i)$ la que se ve en la figura 21.4. Los puntos de quiebre de la función $f_i(x_i)$ son $x_i = a_{ki}$, $k = 0, 1, ..., K$. Sea x_{ki} la que defina el incremento de la variable x_i en el intervalo $(a_{k-1,i}, a_{ki})$, $k = 1, 2, ..., K_i$, y sea ρ_{ki} la pendiente correspondiente del segmento de recta en el mismo intervalo. Entonces,

$$f_i(x_i) \approx \sum_{k=1}^{K_i} \rho_{ki} x_{ki} + f_i(a_{0i})$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{K_i} x_{ki}$$

$$0 \le x_{ki} \le a_{ki} - a_{k-1,\,i},\ k = 1, 2, \ldots, K_i$$

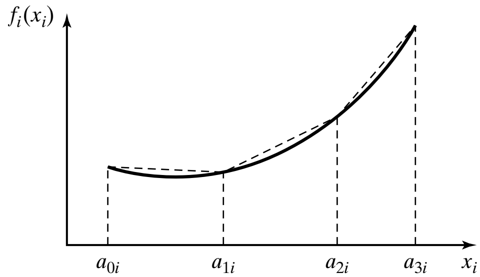


FIGURA 21.4
Aproximación lineal en intervalos de una función convexa

El hecho de que $f_i(x_i)$ sea convexa asegura que $\rho_{1i} < \rho_{2i} < \cdots < \rho_{K1i}$. Así, en un problema de minimización, para $p < q$, la variable x_{pi} es más atractiva que x_{qi}, lo que significa que x_{pi} siempre entrará a la solución antes que x_{qi}.

Las funciones convexas de restricción $g_i^j(x_i)$ se aproximan esencialmente en la misma forma. Sea ρ_{ji}^j la pendiente del k-ésimo segmento de recta correspondiente a $g_i^j(x_i)$. En consecuencia, la i-ésima función se aproxima como sigue:

$$g_i^j(x_i) \approx \sum_{k=1}^{K_i} \rho_{ki}^j x_{ki} + g_i^j(a_{0i})$$

Entonces, el problema completo es

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K_1} \rho_{ki} x_{ki} + f_i(a_{0i}) \right)$$

sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K_i} \rho_{ki}^j x_{ki} + g_i^j(a_{0i}) \right) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$0 \leq x_{ki} \leq a_{ki} - a_{k-1,\,i},\ k = 1, 2, \ldots, K_i;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

en donde

$$\rho_{ki} = \frac{f_i(a_{ki}) - f_i(a_{k-1,i})}{a_{ki} - a_{k-1,i}}$$

$$\rho_{ki}^j = \frac{g_i^j(a_{ki}) - g_i^j(a_{k-1,i})}{a_{ki} - a_{k-1,i}}$$

El problema de maximización se maneja esencialmente en la misma forma. En este caso, $\rho_{1i} > \rho_{2i} > \cdots > \rho_{K_i j}$, lo que quiere decir que cuando $p < q$, la variable x_{pi} siempre entrará a la solución antes que x_{qi} (véase la demostración en el problema 7, conjunto de problemas 21.2a).

El nuevo problema se puede resolver con el método símplex con variables de cota superior (Sección 7.3). No se necesita el concepto de base restringida, porque la convexidad (concavidad) de las funciones garantiza una selección correcta de las variables básicas.

Ejemplo 21.2-2

Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1^4 + x_2 &\le 243 \\ x_1 + 2x_2^2 &\le 32 \\ x_1 &\ge 2.1 \\ x_2 &\ge 3.5 \end{aligned}$$

Las funciones separables de este problema son

$$f_1(x_1) = x_1, \quad f_2(x_2) = -x_2$$
$$g_1^1(x_1) = 3x_1^4, \quad g_2^1(x_2) = x_2$$
$$g_1^2(x_1) = x_1, \quad g_2^2(x_2) = 2x_2^2$$

Estas funciones satisfacen la condición de convexidad necesaria para el problema de minimización.

Los intervalos de las variables x_1 y x_2 (estimados con las restricciones) son $0 \le x_1 \le 3$ y $0 \le x_2 \le 4$. Sean $K_1 = 4$ y $K_2 = 4$, con $a_{01} = a_{02} = 0$. Las pendientes que corresponden a las funciones separables se determinan como sigue.

Para i = 1,

k	a_{k1}	$f_1(a_{k1}) = a_{k1}$	ρ_{k1}	$g_1^1(a_{k1}) = 3a_{k1}^4$	ρ_{k1}^1	$g_1^2(a_{k1}) = a_{k1}$	ρ_{k1}^2	x_{k1}
0	0	0	—	0	—	0	—	—
1	1	1	1	3	3	1	1	x_{11}
2	2	2	1	48	45	2	1	x_{21}
3	3	3	1	243	195	3	1	x_{31}

Para i = 2,

k	a_{k2}	$f_2(a_{k2}) = -a_{k2}$	ρ_{k2}	$g_2^1(a_{k2}) = a_{k2}$	ρ_{k2}^1	$g_2^2(a_{k2}) = 2a_{k2}^2$	ρ_{k2}^2	x_{k1}
0	0	0	—	0	—	0	—	—
1	1	−1	−1	1	1	2	2	x_{11}
2	2	−2	−1	2	1	8	6	x_{21}
3	3	−3	−1	3	1	18	10	x_{31}
4	4	−4	−1	4	1	32	14	x_{42}

Entonces, el problema completo viene a ser

$$\text{Maximizar } z \approx x_{11} + x_{21} + x_{31} - x_{12} - x_{22} - x_{32} - x_{42}$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_{11} + 45x_{21} + 195x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &\le 243 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + 2x_{12} + 6x_{22} + 10x_{32} + 14x_{42} &\le 32 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\ge 2.1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &\ge 3.5 \\ 0 \le x_{k1} \le 1, \quad k &= 1,2,3 \\ 0 \le x_{k2} \le 1, \quad k &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

La solución óptima obtenida con TORA es

$$z = -0.52,\ x_{11} = x_{12} = 1,\quad x_{13} = 0.98,\ x_{21} = x_{22} = x_{23} = 1,\ x_{24} = 0.5$$

Esta solución se traduce en $(x_1, x_2) = (2.98, 3.5)$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2A

1. Aproxime el siguiente problema como programa entero mixto.

$$\text{Maximizar } z = e^{-x_1} + x_1 + (x_2 + 1)^2$$

sujeta a

$$x_1^2 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Repita el problema 1 usando el método de base restringida. A continuación determine la solución óptima.

3. Para el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2x_3$$

sujeta a

$$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aproxime el problema como programa lineal, para aplicarle el método de base restringida.

4. Indique cómo se puede hacer separable el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2 + x_3 + x_1x_3$$

sujeta a

$$x_1x_2 + x_2 + x_1x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5. Indique cómo se puede hacer separable el siguiente problema:

$$\text{Minimizar } z = e^{2x_1 + x_2^2} + (x_3 - 2)^2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6. Indique cómo se puede hacer separable el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = e^{x_1x_2} + x_2^2x_3 + x_4$$

sujeta a

$$x_1 + x_2x_3 + x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_4 \text{ de signo no restringido}$$

7. Demuestre que en programación convexa separable, nunca es óptimo tener $x_{ki} > 0$ cuando $x_{k-1,\, i}$ no está en su cota superior.

8. Resuelva el siguiente problema de programación como separable convexo.

$$\text{Minimizar } z = x_1^4 + 2x_2 + x_3^2$$

sujeta a

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \leq 4$$
$$|x_1 + x_2| \leq 0$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$
$$x_2 \text{ de signo no restringido}$$

9. Resuelva el siguiente problema de programación convexa separable convexo.

$$\text{Minimizar } z = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 6)^2$$

sujeta a

$$6x_1 + 3(x_2 + 1)^2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

21.2.2 Programación cuadrática

Un modelo de programación cuadrática se define como sigue:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} + \mathbf{X}^T\mathbf{DX}$$

sujeta a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

en donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$
$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

La función $\mathbf{X}^T\mathbf{DX}$ define una forma cuadrática (Sección A.3). Se supone que la matriz **D** es simétrica y negativa definida. Eso quiere decir que z es estrictamente cóncava. Las restricciones son lineales, lo que garantiza que el espacio de soluciones es convexo.

La solución de este problema se basa en las condiciones KKT necesarias. Como z es estrictamente cóncava y el espacio de soluciones es convexo, esas condiciones también son suficientes para tener un óptimo global, como se ve en la tabla 20.2, sección 20.2.2.

Se describirá el problema de programación cuadrática para el caso de la maximización. Es trivial cambiar la formulación para el caso de la minimización. El problema se puede plantear como sigue:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} + \mathbf{X}^T\mathbf{DX}$$

sujeta a

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Sean

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T$$
$$\mathbf{U} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$$

los multiplicadores de Lagrange correspondientes a los dos conjuntos de restricciones $\mathbf{AX} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ y $-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$, respectivamente. Al aplicar las condiciones KKT se obtiene

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{U} \geq \mathbf{0}$$
$$\nabla z - (\boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{U}^T)\nabla\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\mu_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$
$$-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$$

Ahora

$$\nabla z = \mathbf{C} + 2\mathbf{X}^T\mathbf{D}$$
$$\nabla\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Sean $\mathbf{S} = \mathbf{b} - \mathbf{AX} \geq \mathbf{0}$ las variables de holgura de las restricciones. Las condiciones se reducen a

$$-2\mathbf{X}^T\mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} - \mathbf{U}^T = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{AX} + \mathbf{S} = \mathbf{b}$$
$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \quad \text{para toda } i \text{ y } j$$
$$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, la transpuesta del primer conjunto de ecuaciones se puede escribir en la forma

$$-2\mathbf{DX} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{U} = \mathbf{C}^T$$

Por consiguiente, se pueden combinar las condiciones necesarias como sigue:

$$\begin{pmatrix} -2\mathbf{D} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i, \quad \text{para toda } i \text{ y } j$$
$$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq \mathbf{0}$$

Excepto por las condiciones $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$, las ecuaciones restantes son funciones lineales en **X**, **λ**, **U** y **S**. Entonces, el problema equivale a resolver un sistema de ecuaciones lineales con las condiciones adicionales $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$. Como z es estrictamente cóncava y el espacio de soluciones es convexo, la solución *factible* que satisfaga todas esas condiciones debe ser única y óptima.

La solución del sistema se obtiene usando la fase I del método de dos fases (Sección 3.4.2). La única restricción es satisfacer las condiciones $\lambda_i S_i = 0 = \mu_j x_j$. Esto quiere decir que λ_i y S_i no pueden ser positivas al mismo tiempo. De igual modo, μ_j y x_j no pueden ser positivas al mismo tiempo. Es la misma idea que la de la *base restringida* que se usó en la sección 21.2.1.

En la fase I se igualarán a cero todas las variables artificiales sólo si el problema tiene un espacio factible.

Ejemplo 21.2-3

Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Este problema se puede llevar a la forma matricial como sigue:

$$\text{Maximizar } z = (4, 6)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sujeta a

$$(1, 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La tabla inicial para la fase I se obtiene introduciendo las variables artificiales R_1 y R_2. Entonces,

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	6	6	3	−1	−1	0	0	0	10
R_1	4	2	1	−1	0	1	0	0	4
R_2	2	4	2	0	−1	0	1	0	6
s_1	1	2	0	0	0	0	0	1	2

Iteración 1. Ya que $\mu_1 = 0$, la variable de entrada más prometedora x_1 se puede hacer básica con R_1 como variable saliente. Así se obtiene la siguiente tabla:

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1
R_2	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
s_1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	1

Iteración 2. La variable más prometedora es x_2, y se puede hacer básica porque $\mu_2 = 0$. Entonces,

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	0	2	0	−1	−1	0	−2	2
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
R_1	0	0	2	0	−1	0	1	−2	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Iteración 3. Como $s_1 = 0$, se puede introducir λ_1 en la solución. Se obtiene entonces lo siguiente:

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	0	0	0	0	−1	−1	0	0
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
λ_1	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	−1	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$

La última tabla contiene la solución óptima para la fase I. Como $r = 0$, la solución $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{5}{6}$, es factible. El valor óptimo de z se calcula a partir del problema original y es igual a 4.16.

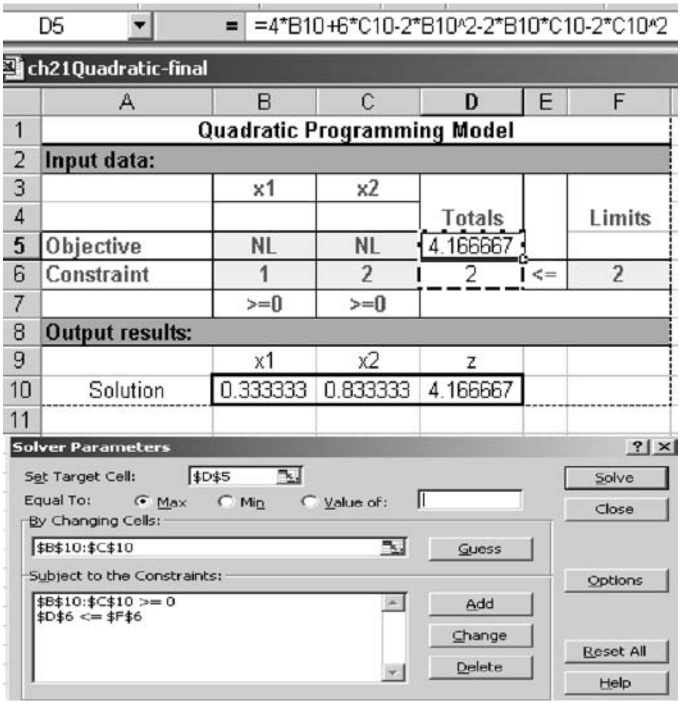


FIGURA 21.5
Solución del problema de programación cuadrática, ejemplo 21.2-3, con Excel

Para resolver el problema de programación cuadrática se puede usar Excel Solver. La figura 21.5 muestra la solución del ejemplo 21.2-3 (véase el archivo ch21SolverQuadratic-Programming.xls). Los datos se ingresan en forma parecida a la que se usa en la programación lineal (véase la sección 2.4.2). La diferencia principal está en la forma en que se escribe la función no lineal. En forma específica, en el ejemplo 21.2-3, la función objetivo no lineal

$$z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

se ingresa en la celda objetivo D5 como sigue:

```
=4*B10+6*C10−2*B10^2−2*B10*C10−2*C10^2
```

En consecuencia, las celdas cambiantes B10 y C10 representan a x_1 y x_2. Observe que las celdas B5:C5 no se usan en este modelo. Para facilidad de lectura se ingresó el símbolo NL (*no lineal*) para indicar que la restricción asociada es no lineal. También, el lector puede especificar la no negatividad de las variables ya sea en el cuadro de diálogo Opciones o añadiendo restricciones explícitas de no negatividad.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2B

1. Se tiene el problema

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre que z es estrictamente cóncava, y a continuación resuelva el problema usando el algoritmo de programación cuadrática.

2. Se tiene el problema

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre que z es estrictamente convexa y a continuación resuélvala con el algoritmo de programación cuadrática.

21.2.3 Programación geométrica

La programación geométrica tiene que ver con problemas en los que las funciones objetivo y de restricción son del siguiente tipo:

$$z = f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} U_j$$

en donde

$$U_j = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

Se supone que toda $c_j > 0$ y que N es finita. Los exponentes a_{ij} tienen signo no restringido. La función $f(\mathbf{X})$ toma la forma de un polinomio, excepto que los exponentes a_{ij} pueden ser negativos. Por esta razón, y como toda $c_j > 0$, $f(\mathbf{X})$ se llama **posinomio**.

En esta sección se describirá el caso de programación geométrica sin restricciones. El tratamiento del problema con restricciones sale del alcance de este capítulo. Beightler y asociados (1979, capítulo 6) presentan una descripción detallada del tema.

Veamos la *minimización* de la función posinomial $f(\mathbf{X})$. A este problema se le llamará *primal*. Se supone que las variables x_i son *estrictamente positivas*, por lo que la región $x_i \leq 0$ es no factible. Más adelante se demostrará que el requisito $x_i > 0$ juega una parte esencial en la deducción de los resultados.

La primera derivada parcial de z debe anularse en un punto mínimo. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} c_j a_{kj} (x_k)^{a_{kj}-1} \prod_{i \neq k} x_i^{a_{ij}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Como cada $x_k > 0$ por hipótesis,

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 = \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{N} a_{kj} U_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Sea z^* el valor mínimo de z. Entonces, $z^* > 0$, porque z es posinomial y cada $x_k > 0$. Definiremos a

$$y_j = \frac{U_j^*}{z^*}$$

Así, $y_j > 0$ y $\Sigma_j^n y_j = 1$. El valor de y_j representa la contribución relativa de U_j al valor óptimo de la función objetivo z^*. De este modo, las condiciones *necesarias* se pueden escribir como sigue:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj} y_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = 1, \qquad y_j > 0 \text{ para toda } j$$

Éstas son las llamadas **condiciones de ortogonalidad** y de **normalidad**, y producirán una solución única para y_j si $n + 1 = N$ y todas las ecuaciones son independientes. El problema se complica más cuando $N > n + 1$, porque ya los valores de y_j no son únicos. Después se demostrará que aún en este caso, la y_j óptima es única.

Dada y_j^*, se pueden determinar los valores de z^* y x_i^* como sigue:

$$z^* = (z^*)^{\Sigma_{j=1}^N y_j^*}$$

Como $z^* = \frac{U_j^*}{y_j^*}$, entonces

$$\begin{aligned} z^* &= \left(\frac{U_1^*}{y_1^*}\right)^{y_1^*}\left(\frac{U_2^*}{y_2^*}\right)^{y_2^*} \cdots \left(\frac{U_N^*}{y_N^*}\right)^{y_N^*} \\ &= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{y_j^*}\right)^{y_j^*}\right\}\left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_{ij}}\right)^{y_j^*}\right\} \\ &= \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{y_j^*}\right)^{y_j^*}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{n}(x_i^*)^{\Sigma_{j=1}^N a_{ij} y_j^*}\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{c_j}{y_j^*}\right)^{y_j^*} \end{aligned}$$

Este paso se justifica porque $\Sigma_{j=1}^N a_{ij} y_j = 0$. El valor de z^* se conoce una vez que todas las y_j se hayan determinado. Entonces, dada y_j^* y z^*, se puede determinar $U_j^* = y_j^* z$. Al resolver entonces las siguientes ecuaciones se obtiene x_i^*.

$$U_j^* = c_j \prod_{i=1}^{n} (x_i^*)^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

El procedimiento indica que la solución del posinomio original z se puede transformar en la solución de un conjunto de ecuaciones lineales en y_j. Esas ecuaciones son las condiciones necesarias para un mínimo. Se puede demostrar que esas ecuaciones también son suficientes. La demostración se puede ver en Beightler y asociados (1979, pág. 333).

En realidad, las variables y_j definen las variables duales correspondientes al problema z primal. Para ver esta relación, considérese el problema primal en la forma

$$z = \sum_{j=1}^{N} y_j\left(\frac{U_j}{y_j}\right)$$

Ahora se define la función dual

$$w = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{U_j}{y_j}\right)^{y_j}$$

Como $\sum_{j=1}^{N} y_j = 1$ y $y_j > 0$, entonces

$$w \leq z$$

Este resultado se basa en la **desigualdad aritmético-geométrica de Cauchy**, que establece que

$$\sum_{j=1}^{N} w_j z_j \geq \prod_{j=1}^{N} z_j^{w_j}$$

$$w_j > 0, \ \sum_{j=1}^{N} w_j = 1$$

Una consecuencia inmediata de la desigualdad $w \leq z$ es la siguiente ecuación:

$$w^* = \max_{y_j} w = \min_{x_i} z = z^*$$

Ejemplo 21.2-4

En este ejemplo se examina un problema en el que $N = n + 1$, de modo que la solución de las condiciones de ortogonalidad y de normalidad es única. Después sigue un ejemplo que ilustra el caso en el que $N > n + 1$.

Se tiene el problema

$$\text{Minimizar } z = 7x_1x_2^{-1} + 3x_2x_3^{-2} + 5x_1^{-3}x_2x_3 + x_1x_2x_3$$

Este problema se puede escribir en la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } z = 7x_1^1x_2^{-1}x_3^0 + 3x_1^0x_2^1x_3^{-2} + 5x_1^{-3}x_2^1x_3^1 + x_1^1x_2^1x_3^1$$

Entonces,

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (7, 3, 5, 1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, las condiciones de ortogonalidad y de normalidad se expresan como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con ellas se llega a la solución única

$$y_1^* = \tfrac{1}{2},\ y_2^* = \tfrac{1}{6},\ y_3^* = \tfrac{5}{24},\ y_4^* = \tfrac{1}{8}$$

Así,

$$z^* = \left(\frac{7}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{5}{\frac{5}{24}}\right)^{\frac{5}{24}}\left(\frac{1}{\frac{3}{24}}\right)^{\frac{3}{24}} = 15.23$$

En consecuencia, de la ecuación $U_j^* = y_j^* z^*$,

$$7x_1x_2^{-1} = U_1 = \tfrac{1}{2}(15.23) = 7.615$$

$$3x_2x_3^{-2} = U_2 = \tfrac{1}{6}(15.23) = 2.538$$

$$5x_1^{-3}x_2x_3 = U_3 = \tfrac{5}{24}(15.23) = 3.173$$

$$x_1x_2x_3 = U_4 = \tfrac{1}{8}(15.23) = 1.904$$

La solución de estas ecuaciones es

$$x_1^* = 1.316,\ x_2^* = 1.21,\ x_3^* = 1.2$$

que es la solución óptima del problema.

Ejemplo 21.2-5

El problema es

$$\text{Minimizar } z = 5x_1x_2^{-1} + 2x_1^{-1}x_2 + 5x_1 + x_2^{-1}$$

Las condiciones de ortogonalidad y normalidad se expresan con

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $N > n + 1$, esas ecuaciones no conducen a y_j en forma directa. Al despejar y_1, y_2 y y_3 en función de y_4 se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_4 \\ 1 - y_4 \end{pmatrix}$$

o sea

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5(1 - 3y_4) \\ y_2 &= 0.5(1 - y_4) \\ y_3 &= y_4 \end{aligned}$$

El problema dual asociado es

$$\text{Maximizar } w = \left(\frac{5}{0.5(1 - 3y_4)}\right)^{0.5(1-3y_4)}\left(\frac{2}{0.5(1 - y_4)}\right)^{0.5(1-y_4)}\left(\frac{5}{y_4}\right)^{y_4}\left(\frac{1}{y_4}\right)^{y_4}$$

Maximizar w equivale a minimizar ln w. Sin embargo, esto último es más fácil de manipular. Así,

$$\ln w = 0.5(1 - 3y_4)\{\ln 10 - \ln(1 - 3y_4)\} + 0.5(1 - y_4)\{\ln 4 - \ln(1 - y_4)\} + y_4(\ln 5 - 2\ln y_4)$$

El valor de y_4 que maximiza a ln w debe ser único (porque el problema primal tiene un mínimo único). Entonces,

$$\frac{\partial \ln w}{\partial y_4} = (-\tfrac{3}{2}\ln 10 - \tfrac{1}{2}\ln 4 + \ln 5) + \tfrac{3}{2}\ln(1 - 3y_4) + \tfrac{1}{2}\ln(1 - y_4) - 2\ln y_4 = 0$$

Esto, después de simplificar, se transforma en

$$-\ln\left(\frac{2 \times 10^{\frac{3}{2}}}{5}\right) + \ln\left(\frac{(1 - 3y_4)^{\frac{3}{2}}(1 - y_4)^{\frac{1}{2}}}{y_4^2}\right) = 0$$

o sea

$$\frac{\sqrt{(1 - 3y_4)^3(1 - y_4)}}{y_4^2} = 12.6$$

que da como resultado $y_4^* \approx 0.16$. En consecuencia, $y_3^* = 0.16$, $y_2^* = 0.42$ y $y_1^* = 0.26$.

El valor de z^* se obtiene de

$$z^* = w^* = \left(\tfrac{5}{0.26}\right)^{0.26}\left(\tfrac{2}{0.42}\right)^{0.42}\left(\tfrac{5}{0.16}\right)^{0.16} \approx 9.661$$

Por consiguiente

$$U_3 = 0.16(9.661) = 1.546 = 5x_1$$
$$U_4 = 0.16(9.661) = 0.1546 = x_2^{-1}$$

La solución de estas ecuaciones es $x_1^* = 0.0309$ y $x_2^* = 0.647$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2C

1. Resuelva el siguiente problema con programación geométrica.

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^{-1}x_2^2 + x_1^4x_2^{-2} + 4x_1^2$$
$$x_1, x_2 > 0$$

2. Resuelva el siguiente problema con programación geométrica.

$$\text{Minimizar } z = 5x_1x_2^{-1}x_3^2 + x_1^{-2}x_3^{-1} + 10x_2^3 + 2x_1^{-1}x_2x_3^{-3}$$
$$x_1, x_2, x_3 > 0$$

3. Resuelva el siguiente problema con programación geométrica.

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^2x_2^{-3} + 8x_1^{-3}x_2 + 3x_1x_2$$
$$x_1, x_2 > 0$$

4. Resuelva el siguiente problema con programación geométrica.

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^3x_2^{-3} + 4x_1^{-2}x_2 + x_1x_2$$
$$x_1, x_2 > 0$$

21.2.4 Programación estocástica

La programación estocástica tiene que ver con situaciones en las que algunos o todos los parámetros del problema son variables aleatorias. Esos casos son típicos en los problemas de la vida real, donde puede ser difícil determinar con certidumbre los valores de los parámetros.

La idea de la programación estocástica es convertir el problema probabilístico en un caso determinístico equivalente. En esta sección se explicará la **programación restringida por el azar**, que se define como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ x_j \geq 0, \quad \text{para toda } j$$

El nombre "restringido por el azar" se debe a que cada restricción ocurre con una probabilidad mínima de $1 - \alpha_i$, $0 < \alpha_i < 1$. Se supone que todas las a_{ij} y b_i son variables aleatorias. Se examinarán tres casos:

1. Sólo a_{ij} es aleatoria para toda i y j.
2. Sólo b_i es aleatoria para toda i.
3. Tanto a_{ij} como b_i son aleatorias para toda i y j.

En los tres casos se supone que los parámetros tienen distribuciones normales con promedios y varianzas conocidos.

Caso 1. Cada a_{ij} está normalmente distribuida con media $E\{a_{ij}\}$, varianza $\text{var}\{a_{ij}\}$ y covarianza $\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\}$ de a_{ij} y de $a_{i'j'}$.

La i-ésima restricción es

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

se define

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

Entonces h_i tiene distribución normal con

$$E\{h_i\} = \sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j$$

$$\text{var}\{h_i\} = \mathbf{X}^T\mathbf{D}_i\mathbf{X}$$

en donde

$$\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

$$\mathbf{D}_i = i\text{-ésima matriz de covarianzas}$$

$$= \begin{pmatrix} var\{a_{i1}\} & \ldots & \text{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & \ldots & \text{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix}$$

Ahora bien,

$$P\{h_i \leq b_i\} = P\left\{\frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \leq \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

en donde $\frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}$ es normal estándar con media cero y varianza 1. Eso quiere decir que

$$P\{h_i \leq b_i\} = F\left(\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right)$$

donde F representa la función de distribución acumulada, FDA, de la distribución normal estándar.

Sea K_{α_i} la variable normal estándar tal que

$$F(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i$$

Entonces se cumple la desigualdad $P\{h_i \leq b_i\} \geq 1 - \alpha_i$ si, y sólo si,

$$\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \geq K_{\alpha_i}$$

Esto da como resultado la siguiente restricción determinística no lineal:

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\mathbf{X}^T\mathbf{D}_i\mathbf{X}} \leq b_i$$

Para el caso especial en donde las distribuciones normales son independientes:

$$\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$$

y la última restricción se reduce a

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\text{var}\{a_{ij}\}x_j^2} \leq b_i$$

Esta restricción se puede llevar a la forma de programación separable (Sección 21.2.1) mediante la sustitución

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\text{var}\{a_{ij}\}x_j^2}, \text{ para toda } i$$

Así, la restricción original equivale a

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}y_i \leq b_i$$

y

$$\sum_{j=1}^{n}\text{var}\{a_{ij}\}x_j^2 - y_i^2 = 0$$

Caso 2. Sólo b_i es normal con media $E\{b_i\}$ y varianza $\text{var}\{b_i\}$. El análisis se parece al del caso 1. Considere la restricción estocástica:

$$P\left\{b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\} \geq \alpha_i$$

Como en el caso 1,

$$P\left\{\frac{b_i - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}}\right\} \geq \alpha_i$$

Esto sólo puede ser cierto si

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \leq K_{\alpha_i}$$

Así, la restricción estocástica es equivalente a la restricción lineal determinística

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq E\{b_i\} + K_{\alpha_i}\sqrt{\text{var}\{b_i\}}$$

Caso 3. En este caso, todas las a_{ij} y b_i son variables aleatorias normales. Considere la restricción

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

Que se puede escribir como sigue:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0$$

Como todas las a_{ij} y b_i tienen distribución normal, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ también es normal. Esto demuestra que la restricción por azar se reduce al caso 1, y se maneja en forma similar.

Ejemplo 21.2-6

Se tiene el problema restringido por el azar

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\} \geq 0.95$$
$$P\{5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\} \geq 0.10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Se supone que todas las a_{1j} son variables aleatorias *independientes* y normalmente distribuidas, con las siguientes medias y varianzas:

$$E\{a_{11}\} = 1,\ E\{a_{12}\} = 3,\ E\{a_{13}\} = 9$$
$$\text{var}\{a_{11}\} = 25,\ \text{var}\{a_{12}\} = 16,\ \text{var}\{a_{13}\} = 4$$

El parámetro b_2 tiene distribución normal con media 7 y varianza 9.

De acuerdo con las tablas de la distribución normal estándar del apéndice D,

$$K_{\alpha_1} = K_{0.05} \approx 1.645, \quad K_{\alpha_2} = K_{0.10} \approx 1.285$$

Las dos restricciones se convierten en forma determinística a

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645\sqrt{25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2} \leq 8$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 7 + 1.285(3) = 10.855$$

Si se hace que

$$y^2 = 25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2$$

el problema se transforma en

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645y \leq 8$$

$$25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2 - y^2 = 0$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$

$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0$$

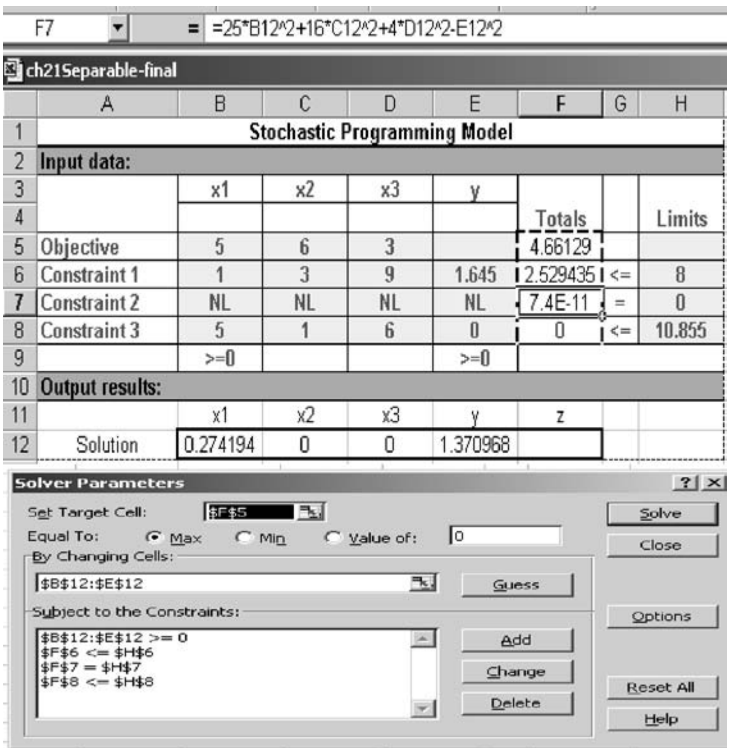
que se puede resolver con programación separable.

La solución óptima de este problema no lineal, con Excel, se ve en la figura 21.6 (archivo ch21SolverStochasticProgramming.xls). Sólo el lado izquierdo de la restricción 2 es no lineal, y se escribe como sigue en la celda F7:

```
=25*B12^2+16*c12^2+4*D12^2−E12^2
```

FIGURA 21.6

Solución del problema de programación estocástica, ejemplo 21.2-6, con Excel



CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2D

1. Convierta el siguiente problema estocástico en un modelo determinístico equivalente.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$P\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \leq 10\} \geq 0.9$$
$$P\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_2\} \geq 0.1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que a_1 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas, con promedios $E\{a_1\} = 2$ y $E\{a_3\} = 5$, y varianzas $\text{var}\{a_1\} = 9$ y $\text{var}\{a_3\}= 16$. También suponga que b_2 está normalmente distribuida con media 15 y varianza 25.

2. Se tiene el siguiente modelo de programación estocástica:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^2 + x_3$$

sujeta a

$$P\{x_1^2 + a_2x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \leq 10\} \geq 0.9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Los parámetros a_2 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas, con medias 5 y 2, y varianzas 16 y 25, respectivamente. Convierta el problema en la forma (determinística) de programación separable.

21.2.5 Método de combinaciones lineales

Este método tiene que ver con el siguiente problema, en el que todas las restricciones son lineales:

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeta a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El procedimiento se basa en el método de la pendiente más inclinada (del gradiente) (Sección 21.1.2). Sin embargo, la dirección especificada por el vector gradiente podrá no resultar en una solución factible para el problema con restricciones. También, el vector gradiente no necesariamente será nulo en el punto óptimo (restringido). El método de pendiente más inclinada se puede modificar entonces para manejar el caso con restricciones.

Sea $\mathbf{X}^k$ el punto *factible* de intento en la iteración k. La función objetivo $f(\mathbf{X})$ se puede desarrollar en la proximidad de $\mathbf{X}^k$ con la serie de Taylor. Así se llega a

$$f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{X}^k) + \nabla f(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^k) = (f(\mathbf{X}^k) - \nabla f(\mathbf{X}^k)\mathbf{X}^k) + \nabla f(\mathbf{X}^k)\mathbf{X}$$

En este procedimiento se necesita determinar un punto factible $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ tal que $f(\mathbf{X})$ se maximice sujeta a las restricciones (lineales) del problema. Como $f(\mathbf{X}^k) - \nabla f(\mathbf{X}^k)\mathbf{X}^k$ es una constante, el problema de determinar $\mathbf{X}^*$ se reduce a resolver el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } w_k(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}^k)\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Dado que w_k se construye partiendo del gradiente de $f(\mathbf{X})$ en $\mathbf{X}^k$, se puede asegurar una solución mejorada si, y sólo si $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}^k)$. Del desarrollo de Taylor, la condición no garantiza que $f(\mathbf{X}^*) > f(\mathbf{X}^k)$ a menos que $\mathbf{X}^*$ esté en la proximidad de $\mathbf{X}^k$. Sin embargo, como $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}^k)$, debe existir un punto $\mathbf{X}^{k+1}$ en el segmento de recta $(\mathbf{X}^k, \mathbf{X}^*)$ tal que $f(\mathbf{X}^{k+1}) > f(\mathbf{X}^k)$. El objetivo es determinar $\mathbf{X}^{k+1}$. Se define a

$$\mathbf{X}^{k+1} = (1 - r)\mathbf{X}^k + r\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}^k), \quad 0 < r \leq 1$$

Esto quiere decir que $\mathbf{X}^{k+1}$ es una **combinación lineal** de $\mathbf{X}^k$ y de $\mathbf{X}^*$. Como $\mathbf{X}^k$ y $\mathbf{X}^*$ son dos puntos factibles en un espacio de solución *convexo*, $\mathbf{X}^{k+1}$ también es factible. Al comparar con el método de la pendiente más inclinada (Sección 21.1.2) se ve que el parámetro r representa el tamaño del paso.

El punto $\mathbf{X}^{k+1}$ se determina de tal modo que se maximice $f(\mathbf{X})$. Como $\mathbf{X}^{k+1}$ es una función sólo de r, $\mathbf{X}^{k+1}$ se determina maximizando

$$h(r) = f(\mathbf{X}^k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}^k))$$

Se repite el procedimiento hasta que en la k-ésima iteración, $w_k(\mathbf{X}^*) \leq w_k(\mathbf{X}^k)$. En este punto no se pueden tener más mejoras y el proceso termina con $\mathbf{X}^k$ como el mejor punto de solución.

Los problemas de programación lineal generados en las iteraciones sucesivas sólo difieren en los coeficientes de la función objetivo. Así, se pueden usar los procedimientos de análisis de sensibilidad presentados en la sección 4.5 para hacer los cálculos con eficiencia.

Ejemplo 21.2-7

La programación cuadrática del ejemplo 21.2-3 era

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sea $\mathbf{X}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que es factible, el punto inicial. Ahora

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

Iteración 1.

$$\nabla f(\mathbf{X}^0) = (1, 3)$$

El programa lineal asociado maximiza a $w_1 = x_1 + 3x_2$, sujeta a las restricciones del problema original. Esto da la solución óptima $\mathbf{X}^* = (0, 1)$. Los valores de w_1 en $\mathbf{X}^0$ y $\mathbf{X}^*$ son iguales a 2 y 3, respectivamente. En consecuencia, se determina el siguiente punto de prueba:

$$\mathbf{X}^1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + r[(0, 1) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})] = (\tfrac{1-r}{2}, \tfrac{1+r}{2})$$

La maximización de

$$h(r) = f(\tfrac{1-r}{2}, \tfrac{1+r}{2})$$

da como resultado $r^1 = 1$. Entonces $\mathbf{X}^1 = (0, 1)$ con $f(\mathbf{X}^1) = 4$.

Iteración 2.

$$\nabla f(\mathbf{X}^1) = (2, 2)$$

La función objetivo del nuevo problema de programación lineal es $w_2 = 2x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema es $\mathbf{X}^* = (2, 0)$. Como los valores de w_2 en $\mathbf{X}^1$ y $\mathbf{X}^*$ son 2 y 4, se debe determinar un nuevo punto tentativo. Así,

$$\mathbf{X}^2 = (0, 1) + r[(2, 0) - (0, 1)] = (2r, 1 - r)$$

La maximización de

$$h(r) = f(2r, 1 - r)$$

da como resultado $r^2 = \frac{1}{6}$. Entonces $\mathbf{X}^2 = (\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ con $f(\mathbf{X}^2) \approx 4.16$.

Iteración 3.

$$\nabla f(\mathbf{X}^2) = (1, 2)$$

La función objetivo correspondiente es $w_3 = x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema da como resultado las soluciones alternativas $\mathbf{X}^* = (0, 1)$ y $\mathbf{X}^* = (2, 0)$. El valor de w_3 para ambos puntos es igual a su valor en $\mathbf{X}^2$. En consecuencia no es posible mayor mejora. La solución óptima *aproximada* es $\mathbf{X}^2 = (\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ con $f(\mathbf{X}^2) \approx 4.16$. En este caso sucede que es la óptima exacta.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2E

1. Resuelva el siguiente problema con el método de combinaciones lineales.

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 5x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

21.2.6 Algoritmo SUMT

En esta sección se presenta un método de gradiente más general. Se supone que la función objetivo $f(\mathbf{X})$ es cóncava, y que cada función de restricción $g_i(\mathbf{X})$ es convexa. Además, el espacio de soluciones debe tener un interior. Esto excluye el uso implícito y explícito de restricciones de *igualdad*.

El algoritmo SUMT (de *sequential unconstrained maximization technique*, técnica de maximización secuencial no restringida) se basa en transformar el problema con restricciones en uno equivalente sin restricciones (o *no restringido*). El procedimiento se parece al uso del método de los multiplicadores de Lagrange. Después, el problema transformado se puede resolver con el método de la pendiente más pronunciada (Sección 21.1.2).

Para aclarar el concepto, considérese la nueva función

$$p(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{X}) + t\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(\mathbf{X})} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right)$$

donde t es un parámetro no negativo. El signo de suma tiene en cuenta las restricciones de no negatividad, que se deben poner en la forma $-x_j \leq$ para ser consistentes con las restricciones originales. Como $g_i(\mathbf{X})$ es convexa, $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ es cóncava. Eso quiere decir que $p(\mathbf{X}, t)$ es cóncava en $\mathbf{X}$. En consecuencia, $p(\mathbf{X}, t)$ posee un máximo único. La optimización del problema original restringido equivale a la optimización de $p(\mathbf{X}, t)$.

El algoritmo se inicia seleccionando en forma arbitraria un valor inicial *no negativo* para t. Se selecciona un punto inicial $\mathbf{X}_0$ como la primera solución de prueba. Debe ser un punto interior, esto es, no debe estar en las fronteras del espacio de solución. Dado el valor de t, se aplica el método de la pendiente más pronunciada para determinar la solución óptima (el máximo) de $p(\mathbf{X}, t)$.

El nuevo punto de solución siempre será un punto interior, porque si ese punto está cerca de las fronteras, al menos una de las funciones $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ o $-\frac{1}{x_i}$ adquirirá un valor negativo muy grande. Como la función objetivo es maximizar $p(\mathbf{X}, t)$, esos puntos de solución se excluyen en forma automática. El resultado principal es que los puntos de solución sucesivos siempre serán puntos interiores. En consecuencia, el problema siempre se puede manejar como un caso sin restricciones.

Una vez obtenida la solución óptima correspondiente a determinado valor de t, se genera un nuevo valor de t y se repite el proceso de optimización (con el método de la pendiente más pronunciada). Si t' es el valor actual de t, se debe seleccionar el siguiente valor t'' de modo que $0 < t'' < t'$.

El algoritmo SUMT termina cuando, para dos valores sucesivos de t, los valores *óptimos* correspondientes de $\mathbf{X}$, obtenidos maximizando $p(\mathbf{X}, t)$, sean aproximadamente iguales. En este punto los intentos posteriores producirán poca mejoría.

La implementación real de SUMT tiene más detalles que los que se presentaron aquí. En forma específica, un factor importante que puede afectar la rapidez de convergencia es la selección de un valor inicial de t. Además, para determinar un punto interior inicial se pueden necesitar técnicas especiales. Estos detalles se pueden encontrar en Fiacco y McCormick (1968).

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Bazaraa, M., H. Sherall y C. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1993.

Beightler, C., D. Phillips y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1979.

Fiacco, A. y G. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, Nueva York, 1968.

Rardin, D., *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

A P É N D I C E A

Repaso de vectores y matrices

A.1 VECTORES

A.1.1 Definición de un vector

Sean $p_1, p_2, ..., p_n$; n números reales cualesquiera y **P** un conjunto ordenado de esos números reales; esto es,

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Entonces **P** es un n-vector (o simplemente un vector). El i-ésimo componente de **P** es p_i. Por ejemplo, $\mathbf{P} = (2, 4)$ es un vector bidimensional con $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$.

A.1.2 Suma (resta) de vectores

Se tienen los n-vectores

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$\mathbf{R} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

Para $\mathbf{R} = \mathbf{P} \pm \mathbf{Q}$, el componente i se calcula como $r_i = p_i \pm q_i$.

En general, dados los vectores **P**, **Q** y **S**,

$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$	(Ley conmutativa)
$(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S})$	(Ley asociativa)
$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = \mathbf{0}$	(Vector cero o nulo)

A.1.3 Multiplicación de vectores por escalares

Dado un vector **P** y una cantidad escalar (constante) θ, el nuevo vector

$$\mathbf{Q} = \theta\mathbf{P} = (\theta p_1, \theta p_2, \ldots, \theta p_n)$$

es el producto escalar de **P** y θ. En general, dados los vectores **P** y **S** y los escalares θ y γ,

$$\theta(\mathbf{P} + \mathbf{S}) = \theta\mathbf{P} + \theta\mathbf{S}$$

$$\theta(\gamma\mathbf{P}) = (\theta\gamma)\mathbf{P}$$

A.1.4 Vectores linealmente independientes

Los vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ son *linealmente independientes* si, y sólo si

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \mathbf{P}_j = \mathbf{0} \Rightarrow \theta_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Si para alguna $\theta_j \neq 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \mathbf{P}_j = \mathbf{0}$$

los vectores son *linealmente dependientes*. Por ejemplo, los vectores

$$\mathbf{P}_1 = (1, 2),\ \mathbf{P}_2 = (2, 4)$$

son linealmente dependientes, porque para $\theta_1 = 2$ y $\theta_2 = -1$,

$$\theta_1\mathbf{P}_1 + \theta_2\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

A.2 MATRICES

A.2.1 Definición de una matriz

Una matriz es un ordenamiento rectangular de elementos. El elemento a_{ij} de la matriz **A** ocupa el *i*-ésimo renglón y la *j*-ésima columna del conjunto. Se dice que una matriz con *m* renglones y *n* columnas es de tamaño (o de orden) $m \times n$. Por ejemplo, la siguiente matriz es de tamaño (4×3).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|_{4\times 3}$$

A.2.2 Tipos de matrices

1. Una **matriz cuadrada** tiene $m = n$.
2. Una **matriz identidad** es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son 1 y los elementos no diagonales son cero. Por ejemplo, una matriz identidad de (3×3) es

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Un **vector renglón** es una matriz con un renglón y n columnas.
4. Un **vector columna** es una matriz con m renglones y una columna.
5. La matriz $\mathbf{A}^T$ es la **transpuesta** de $\mathbf{A}$ si el elemento a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$ es igual al elemento a_{ji} de $\mathbf{A}^T$ para toda i y j. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Una matriz $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ es una **matriz cero** si cada elemento de $\mathbf{B}$ es cero.
7. Dos matrices $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ y $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$ son iguales si, y sólo si, son del mismo tamaño y $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j.

A.2.3 Operaciones aritméticas con matrices

En las matrices sólo se definen la adición o suma y la multiplicación o producto. La división, aunque no está definida, se reemplaza con la inversión (véase la sección A.2.6).

Adición (sustracción) de matrices. Se pueden sumar dos matrices $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ y $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$ si son del mismo tamaño $(m \times n)$. La suma $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ se obtiene sumando los elementos correspondientes. Es decir,

$$\|d_{ij}\|_{m\times n} = \|a_{ij} + b_{ij}\|_{m\times n}$$

Si las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ tienen el mismo tamaño, entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} \pm (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \pm \mathbf{C}$$
$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$$

Producto de matrices. El producto $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ de dos matrices, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ y $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$ está definido si, y sólo si la cantidad de columnas de $\mathbf{A}$ es igual a la cantidad de renglones de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A}$ es de tamaño $(m \times r)$ y $\mathbf{B}$ es de tamaño $(r \times n)$, entonces $\mathbf{D}$ debe ser de tamaño $m \times n$, donde m y n son valores enteros positivos arbitrarios. En este caso, se calculan los elementos de $\mathbf{D}$ como sigue:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \quad \text{para toda } i \text{ y } j$$

Por ejemplo, dadas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\times 5 + 3\times 6) & (1\times 7 + 3\times 8) & (1\times 9 + 3\times 0) \\ (2\times 5 + 4\times 6) & (2\times 7 + 4\times 8) & (2\times 9 + 4\times 0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 23 & 31 & 9 \\ 34 & 46 & 18 \end{pmatrix}$$

En general, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ aun cuando $\mathbf{BA}$ esté definida.

Las siguientes reglas generales se aplican a la multiplicación matricial:

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A},\ \mathbf{I}_m \text{ e } \mathbf{I}_n \text{ son matrices identidad}$$
$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$
$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}),\ \alpha \text{ es un escalar}$$

Multiplicación de matrices separadas (o divididas). Sea **A** una matriz de $(m \times t)$ y **B** una matriz de $(r \times n)$. Supóngase que **A** y **B** se separan o dividen como sigue:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{array}\right),\ \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \\ \hline \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{array}\right)$$

En la separación se supone que la cantidad de columnas de $\mathbf{A}_{ij}$ debe ser igual a la cantidad de renglones de $\mathbf{B}_{ij}$ para toda i y j. Entonces,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{32} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} + \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{32} \end{array}\right)$$

Por ejemplo,

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 4 \\ \hline 1 \\ 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} (1)(4) + (2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(4) + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 4 + 2 + 24 \\ \hline \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 53 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 30 \\ 44 \\ 61 \end{pmatrix}$$

A.2.4 Determinante de una matriz cuadrada

Se tiene la matriz cuadrada de n

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A continuación, se define el producto

$$P_{j_1 j_2 \dots j_n} = a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

tal que cada columna y cada renglón de **A** se represente exactamente una vez en los subíndices de $j_1, j_2, ..., j_n$. Entonces se definen

$$\in_{j_1 j_2 \dots j_n} = \begin{cases} 1, & j_1 j_2 \dots j_n \text{ permutación par} \\ 0, & j_1 j_2 \dots j_n \text{ permutación impar} \end{cases}$$

Sea ρ representando la sumatoria sobre todas las $n!$ permutaciones; entonces, el determinante de **A** es det **A** o $|\mathbf{A}|$, y se calcula como sigue:

$$\sum_{\rho} \in_{j_1 j_2 \dots j_n} P_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Por ejemplo, si la matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31})$$

Las propiedades de un determinante son:

1. El valor de un determinante es cero si todo elemento de un renglón o de una columna es cero.
2. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$.
3. Si **B** se obtiene de **A** intercambiando dos renglones cualquiera o dos columnas cualquiera, entonces $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$.
4. Si dos renglones (o dos columnas) de **A** son múltiplos entre sí, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
5. El valor de $|\mathbf{A}|$ no cambia si se suma un escalar α multiplicado por un vector columna (o renglón) a otro vector columna (o renglón).
6. Si todo elemento de una columna o un renglón de un determinante se multiplica por un escalar α, el valor del determinante se multiplica por α.
7. Si **A** y **B** son dos matrices cuadradas de n, entonces

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$$

Definición del menor de un determinante. El menor M_{ij} del elemento a_{ij} en el determinante $|\mathbf{A}|$ se obtiene de la matriz **A** eliminando el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de **A**. Por ejemplo, para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

Definición de la matriz adjunta. Sea $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ definido como el **cofactor** del elemento a_{ij} de la matriz cuadrada **A**. Entonces, la matriz adjunta de **A** es la transpuesta de $\|A_{ij}\|$ y se define como sigue:

$$\text{adj } \mathbf{A} = \|A_{ij}\|^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces, $A_{11} = (-1)^2(3 \times 4 - 2 \times 3) = 6$, $A_{12} = (-1)^3(2 \times 4 - 3 \times 2) = -2, \ldots$, o

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

A.2.5 Matrices no singulares

Una matriz es de rango r si el mayor ordenamiento *cuadrado* en ella que tiene determinante distinto de cero es del tamaño r. Una matriz *cuadrada* con determinante distinto de cero se llama **matriz no singular** o **de rango total**. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A es una matriz **singular**, porque

$$|\mathbf{A}| = 1 \times (21 - 20) - 2 \times (14 - 12) + 3 \times (10 - 9) = 0$$

Pero el rango de **A** es $r = 2$, porque

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

A.2.6 Inversa de una matriz no singular

Si **B** y **C** son dos matrices cuadradas de n tales que $\mathbf{BC} = \mathbf{CB} = \mathbf{I}$, entonces se dice que **B** es la inversa de **C** y que **C** es la inversa de **B**. La notación de la inversa es $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{C}^{-1}$.

Teorema *Si* $\mathbf{BC} = \mathbf{I}$ *y* **B** *es* **no singular**, *entonces* $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}$, *lo que quiere decir que la inversa es única.*

Demostración. Se supone que

$$\mathbf{BC} = \mathbf{I}$$

entonces

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{BC} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}$$

o bien

$$\mathbf{IC} = \mathbf{B}^{-1}$$

o bien

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}$$

Se pueden demostrar dos importantes resultados acerca de matrices no singulares.

1. Si **A** y **B** son matrices cuadradas de n no singulares, entonces $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
2. Si **A** es no singular, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ implica que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

La inversión de matrices se usa para resolver n ecuaciones linealmente independientes. Si se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde x_i representan las incógnitas y a_{ij} y b_i son constantes, esas n ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como sigue:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

Como las ecuaciones son independientes, **A** debe ser no singular. Entonces,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

o sea

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

A.2.7 Métodos para calcular la inversa de una matriz[1]

Método de la matriz adjunta. Dada **A**, matriz no singular de tamaño n,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj }\mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, para

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj }\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \ |\mathbf{A}| = -7$$

Por consiguiente

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Método de operaciones de renglón (Gauss-Jordan). Se tiene la matriz separada $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$, donde **A** es no singular. Al premultiplicar por $\mathbf{A}^{-1}$ se obtiene

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}) = (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$$

---

[1]El módulo de inversas en TORA se basa en el método de descomposición LU. Véase Press y asociados (1986).

Entonces, al aplicar una secuencia específica de transformaciones de renglón, **A** se convierte en **I** e **I** se convierte en $\mathbf{A}^{-1}$. Para ilustrar el procedimiento, considérese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución de **X** y la inversa de la matriz de base se pueden obtener directamente con la ecuación

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}|\mathbf{I}|\mathbf{b}) = (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$$

Las siguientes iteraciones detallan las operaciones de transformación.

Iteración 0

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Iteración 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Iteración 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -5 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Iteración 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

Esto da como resultado $x_1 = \frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{6}{7}$ y $x_3 = \frac{2}{7}$. La inversa de **A** es la matriz del lado derecho, que es la misma que se obtiene con el método de la matriz adjunta.

Forma de producto de la inversa. Supóngase que dos matrices no singulares, **B** y $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$ difieren exactamente en una columna. Supóngase además que $\mathbf{B}^{-1}$ es dato. Entonces, la inversa $\mathbf{B}^{-1}_{\text{siguiente}}$ se puede calcular con la fórmula

$$\mathbf{B}^{-1}_{\text{siguiente}} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}$$

La matriz **E** se calcula en la siguiente forma. Si el vector columna $\mathbf{P}_j$ en **B** se sustituye por el vector columna $\mathbf{P}_r$ para producir $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$, entonces **E** se forma como una matriz identidad de m con su r-ésima columna sustituida por

$$\xi = \frac{1}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r}\begin{pmatrix} -(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_1 \\ -(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_2 \\ \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ -(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_m \end{pmatrix} \leftarrow \text{lugar } r, \quad (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r \neq 0$$

Si $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r = 0$, entonces $\mathbf{B}^{-1}_{\text{siguiente}}$ no existe.

Para demostrar la validez de la fórmula $\mathbf{B}^{-1}_{\text{siguiente}}$, se define $\mathbf{F}$ como una matriz identidad de m cuya r-ésima columna se reemplaza por $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$; esto es,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{r-1}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_m)$$

Ya que $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$ difiere de $\mathbf{B}$ sólo porque su r-ésima columna se sustituye con $\mathbf{P}_j$, entonces

$$\mathbf{B}_{\text{siguiente}} = \mathbf{BF}$$

Así,

$$\mathbf{B}^{-1}_{\text{siguiente}} = (\mathbf{BF})^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$$

La fórmula es consecuencia de hacer que $\mathbf{E} = \mathbf{F}^{-1}$.

Se puede usar la forma de producto para invertir cualquier matriz $\mathbf{B}$ no singular. Se comienza con $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I} = \mathbf{B}_0^{-1}$. A continuación se forma $\mathbf{B}_1$ como matriz identidad cuya primera columna está sustituida con la primera columna de $\mathbf{B}$. Entonces,

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{B}_0^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{I} = \mathbf{E}_1$$

En general, si se construye a $\mathbf{B}_i$ como una matriz identidad que tiene sus primeras i columnas sustituidas por las primeras i columnas de $\mathbf{B}$, entonces

$$\mathbf{B}_i^{-1} = \mathbf{E}_i\mathbf{B}_{i-1}^{-1} = \mathbf{E}_i\mathbf{E}_{i-1}\mathbf{B}_{i-2}^{-1} = \ldots = \mathbf{E}_i\mathbf{E}_{i-1}\ldots\mathbf{E}_1$$

Esto quiere decir que para la matriz original $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}_m\mathbf{E}_{m-1}\ldots\mathbf{E}_1$$

El ejemplo siguiente ilustra la aplicación de la forma de producto de la inversa. Se tiene

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración 0

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración 1

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow r=1$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{0}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iteración 2

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \mathbf{2} \\ -2 \end{pmatrix} \leftarrow r=2$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{1}{2})/2 \\ 0 & +\ 1/2 \\ 0 & -(-2)/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Método de la matriz separada. Supóngase que las dos matrices **A** y **B** de n y no singulares, se separan como sigue:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right), \ \mathbf{A}_{11} \text{ no singular}$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right)$$

Si **B** es la inversa de **A**, entonces, ya que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$,

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \mathbf{I}_p$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = \mathbf{0}$$

También, partiendo de $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ se obtiene

$$\mathbf{B}_{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_q$$

Como $\mathbf{A}_{11}$ es no singular, $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ existe. Al despejar $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{21}$ y $\mathbf{B}_{22}$ se obtienen

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + (\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1})$$

$$\mathbf{B}_{12} = -(\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\mathbf{D}^{-1}$$

$$\mathbf{B}_{21} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1})$$

$$\mathbf{B}_{22} = \mathbf{D}^{-1}$$

en donde

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}(\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})$$

Para ilustrar la aplicación de estas fórmulas, se tiene la matriz separada

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

tal que

$$\mathbf{A}_{11} = (1),\ \mathbf{A}_{12} = (2,\ 3),\ \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\mathbf{A}_{11}^{-1} = 1$, y

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1)(2,\ 3) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = -\tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{B}_{11} = (-\tfrac{6}{7}),\ \mathbf{B}_{12} = (-\tfrac{1}{7} \quad \tfrac{5}{7})$$

$$\mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix},\ \mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

que dan, en forma directa, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

A.3 FORMAS CUADRÁTICAS

Dadas

$$\mathbf{X} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)^T$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la función

$$Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

se llama forma cuadrática. Siempre se puede suponer que la matriz **A** es simétrica, porque cada elemento de cada par de coeficientes a_{ij} y $a_{ji}(i \neq j)$ se puede reemplazar por $\frac{(a_{ij} + a_{ji})}{2}$ sin cambiar a $Q(\mathbf{X})$.

Por ejemplo, la forma cuadrática

$$Q(\mathbf{X}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde **A** es no simétrica, es igual que

$$Q(\mathbf{X}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde **A** es simétrica. Supondremos en adelante que **A** siempre es simétrica.

Se dice que la forma cuadrática es

1. *Positiva definida* si $Q(\mathbf{X}) > 0$ para toda $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.
2. *Positiva semidefinida* si $Q(\mathbf{X}) \geq 0$ para toda **X**, y existe una $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ tal que $Q(\mathbf{X}) = 0$.
3. *Negativa definida* si $-Q(\mathbf{X})$ es positiva definida.
4. *Negativa semidefinida* si $-Q(\mathbf{X})$ es positiva semidefinida.
5. *Indefinida* en los demás casos.

Se puede demostrar que las condiciones necesarias y suficientes para la ocurrencia de los casos anteriores son:

1. $Q(\mathbf{X})$ es positiva definida (semidefinida) si los valores de los determinantes menores principales de **A** son positivos (no negativos).[2] En este caso, se dice que **A** es positiva definida (semidefinida).

---

[2]El k-ésimo determinante menor principal de $\mathbf{A}_{n\times n}$ se define por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

2. $Q(\mathbf{X})$ es negativa definida si el valor de los k-ésimos determinantes menores principales de $\mathbf{A}$ tiene el signo $(-1)^k$, $k = 1, 2, ..., n$. En este caso, $\mathbf{A}$ se llama negativa definida.
3. $Q(\mathbf{X})$ es negativa semidefinida si el k-ésimo determinante menor principal de $\mathbf{A}$ es cero o tiene el signo $(-1)^k$, $k = 1, 2, ..., n$.

A.4 FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS

Se dice que una función $f(\mathbf{X})$ es estrictamente convexa si, para dos puntos distintos $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$,

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{X}_2) < \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{X}_2)$$

donde $0 < \lambda < 1$. Al revés, una función $f(\mathbf{X})$ es estrictamente cóncava si $-f(\mathbf{X})$ es estrictamente convexa.

Un caso especial de la función convexa (cóncava) es la forma cuadrática (véase la sección A.3).

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{CX} + \mathbf{X}^T\mathbf{AX}$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector constante y $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica. Se puede demostrar que $f(\mathbf{X})$ es estrictamente convexa si $\mathbf{A}$ es positiva definida, y que $f(\mathbf{X})$ es estrictamente cóncava si $\mathbf{A}$ es negativa definida.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

Hadley, G., *Matrix Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1961.

Hohn, F., *Elementary Matrix Algebra*, 2a. ed., Macmillan, Nueva York, 1964.

Press, W., B. Flannery, A. Teukolsky y W. Vetterling, *Numerical Recipes: The art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1986.

PROBLEMAS

A-1. Demuestre que los siguientes vectores son linealmente dependientes.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

A-2. Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

determine

a) $\mathbf{A} + 7\mathbf{B}$

b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$

c) $(\mathbf{A} + 7\mathbf{B})^T$

A-3. En el problema A-2, demuestre que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

A-4. Para las matrices separadas

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 9 \\ \hline 3 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & -4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Determine **AB** usando manipulación de matrices separadas.

A-5. En el problema A-2, determine $\mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{B}^{-1}$, con los siguientes métodos:

a) Matriz adjunta

b) Operaciones de renglón

c) Forma de producto de la inversa

d) Matriz separada

A-6. Para

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Suponga que el tercer vector $\mathbf{P}_3$ se sustituye con $\mathbf{V}_3 = \mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2$. Esto quiere decir que la matriz que resulta es singular. Indique cómo la forma de producto de la inversa descubre la singularidad de la matriz.

A-7. Use la forma de producto de la inversa para comprobar si cada una de las siguientes ecuaciones tiene solución única, no tiene solución o tiene infinidad de soluciones.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -x_1 - 2x_2 &= -5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+ 3x_2} + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

A-8. Verifique las fórmulas de la sección A.2.7 para obtener la inversa de una matriz separada.

A-9. Determine la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{G} \\ \mathbf{H} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} \text{ no singular}$$

A-10. Demuestre que la siguiente forma cuadrática es negativa definida.

$$Q(x_1, x_2) = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$$

A-11. Demuestre que la siguiente forma cuadrática es positiva definida.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

A-12. Demuestre que la función $f(x) = e^x$ es estrictamente convexa para todos los valores reales de x.

A-13. Demuestre que la función cuadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

es estrictamente convexa.

A-14. En el problema A-13, demuestre que $-f(x_1, x_2, x_3)$ es estrictamente cóncava.

A P É N D I C E   B

Introdución a TORA

El sistema TORA de optimización es un programa basado en Windows® que tiene por objeto usarse con muchas de las técnicas presentadas en este libro. Una propiedad importante del sistema es que se puede usar para resolver problemas en modos tutorial o automatizado. El modo tutorial tiene bastante utilidad, porque permite concentrarse en los conceptos principales de los algoritmos, al mismo tiempo que se descarga el peso de los tediosos cálculos que suelen caracterizar a los algoritmos de IO (investigación de operaciones).

TORA es totalmente autosuficiente en el sentido que todas las instrucciones necesarias para activar el programa se representan con menúes, botones de comando, cuadros de verificación y cosas por el estilo. No necesita manual del usuario. Sin embargo, en este apéndice se presentará un resumen de las funciones básicas del sistema.

Tora está automatizado para ajustes de presentación en pantalla de 800×600 y 1024×768 pixeles. Se recomienda el segundo ajuste, porque produce una distribución más proporcionada de la pantalla.

B.1 MENÚ PRINCIPAL

La figura B.1 muestra la pantalla del menú principal. Una selección de este menú lleva a una nueva pantalla, para seleccionar el modo de ingreso de datos del problema.

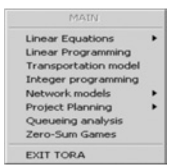


FIGURA B.1

Pantalla de menú principal

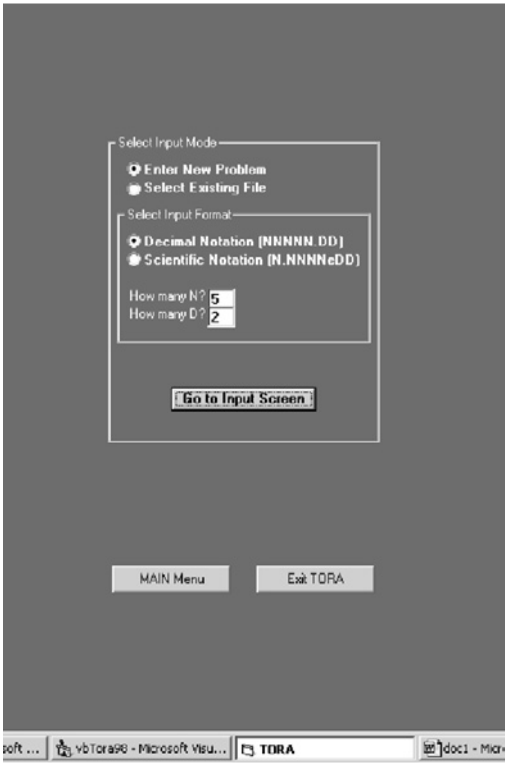
B.2 MODO Y FORMATO DE INGRESO DE DATOS

La pantalla del modo de ingreso, captura o entrada de datos (Figura B.2) hace dos cosas:

1. Permite ingresar un nuevo conjunto de datos para el problema (es lo predeterminado), o leer los datos en un archivo existente que haya sido creado originalmente por TORA.
2. Permite seleccionar el formato (decimal o científico) al igual que controlar el grado deseado de exactitud al capturar los datos.

El formato decimal (es el predeterminado) se representa por el código NNNNN.DD, mientras que el formato científico se representa como .NNNNNeDD. Los valores predeterminados de N y de D son 5 y 2, respectivamente. Esos valores se pueden cambiar a cualquier otro valor (razonable).

FIGURA B.2
Pantalla de modo de ingreso



B.3 PANTALLA DE INGRESO DE DATOS

Al ingresar el tamaño correspondiente del problema (superior izquierda de la pantalla de datos) aparece de inmediato la tabla de datos (Figura B.3). Los elementos de la tabla están diseñados para coincidir con los datos del modelo seleccionado (por ejemplo, programación lineal o modelo de transporte). Independientemente del módulo usado, la tabla de datos se edita en forma muy parecida a una hoja de cálculo.

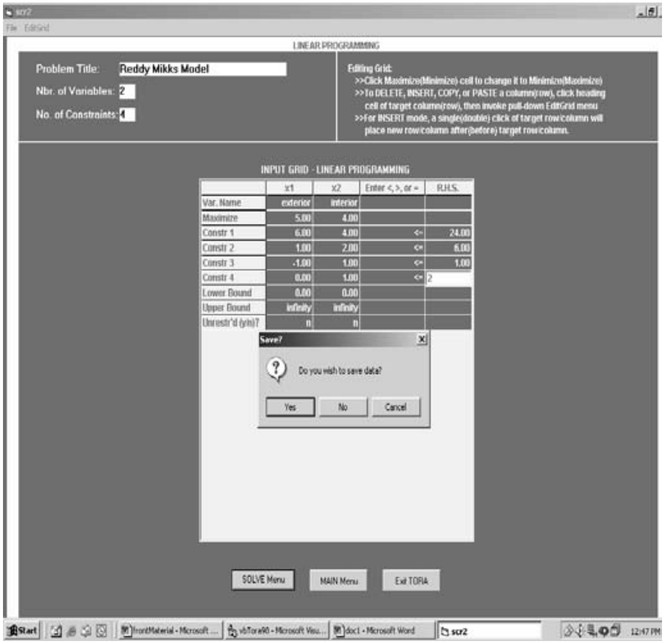


FIGURA B.3

Pantalla de ingreso de datos

El diseño de la tabla permite *insertar* o *eliminar* una columna o un renglón, así como *copiar* y *pegar* el contenido de un renglón o de una columna. Para lograrlo, primero se hace clic en el encabezado de la columna o el renglón que se desea. A continuación se usa el menú EditGrid para lograr el resultado que se desee. El menú usa combinaciones sugerentes de teclas, como CTRL+I, CTRL+D, COTRL+C y CTRL+P, para insertar, eliminar, copiar y pegar. Cualquiera de esas operaciones se puede deshacer con CTRL+U.

Una vez capturados todos los datos, se oprime `Solve Menu` y se siguen las instrucciones para guardar los datos en un archivo, si así se desea.

B.4 MENÚ SOLVE/MODIFY

El menú Solve/Modify (resolver/modificar, figura B.4) presenta opciones para resolver el problema que se desea. Una propiedad importante de TORA es que permite resolver el problema en forma automática, o bien en modo tutorial (guiado por el usuario). Todas esas opciones se generan en forma lógica, usando submenúes.

El elemento Modify (modificar) permite regresar a la pantalla de ingreso de datos, para hacer cambios en los datos originales del problema.

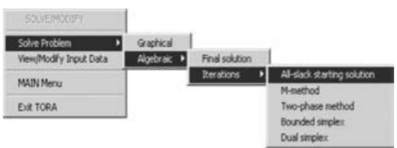


FIGURA B.4

Pantalla Solve/Modify (resolver/modificar)

B.5 FORMATO DE LOS RESULTADOS

La pantalla Output Format (formato de los resultados, figura B.5) controla la exactitud de los resultados. Los detalles del formato de los resultados son iguales a los del formato de los datos de entrada (Sección B.2).

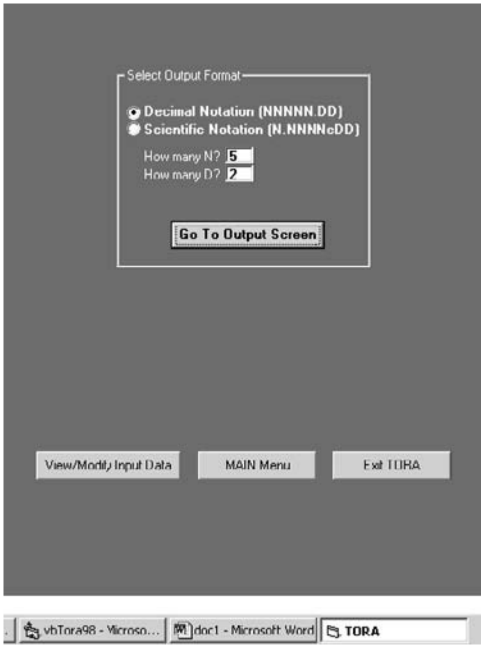


FIGURA B.5
Pantalla de formato de resultados

B.6 PANTALLA DE RESULTADOS

La pantalla de resultados muestra los resultados en formato de texto o gráficamente, dependiendo del tipo de problema que se esté resolviendo (Figuras B.6 y B.7). Se pueden imprimir resultados en texto o en gráficos usando el botón de comando `Write to Printer` (escribir a la impresora).

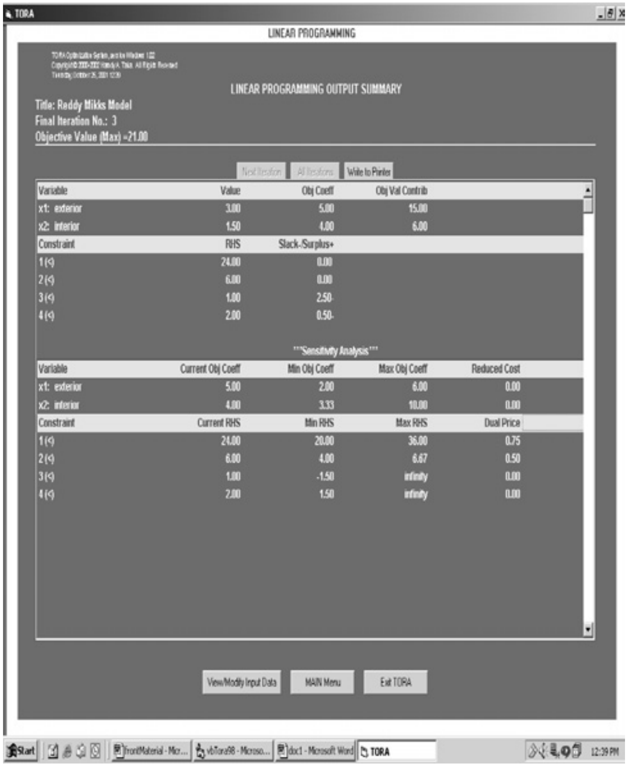


FIGURA B.6
Pantalla de resultados en texto

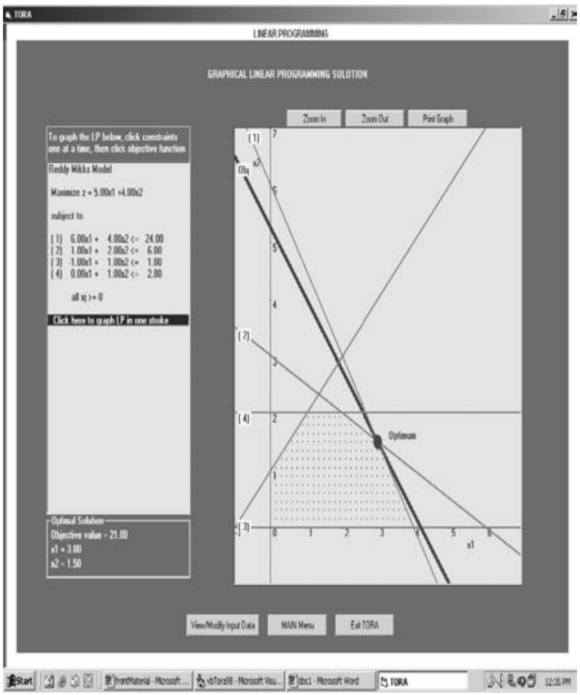


FIGURA B.7
Pantalla de resultados en gráfica

A P É N D I C E C

Tablas estadísticas

TABLA C.1 Función de distribución normal*

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-(\frac{1}{2})t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									
6.0	0.999999999									

Fuente: MILLER, I. y J. FREUND, *Probability and Statistics for Engineers,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1985.

TABLA C.2 Valores de $t_{\alpha,\nu}$ (t de Student)*

ν	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	ν
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
Inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

*Condensado con permiso de Macmillan Publishing Co., Inc., de *Statistical Methods for Research Workers*, 14a. ed., por R. A. Fisher. Copyright © 1970, University of Adelaide.

TABLA C.3 Valores de $\chi^2_{\alpha,\nu}$ (ji cuadrada)*

ν	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	ν
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.056	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.484	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.772	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

*Esta tabla se basa en la tabla 8, de *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, con autorización del fideicomiso *Biometrika*.

A P É N D I C E D

Respuestas parciales de problemas seleccionados

CAPÍTULO 1

Conjunto 1.1a

4. c) 17 minutos.

5. a) Alternativas de Jim: lanzar curva o rápida.
Alternativas de Joe: prepararse para una curva o una rápida.

b) Joe quiere aumentar su promedio de bateo.
Jim quiere reducir el promedio de bateo de Joe.

CAPÍTULO 2

Conjunto 2.1a

1. a) $-x_1 + x_2 \geq 1$.

c) $x_1 - x_2 \leq 0$.

e) $0.5x_1 - 0.5x_2 \geq 0$.

3. a) 4 ton/día.

Conjunto 2.2a

1. (a y e) Véase la figura D.1.

2. (a y d) Véase la figura D.2.

5. Sean

x_1 = horas de juego por día
x_2 = horas de trabajo por día

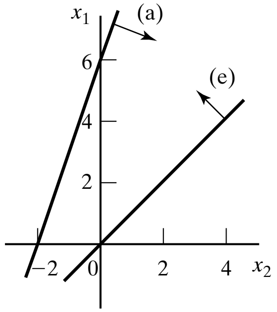


FIGURA D.1

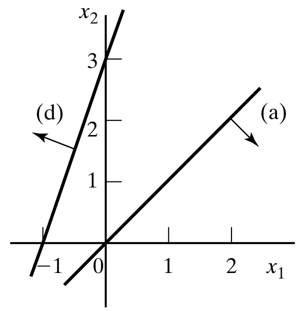


FIGURA D.2

Maximizar $z = 2x_1 + x_2$ sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 10,\ x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq 4,\ x_1,\ x_2 \geq 0$$

Óptimo: $(x_1, x_2) = (4, 6), z = 14$

Conjunto 2.2b

2. Solución óptima: $x_1 = 450$ lb, $x_2 = 350$ lb, $z = \$450$.

5. Sean

x_1 = miles de barriles/día de Irán
x_2 = miles de barriles/día de Dubai

Minimizar $z = x_1 + x_2$ sujeta a

$$-0.6x_1 + 0.4x_2 \leq 0,\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 14$$

$$0.25x_1 + 0.6x_2 \geq 30,\ 0.1x_1 + 0.15x_2 \geq 10$$

$$0.15x_1 + 0.1x_2 \geq 8,\ x_1,\ x_2 \geq 0$$

Óptimo: $x_1 = 55, x_2 = 30, z = 85$

Conjunto 2.3a

1. b) $\frac{-1}{1} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{2}{3}$, $c_1 \neq 0$. Véase la figura D.3.

3. Sean

x_1 = latas de A1 vendidas por día
x_2 = latas de B&K vendidas por día

Maximizar $z = 5x_1 + 7x_2$ sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 500,\ 2x_1 - x_2 \leq 0,\ x_1 \geq 100$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

a) $x_1 = 100,\ x_2 = 400,\ z = \$33.$

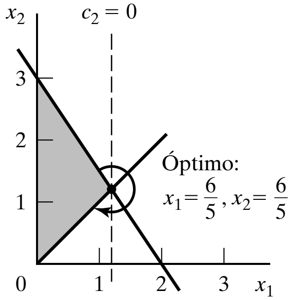


FIGURA D.3

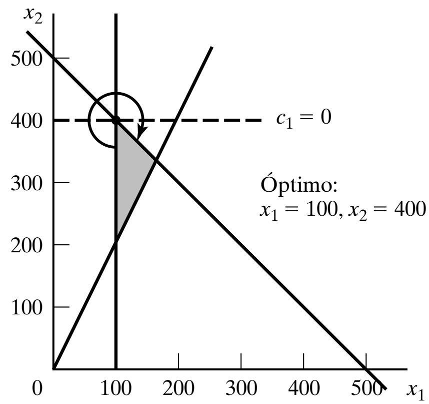


FIGURA D.4

b) Considerar que $x_1 \geq 100$ como $\lim_{\delta \to 0}(x_1 - \delta x_2) \geq 100$. Por consiguiente, $\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{-\delta} \leq \frac{-c_1}{c_2} \leq \frac{1}{1}$, o sea, $-\infty \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 1$. Véase la figura D.4.

7. Sean

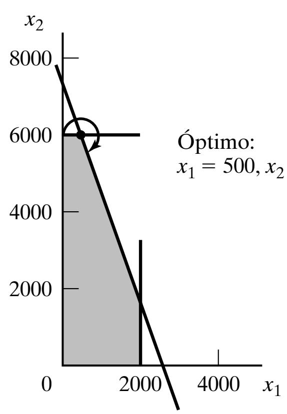
$$x_1 = \text{cajas de jugo por día}$$
$$x_2 = \text{cajas de pasta por día}$$

Maximizar $z = 18x_1 + 9x_2$, sujeta a

$$24x_1 + 8x_2 \leq 60{,}000$$
$$x_1 \leq 2000, \ x_2 \leq 6000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) $x_1 = 500$, $x_2 = 6000$, $z =$ \$63,000.
b) $0 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 3$, $c_2 \neq 0$, véase la figura D.5.

FIGURA D.5



Conjunto 2.3b

1. Sean

$$x_1 = \text{cantidad de sombreros tipo 1 por día}$$
$$x_2 = \text{cantidad de sombreros tipo 2 por día}$$

Maximizar $z = 8x_1 + 5x_2$, sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 400$$
$$x_1 \leq 150,\ x_2 \leq 200$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

a) Véase la figura D.6. $x_1 = 100$, $x_2 = 200$, $z = \$1800$ en el punto B.
b) \$4 por sombrero tipo 2 en el intervalo (200, 500).
c) \$0 de valor por unidad en el intervalo (100, ∞), por consiguiente cambiar a 120 no tiene efecto.
d) \$1 de valor por unidad en el intervalo (100, 400).

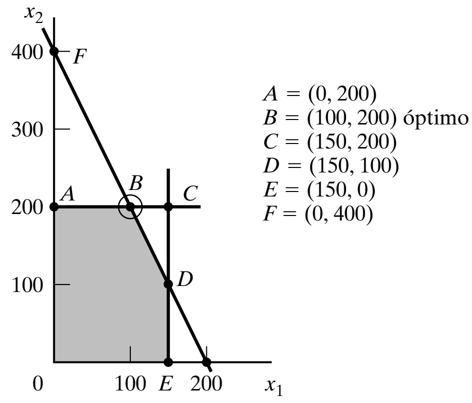


FIGURA D.6

4. Sean

$$x_1 = \text{minutos en radio}$$
$$x_2 = \text{minutos en TV}$$

Maximizar $z = x_1 + 25x_2$, sujeta a

$$15x_1 + 300x_2 \leq 10{,}000$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 400$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

a) $x_1 = 60.61$, $x_2 = 30.3$, $z = 818.18$.
b) 0 por minuto en el intervalo (60.61, ∞).
c) 0.082, valor por \$ presupuesto en el intervalo (0, 66,000).

8. Sean

$$x_1 = \text{unidades de solución } A$$
$$x_2 = \text{unidades de solución } B$$

Maximizar $z = 8x_1 + 10x_2$, sujeta a

$$0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 150,\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \leq 145$$
$$30 \leq x_1 \leq 150,\ 40 \leq x_2 \leq 200$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) $x_1 = 100,\ x_2 = 200,\ z = \$2800$.

b) Valor por unidad de materia prima I = \$16 en el intervalo (115, 154.17)
Valor por unidad de materia prima II = \$0 en el intervalo (140, ∞).

Conjunto 2.4a

1. a) Una lb adicional de alimento cuesta 55 centavos.

b) Costo total = \$495 por día.

c) La solución actual permanece óptima.

3. b) Modelo LINGO:

```
MODEL:
    TITLE Diet model;
SETS:
    Constr: Rhs;
    Var: C, X;
    ConsVar(Constr,Var): Aij;
ENDSETS
    MIN=@SUMVar(j):C(j)*X(j) );    !obj function;
    @FOR(                            !constraints;
        Constr(i):@SUM( Var(j): Aij(i,j)*X(j) )>=Rhs(i)
        );
DATA:
     Constr=MinDemand Protein Fiber;
     Rhs=800 0 0;
     Var=X1 X2;
         C = .3 .9;       !obj func
       Aij = 1.  1.       !constr 1
           -.21 .30       !constr 2
            .03-.01;      !constr 3
ENDDATA
END
```

Conjunto 2.5a

1. a) Escribir las dos primeras restricciones en la forma $x_1 + x_2 + x_3 + (x_4 + x_5) \leq 12$ y $(x_4 + x_5) \geq 4.8$.

b) Nueva z = \$0.936 millones.

4. a) $1150L$ pies^2.

b) (3,0,0), (1,0,0) y (1,0,1) con pérdidas respectivas de 0, 3 y 1, merma por pie de longitud.

c) La cantidad de rollos estándar de 20 pies disminuye en 30.

6. a) Sean

x_1 = toneladas de azúcar morena por semana
x_2 = toneladas de azúcar refinada por semana
x_3 = toneladas de azúcar en polvo por semana
x_4 = toneladas de melaza por semana

Maximizar $z = 150x_1 + 200x_2 + 230x_3 + 35x_4$, sujeta a

$$0.76x_1 + 0.95x_2 + x_3 \leq 912$$
$$x_1 \geq 25,\ x_2 \geq 25,\ x_3 \geq 25,\ 0 \leq x_4 \leq 400$$

Solución óptima: $x_1 = 25$, $x_2 = 25$, $x_3 = 869.25$, $x_4 = 400$, $z = \$222,677.50$.

b) Valor por unidad de jarabe = \$55.94, válido en el intervalo $(187.15, \infty)$.

9. a) Sean

x_i = \$ invertidos en el proyecto i, $i = 1, 2, 3, 4$
y_j = \$ invertidos en el banco, en el año j, $j = 1, 2, 3, 4$

Maximizar $z = y_5$ sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_4 + y_1 \leq 10{,}000$$
$$0.5x_1 + 0.6x_2 - x_3 + 0.4x_4 + 1.065y_1 - y_2 = 0$$
$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 + 0.6x_4 + 1.065y_2 - y_3 = 0$$
$$1.8x_1 + 1.5x_2 + 1.9x_3 + 1.8x_4 + 1.065y_3 - y_4 = 0$$
$$1.2x_1 + 1.3x_2 + 0.8x_3 + 0.95x_4 + 1.065y_4 - y_5 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Solución óptima: $x_1 = 0$, $x_2 = \$10{,}000$, $x_3 = \$6000$, $x_4 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = \$6800$, $y_4 = \$33{,}642$, $z = \$53{,}628.73$ al iniciar el año 5.

b) 5.36%.

c) Rendimiento total reducido en $1000 \times 0.373 = \$3730$.

12. a) Sea

x_j = cantidad de unidades del modelo j, $j = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$ sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000$$
$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000$$
$$x_1 + 0.5x_2 + 0.33x_3 \leq 1500$$
$$2x_1 - 3x_2 = 0$$
$$5x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 \geq 200,\ x_2 \geq 200,\ x_3 \geq 150$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución óptima: $x_1 = 324.32$, $x_2 = 216.22$, $x_3 = 540.54$, $z = \$41,081.08$.

b) No se aconseja, porque precio dual = \$10.27 por lb.

c) No se aconseja, porque precio dual = \$0 por lb.

15. a) Sean

x_{iA} = cantidad invertida en el año i usando el plan A, $i = 1, 2, 3$
x_{iB} = cantidad invertida en el año i usando el plan B, $i = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 3x_{2B} + 1.7x_{3A}$, sujeta a

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 100$$
$$-1.7x_{1A} + x_{2A} + x_{2B} \leq 0$$
$$-3x_{1B} - 1.7x_{2A} + x_{3A} \leq 0$$
$$x_{iA}, x_{iB} \geq 0, \ i = 1, 2, 3$$

Solución óptima: Invertir \$100,000 en el plan A en el año 1 y \$170,000 en el plan B en el año 2. Acumulación = \$510,000.

b) Sí, cada \$ adicional de inversión vale \$5.10 al final de 3 años.

CAPÍTULO 3

Conjunto 3.1a

1. 2 toneladas/día y 1 tonelada/día de las materias primas $M1$ y $M2$.

4. Sean x_{ij} = unidades del producto i producidas en la máquina j, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.
Maximizar $z = 10(x_{11} + x_{12}) + 15(x_{21} + x_{22})$, sujeta a

$$x_{11} + x_{21} - x_{12} - x_{22} + s_1 = 5$$
$$-x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} + s_2 = 5$$
$$x_{11} + x_{21} + s_3 = 200$$
$$x_{12} + x_{22} + s_4 = 250$$
$$x_{ij} \geq 0, \ \text{para toda } i \text{ y } j, \ s_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4$$

Conjunto 3.1b

2. Sea x_j = unidades del producto j, $j = 1, 2, 3$.
Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 15x_4^- - 10x_5^-$, sujeta a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^+ - x_4^- = 80$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^+ - x_5^- = 65$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4^+, x_4^-, x_5^+, x_5^- \geq 0$$

Solución óptima: $x_1 = 0$ unidades, $x_2 = 65$ unidades; todas las demás = 0; $z = \$325$.

Conjunto 3.2a

2. c) $x_1 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{12}{7}, z = \frac{48}{7}$.

e) $(x_1 = 0, x_2 = 3)$ y $(x_1 = 6, x_2 = 0)$.

4. Las soluciones básicas no factibles son:

$$(x_1, x_2) = (\tfrac{26}{3}, -\tfrac{4}{3}), (x_1, x_3) = (8, -2)$$

$$(x_1, x_4) = (6, -4), (x_2, x_3) = (16, -26)$$

$$(x_2, x_4) = (3, -13), (x_3, x_4) = (6, -16)$$

Conjunto 3.3a

3. a) Todos los pares, excepto (A, B) porque los puntos de esquina correspondientes no son adyacentes.

b) i) Legítima. ii) No legítima (C e I no son adyacentes). iii) No legítima (A se repite).

5. a) x_3 entra con valor de 1, $z = 3$.

Conjunto 3.3b

3.

Variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4
Valor	1.5	1	0	0.8
Variable saliente	x_7	x_7	x_8	x_5

6. b) x_2, x_5 y x_6 pueden aumentar el valor de z. Si entra x_2, $\Delta z = +20$. Si entra x_5, $\Delta z = 0$. Si entra x_6, $\Delta z = \infty$.

9. El mejor valor siguiente de $z = 20$.

Conjunto 3.4a

3. a) Minimizar $z = (8M + 4)x_1 + (6M - 1)x_2 - Ms_2 - Ms_3 = 10M$.

b) Minimizar $z = (3M - 4)x_1 + (M - 1)x_2 = 3M$.

6. La tabla de arranque es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	−1	−12	0	0	−8
x_3	1	1	1	0	4
x_4	1	4	0	1	8

Conjunto 3.4b

1. Minimizar siempre la suma de las artificiales, porque representa la cantidad de no factibilidad en el problema.

7. Toda variable no básica que tenga coeficientes objetivo distintos de cero al terminar la fase I no puede volverse positiva en la fase II, porque quiere decir que el valor objetivo óptimo en la fase I será positivo; esto es, conduce a una solución no factible en la fase I.

Conjunto 3.5a

1. a) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.
b) 1 en A, 1 en B, $C_2^3 = 3$ en C y 1 en D.

Conjunto 3.5b

1. Óptimos básicos alternativos: $(0, 0, \frac{10}{3})$, (1,0,3), (0,5,0). Óptimos no básicos alternativos: $(\alpha_2, 5\alpha_3, \frac{10}{3}\alpha_1 + 3\alpha_2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$.

Conjunto 3.5c

2. a) El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x_2.
b) El valor objetivo no está acotado, porque un aumento unitario en x_2 hace aumentar 10 a z.

Conjunto 3.5d

1. Lo más que se puede producir es 275 unidades.

CAPÍTULO 4

Conjunto 4.1a

2. Sean y_1, y_2 y y_3 las variables duales.
Maximizar $w = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$, sujeta a

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 15,\ 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 12$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \text{ no restringida}$$

4. c) Sean y_1 y y_2 las variables duales.
Minimizar $z = 5y_1 + 6y_2$ sujeta a

$$2y_1 + 3y_2 = 1,\ y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1,\ y_2 \text{ no restringida}$$

5. La restricción dual asociada con las variables artificiales es $y_2 \geq -M$, que es igual que si y_2 no está restringida.

Conjunto 4.2a

1. a) $\mathbf{AV}_1$ no está definida.
e) $\mathbf{V}_2\mathbf{A} = (-14 \quad -32)$.

Conjunto 4.2b

2. a) Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conjunto 4.2c

2. Sean y_1 y y_2 las variables duales.
Minimizar $w = 30y_1 + 40y_2$ sujeta a

$$y_1 + y_2 \geq 5,\ 5y_1 - 5y_2 \geq 2,\ 2y_1 - 6y_2 \geq 3$$

$$y_1 \geq -M,\ y_2 \geq 0$$

Solución: $y_1 = 5,\ y_2 = 0,\ w = 150.$

4. a) Sean y_1 y y_2 las variables duales.
Minimizar $w = 3y_1 + 4y_2$ sujeta a

$$y_1 + 2y_2 \geq 1,\ 2y_1 - y_2 \geq 5,\ y_1 \geq 3$$

$$y_2 \text{ sin restricciones}$$

b) Solución: $y_1 = 3,\ y_2 = -1,\ w = 5.$

Conjunto 4.2d

2. a) Factibilidad: $(x_2, x_4) = (3, 15) \Rightarrow$ factible
Optimalidad: Coeficientes objetivo de $(x_1, x_3) = (0, 2) \Rightarrow$ óptimo.

7. a) $b_1 = 30,\ b_2 = 40.$
b) $a = 23,\ b = 5,\ c = -10,\ d = 5,\ e = 0.$

Conjunto 4.2e

2. a) El primal y el dual son no factibles.
b) Las soluciones son factibles, pero no óptimas.

Conjunto 4.3a

2. a) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) = unidades diarias de SC320, SC325, SC340 y SC370
Maximizar $z = 9.4x_1 + 10.8x_2 + 8.75x_3 + 7.8x_4$ sujeta a

$$\begin{aligned} 10.5x_1 + 9.3x_2 + 11.6x_3 + 8.2x_4 &\leq 4800 \\ 20.4x_1 + 24.6x_2 + 17.7x_3 + 26.5x_4 &\leq 9600 \\ 3.2x_1 + 2.5x_2 + 3.6x_3 + 5.5x_4 &\leq 4700 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 &\leq 4500 \\ x_1 \geq 100,\ x_2 \geq 100,\ x_3 \geq 100,\ x_4 &\geq 100 \end{aligned}$$

Solución óptima $x_1 = 100,\ x_2 = 100,\ x_3 = 138.42,\ x_4 = 100,\ z = 4011.16.$

b) Sólo se puede aumentar la capacidad de soldadura, porque tiene un precio dual positivo (=0.4944).

c) Los precios duales son negativos o cero. Por consiguiente, las cotas inferiores representan desventajas.

Conjunto 4.3b

2. El nuevo juguete de camión de bomberos es rentable, porque su costo reducido $= y_1 + 3y_3 - 4 = -2$.

Conjunto 4.4a

1. a) No, porque el punto E es factible, y el símplex dual debe quedar no factible hasta la última iteración, donde se vuelve factible.

4. c) Agregue la restricción artificial $x_1 \leq M$. El problema no tiene solución factible.

Conjunto 4.5a

4. Sea Q el alimento semanal. Solución óptima: caliza = 0.028Q, maíz = 0.649Q y soya = 0.323Q. Costo = 0.81221Q.

Conjunto 4.5b

1. a) $-20 \leq D_2 \leq 400,\ D_3 \geq -20$.

5. a) Escaso: el recurso de resistor y capacitor; abundante: el recurso de chips.

b) El valor por unidad de resistor, capacitor y chips es $1.25, $0.25 y $0.

g) Aumento en la utilidad = $250. Costo adicional = $200. Utilidad neta = $50.

8. b) Solución $x_1 = x_2 = 2 + \frac{\Delta}{3}$ es factible para toda $\Delta > 0$. Para $0 < \Delta < 3$, $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} < 1 \Rightarrow$ se confirma la factibilidad. Para $3 \leq \Delta \leq 6$, $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} \geq 1 \Rightarrow$ no se confirma la factibilidad. Para $\Delta > 6$, el cambio cae fuera de los intervalos de D_1 y D_2.

Conjunto 4.5c

1. a) La restricción adicional, $4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 570$ es redundante.

Conjunto 4.5d

2. a) La solución actual permanece óptima.

c) Nueva solución: $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ z = 14$.

Conjunto 4.5e

2. b) El óptimo queda igual.

d) Cambios óptimos: $x_1 = 10,\ x_2 = 102.5,\ x_3 = 215,\ z = 665$.

6. b) Utilidad unitaria mínima para el producto 1 = $6.

c) Nueva solución: $x_1 = 0,\ x_2 = 165,\ x_3 = 10,\ z = 4105$.

9. a) $1.25 - 0.25d_1 + 0.5d_2 \geq 0,\ 0.25 + 0.75d_1 - 0.5d_2 \geq 0$.

Conjunto 4.5f

1. 42.86%.

3. a) Los camiones de bomberos no son rentables.

CAPÍTULO 5

Conjunto 5.1a

4. Asignar un costo muy alto M a la ruta de Detroit hacia el destino ficticio.

6. a y b) Use $M = 10{,}000$. La solución se indica en negritas. Costo total = \$49,710.

	1	2	3	Oferta
Planta 1	600	700	400 **25**	**25**
Planta 2	320 **23**	300 **17**	350	**40**
Planta 3	500	480 **25**	450 **5**	**30**
Exceso Planta 4	1000 **13**	1000	M	**13**
Demanda	**36**	**42**	**30**	

c) Exceso de costo de ciudad 1 = \$13,000.

9. La solución (en millones de galones) se indica en negritas. Al área 2 le faltarán 2 millones de galones. Costo total = \$304,000.

	A1	A2	A3	Oferta
Refinería 1	12 **4**	18 **2**	M	**6**
Refinería 2	30	10 **4**	8 **1**	**5**
Refinería 3	20	25	12 **6**	**6**
Ficticia	M	50 **2**	50	**2**
Demanda	**4**	**8**	**7**	

Conjunto 5.2a

2. Costo total = \$804.

Día	Nuevo	Servicio de afilado: Nocturno	2 días	3 días	Desechar
Lunes	24	0	6	18	0
Martes	12	12	0	0	0
Miércoles	2	14	0	0	0
Jueves	0	0	20	0	0
Viernes	0	14	0	0	4
Sábado	0	2	0	0	12
Domingo	0	0	0	0	22

5. Costo total = \$190,040. El problema tiene óptimos alternativos.

Periodo	Capacidad	Cantidad producida	Entrega
1	500	500	400 para (el periodo) 1 y 100 para 2
2	600	600	200 para 2, 220 para 3 y 180 para 4
3	200	200	200 para 3
4	300	200	200 para 4

Conjunto 5.3a

1. a) Noroeste: costo = \$42. Costo mínimo: costo = \$37. Vogel: costo = \$37.

Conjunto 5.3b

5. a) Costo = \$1475.
b) $c_{12} \geq 3$, $c_{13} \geq 8$, $c_{23} \geq 13$, $c_{31} \geq 7$.

Conjunto 5.4a

5. Usar el código (ciudad, fecha) para definir los renglones y las columnas del problema de asignación. Ejemplo: la asignación (D, 3)-(A, 7) quiere decir salir de Dallas el 3 de junio y regresar de Atlanta el 7 de junio, con un costo de \$400. La solución se indica en negritas. Costo = \$1180. El problema tiene óptimos alternativos.

	(A, 7)	(A, 12)	(A, 21)	(A, 28)
(D, 3)	400	300	300	**280**
(D, 10)	**300**	400	300	300
(D, 17)	300	**300**	400	300
(D, 25)	300	300	**300**	400

6. Asignación óptima: I-*d*, II-*c*, III-*a*, IV-*b*.

Conjunto 5.5a

4. Costo total = \$1550. La solución óptima se resume abajo. El problema tiene óptimos alternativos.

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Fábrica 1	50	0	0
Fábrica 2	50	200	50

CAPÍTULO 6

Conjunto 6.1a

1. (i) a) 1-3-4-2. b) 1-5-4-3-1. c) 1-3-4-5-1. d) Véase la figura D.7. e) Véase la figura D.7.
4. 1 y 8 deben aparecer en el centro. El problema tiene más de una solución. Véase la figura D.8.

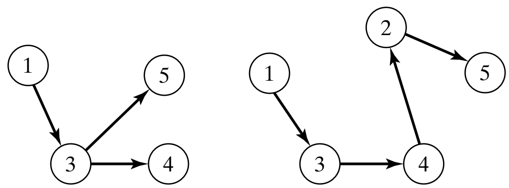


FIGURA D.7 Árbol Árbol de extensión

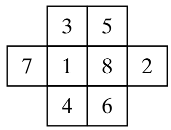


FIGURA D.8

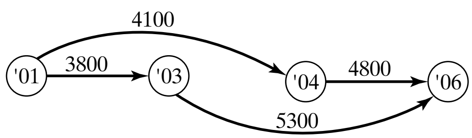
Conjunto 6.2a

2. a) 1-2-5-6-4-3 o 3-1-2-5-6-4. Longitud total = 14 millas.
5. Alta presión: 1-2-3-4-6. Baja presión: 1-5-7 y 5-9-8. Longitud total = 53 millas.

Conjunto 6.3a

1. Comprar automóvil nuevo en 2001 y 2004. Costo total = \$8900. Véase la figura D.9.
5. Para el arco (i, v_i) - $(i + 1, v_{i+1})$, se define $p(q)$ = valor (unidades del artículo i). Solución: seleccione los artículos 1 y 2. Valor total = \$80. Véase la figura D.10.

FIGURA D.9



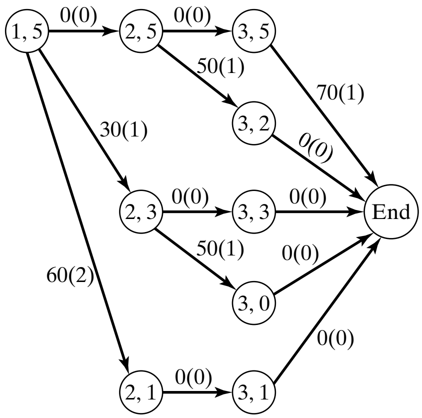


FIGURA D.10

Conjunto 6.3b

1. c) Elimine todos los nodos menos 4, 5, 6, 7 y 8. Distancia más corta = 8, asociada con las rutas 4-5-6-8 y 4-6-8.

Conjunto 6.3c

1. a) 5-4-2-1, distancia = 12.

5. Véase la formulación en la figura D.11. Cada arco tiene longitud unitaria. Las flechas indican rutas de un sentido. Solución de ejemplo: Bob a Joe: Bob-Kay-Rae-Kim-Joe. Cantidad máxima de contactos = 4.

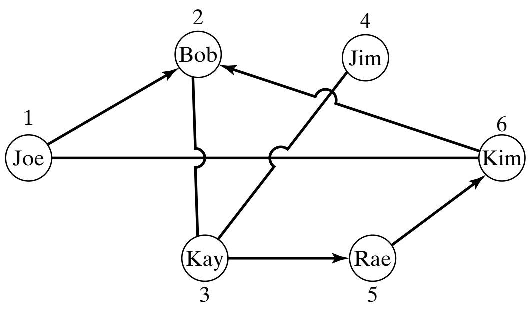


FIGURA A.11

Conjunto 6.3d

1. a) Formulación 1: el lado derecho de las ecuaciones 1 y 5 son –1 y 1; todas las demás = 0. Formulación 2: la función objetivo es minimizar $y_5 - y_1$. Solución óptima: 1-3-4-5, distancia = 90.

Conjunto 6.4a

1. Corte 1: 1-2, 1-4, 3-4, 3-5; capacidad = 60.

Conjunto 6.4b

1. a) Capacidades sobrantes: arco (2-3) = 40, arco (2-5) = 10, arco (4-3) = 5.
b) Nodo 2: 20 unidades; nodo 3: 30 unidades; nodo 4: 20 unidades.
c) No, porque no hay capacidad que sobre en el nodo 1.

7. La cantidad máxima de tareas es 4: Rif-3, Mai-1, Ben-2, Kim-5. Ken no tiene tarea.

Conjunto 6.5a

1. Véase la figura D.12.

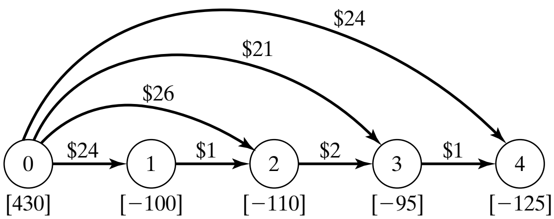


FIGURA D.12

Conjunto 6.5b

1. Caso 1: La cota inferior no sale por sustitución.

	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{32}	x_{34}	
Minimizar z	1	5	3	4	6	
Nodo 1	1	1				= 50
Nodo 2	−1		1	−1		= −40
Nodo 3		−1		1	1	= 20
Nodo 4			−1		−1	= −30
Cota inferior	0	30	10	10	0	
Cota superior	∞	40	∞	∞	∞	

Caso 2: La cota inferior sale por sustitución.

	x_{12}	x'_{13}	x'_{24}	x'_{32}	x_{34}	
Minimizar z	1	5	3	4	6	
Nodo 1	1	1				= 20
Nodo 2	−1		1	−1		= −40
Nodo 3		−1		1	1	= 40
Nodo 4			−1		−1	= −20
Cota superior	∞	10	∞	∞	∞	

Conjunto 6.5c

1. Costo óptimo = \$9895. Producir 210 unidades en el periodo 1 y 220 unidades en el periodo 3.
5. Solución óptima: Millas totales de alumnos = 24,300. El problema tiene óptimos alternativos.

	Cantidad de alumnos	
	Escuela 1	*Escuela 2*
Área de minorías 1	0	500
Área de minorías 2	450	0
Área de minorías 3	0	300
Área de no minorías 1	1000	0
Área de no minorías 2	0	1000

Conjunto 6.6a

3. Véase la figura D.13.

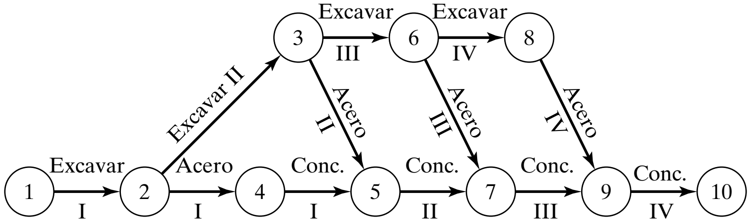


FIGURA D.13

Conjunto 6.6b

1. Ruta crítica: 1-3-4-5-6-7. Duración del proyecto = 19.
3. Duración del proyecto = 38 días.

Conjunto 6.6c

3. a) Demora máxima = 10.
5. a) Ruta crítica: 1-3-6, duración = 45 días.
   b) Actividades con bandera roja: A, D y E.
   c) El inicio de C, D y G se demorará 5 días. E no se afectará.
   d) Equipo mínimo = 2 unidades.

CAPÍTULO 7

Conjunto 7.1a

2. Los puntos (1, 0) y (0, 2) están en Q, pero $\lambda(1,0) + (1 - \lambda)(0, 2) = (\lambda, 2 - 2\lambda)$ no está en Q para $0 < \lambda < 1$.

Conjunto 7.1b

2. b) Solución única, véase la figura D.14.
d) Infinidad de soluciones.
f) No hay solución.

3. a) Base, porque det **B** = –4.
d) No es base, porque una base debe incluir exactamente tres vectores independientes.

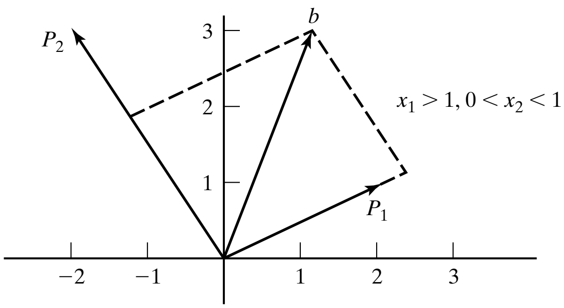


FIGURA D.14

Conjunto 7.1c

1. $\mathbf{X}_B = (x_3, x_4)^T = (2, 1.5)^T$, que es factible.

4. Óptima $z = 34$.
Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$ sujeta a

$$x_1 \leq 4,\ x_2 \leq 6,\ x_1 + x_2 \leq 8,\ x_1, x_2 \geq 0$$

Conjunto 7.2a

1. a) $\mathbf{P}_1$ debe salir.
b) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$ es una base factible.

2. Para el vector básico $\mathbf{X}_B$:

$$\text{Para } \mathbf{X}_B,\ \{z_j - c_j\} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}_B = \mathbf{C}_B\mathbf{I} - \mathbf{C}_B = \mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B = \mathbf{0}$$

7. La cantidad de puntos extremos adyacentes es $n - m$, suponiendo no degeneración.

10. En caso de degeneración, la cantidad de puntos extremos es menor que la cantidad de soluciones básicas; de lo contrario deben ser iguales.

11. a) nueva $x_j = \frac{1}{\alpha}$ anterior x_j.
b) nueva $x_j = \frac{\beta}{\alpha}$ anterior x_j.

Conjunto 7.2b

2. b) $(x_1, x_2, x_3) = (1.5, 2, 0),\ z = 5$.

Conjunto 7.3a

2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, 0.75, 1, 0, 1)$, $z = 22$.

Conjunto 7.4a

1. c) Agregar la restricción artificial $x_2 \le M$. Entonces,

$$(x_1, x_2) = \alpha_1(0, 0) + \alpha_2(10, 0) + \alpha_3(20, 10) + \alpha_4(20, M) + \alpha_5(0, M)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1, \alpha_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, 5$$

2. Subproblema 1: $(x_1, x_2) = \alpha_1(0, 0) + \alpha_2(\frac{12}{5}, 0) + \alpha_3(0, 12)$
Subproblema 2: $(x_3, x_4) = \beta_1(5, 0) + \beta_2(50, 0) + \beta_3(0, 10) + \beta_4(0, 5)$
Solución óptima: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 12$

$$\beta_1 = 0.4889, \beta_2 = 0.5111, \beta_3 = \beta_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 28, x_5 = 0$$

6. Como el problema original es de minimización, se debe maximizar cada subproblema. Solución óptima: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 0, 20)$, $z = -\frac{245}{3}$

Conjunto 7.5a

2. Maximizar $w = \mathbf{Yb}$ sujeta a $\mathbf{YA} \le \mathbf{C}$, $\mathbf{Y} \ge \mathbf{0}$.

Conjunto 7.5b

5. Método 1: Dado $\mathbf{X}_B = (2, 6, 2)^T$, entonces $(b_1, b_2, b_3) = (4, 6, 8) \Rightarrow$ valor objetivo dual = 34.
Método 2: Dado $\mathbf{Y} = (0, 3, 2)^T$, entonces $(c_1, c_2) = (2, 5) \Rightarrow$ valor objetivo primal = 34

7. Minimizar $w = \mathbf{Yb}$ sujeta a $\mathbf{YA} = \mathbf{C}$, $\mathbf{Y}$ sin restricción.

Conjunto 7.6a

1. $-\frac{2}{7} \le t \le 1$.

2. a)

Solución básica	Intervalo aplicable de t
$(x_2, x_3, x_6) = (5, 30, 10)$	$0 \le t \le \frac{1}{3}$
$(x_2, x_3, x_1) = (\frac{25}{4}, \frac{90}{4}, 5)$	$\frac{1}{3} \le t \le \frac{5}{12}$
$(x_2, x_4, x_1) = (\frac{5}{2}, 15, 20)$	$\frac{5}{12} \le t \le \infty$

5. $\{z_j - c_j\}_{j=1, 4, 5} = (4 - \frac{3t}{2} - \frac{3t^2}{2}, 1 - t^2, 2 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2})$. La base permanece óptima en $0 \le t \le 1$.

Conjunto 7.6b

1. a) $t_1 = 10$, $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$.

2. En $t = 0$, $(x_1, x_2, x_6) = (0.4, 1.8, 1)$. Permanece básica en $0 \le t \le 1.5$. No hay solución factible para $t > 1.5$.

CAPÍTULO 8

Conjunto 8.1a

1. G_5: Minimizar s_5^-, $55x_p + 3.5x_f + 5.5x_s - 0.0675x_g + s_5^+ - s_5^- = 0$
3. Sea x_1 = Ctd. de primer ingreso en el estado, x_2 = Ctd. de primer ingreso fuera del estado, x_3 = Ctd. de primer ingreso internacionales

$$G_i\text{: Minimizar } s_i^+,\ i = 1, 2, \dots, 5, \text{ sujeta a } x_1 + x_2 + x_3 + s_1^+ - s_1^- = 1200,$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + s_2^+ - s_2^- = 0,\ -0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.9x_3 + s_3^+ - s_3^- = 0,$$
$$0.125x_1 - 0.05x_2 - 0.556x_3 + s_4^+ - s_4^- = 0,\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.2x_3 + s_5^+ - s_5^- = 0$$

Todas las variables son no negativas

5. Sea x_j = Ctd. de corridas de producción en el turno j, $j = 1, 2, 3$.

$$\text{Minimizar } z = s_1^+ + s_1^-,\ \text{ sujeta a } -100x_1 + 40x_2 - 80x_3 + s_1^+ - s_1^- = 0,$$
$$4 \le x_1 \le 5,\ 10 \le x_2 \le 20,\ 3 \le x_3 \le 5$$

Conjunto 8.2a

1. Función objetivo: Minimizar $z = s_1^+ + s_2^+ + s_3^+ + s_4^- + s_5^-$
   Solución: $x_p = 0.0201$, $x_f = 0.0457$, $x_s = 0.0582$, $x_g = 2$ cents., $s_5^- = 1.45$
   El impuesto de la gasolina queda por debajo de la meta en $1.45 millones.
4. x_1 = lb de caliza/día, x_2 = lb de maíz/día, x_3 = lb de soya/día.
   Función objetivo: Minimizar $z = s_1^+ + s_2^- + s_3^+ + s_4^+ + s_5^-$
   Solución: $x_1 = 166.08$ lb, $x_2 = 2778.56$ lb, $x_3 = 3055.36$ lb, $z = 0$.
   Se satisfacen todas las metas.
7. x_j = Ctd. de unidades del producto j, $j = 1, 2$.
   Asignar un peso relativamente alto a las restricciones de cuota.
   Función objetivo: Minimizar $z = 100s_1^+ + 100s_2^+ + s_3^- + s_4^-$
   Solución: $x_1 = 80$, $x_2 = 60$, $s_3^- = 100$ minutos, $s_4^- = 120$ minutos.
   Se puede cumplir con la cuota de producción con 100 minutos de tiempo extra para la máquina 1 y 120 minutos de tiempo extra para la máquina 2.

Conjunto 8.2b

2. Solución de G_1: $x_p = 0.0204$, $x_f = 0.0457$, $x_s = 0.0582$, $x_g = 2$, $s_5^- = 1.45$; todas las demás = 0. Se satisfacen las metas G_1, G_2, G_3 y G_4. No se satisface G_5.
   Problema G_5: Igual que G_1 más $s_1^+ = 0$, $s_2^+ = 0$, $s_3^+ = 0$, $s_4^- = 0$.
   Solución: Igual que G_1, con $s_5^- = 1.45$. Esto quiere decir que no se puede satisfacer G_5.

CAPÍTULO 9

Conjunto 9.1a

3. x_{ij} = Ctd. de botellas del tipo i asignado al individuo j, donde $i = 1$ (llena), 2 (a medias), 3 (vacía).

Restricciones:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7,\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 7,\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 7$$
$$x_{11} + 0.5x_{21} = 3.5,\ x_{12} + 0.5x_{22} = 3.5,\ x_{13} + 0.5x_{23} = 3.5$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7,\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7,\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ y entera para toda } i \text{ y } j.$$

Solución: Usar una función objetivo ficticia.

	Ctd. de botellas asignadas al individuo		
Estado	*1*	*2*	*3*
Llena	1	3	3
A medias	5	1	1
Vacía	1	3	3

6. y = suma original de dinero, x_j = cantidad tomada en la noche j, $j = 1, 2, 3$. x_4 = Cantidad que el primer oficial da a cada marinero.

Minimizar $z = y$ sujeta a $3x_1 - y = 2$, $x_1 + 3x_2 - y = 2$, $x_1 + x_2 + 3x_3 - y = 2$, $y - x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1$. Todas las variables son enteros no negativos.

Solución: $y = 79 + 81n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

8. Lado 1: 5, 6 y 8 (27 minutos). Lado 2: 1, 2, 3, 4 y 7 (28 minutos). El problema tiene óptimos alternativos.

Conjunto 9.1b

1. Sea x_j = Ctd. de artículos producidos en la máquina j, $j = 1, 2, 3$. $y_j = 1$ si se usa la máquina j, y 0 en caso contrario. Minimizar $z = 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 300y_1 + 100y_2 + 200y_3$ sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2000,\ x_1 - 600y_1 \leq 0,\ x_2 - 800y_2 \leq 0,\ x_3 - 1200y_3 \leq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 500 \text{ y entera},\ y_1, y_2, y_3 = (0, 1).$$

Solución: $x_1 = 600,\ x_2 = 500,\ x_3 = 900,\ z = \$11{,}300$.

2. Solución: Se asigna el sitio 1 a los objetivos 1 y 2, y el sitio 2 a los objetivos 3 y 4. $z = 18$.

Conjunto 9.1c

1. Sea $x_j = 1$ si se selecciona la ruta 1, y 0 en caso contrario; $j = 1, 2, ..., 6$.
Minimizar $z = 80x_1 + 50x_2 + 70x_3 + 52x_4 + 60x_5 + 44x_6$ sujeta a

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1,\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1,\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_5 \geq 1,\ x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1,\ x_j = (0, 1),\ \text{para toda } j.$$

Solución: $x_5 = x_6 = 1$. Seleccionar las rutas (1, 4, 2) y (1, 3, 5), $z = 104$. Se debe saltar al cliente 1 en una de las dos rutas.

2. Solución: El comité se forma con los individuos *a, d* y *f*. El problema tiene óptimos alternativos.

Conjunto 9.1d

1. a) Sea x_{ij} = cantidad entera asignada al cuadrado (i, j).
Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 15,\ i = 1, 2, 3,\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 15,\ j = 1, 2, 3$$
$$x_{11} + x_{22} + x_{33} = 15,\ x_{31} + x_{22} + x_{13} = 15,$$
$$(x_{11} \geq x_{12} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{12} - 1),\ (x_{11} \geq x_{13} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{13} - 1),$$
$$(x_{12} \geq x_{13} + 1 \text{ o } x_{12} \leq x_{13} - 1),\ (x_{11} \geq x_{21} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{21} - 1),$$
$$(x_{11} \geq x_{31} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{31} - 1),\ (x_{21} \geq x_{31} + 1 \text{ o } x_{21} \leq x_{31} - 1),$$
$$x_{ij} = 1, 2, \ldots, 9 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Solución: el problema tiene más de dos soluciones alternativas.

9	1	5
1	5	9
5	9	1

o bien

6	4	5
4	5	6
5	6	4

3. Solución: producir 26 unidades del producto 1; 3 del producto 2 y nada del producto 3, usando el lugar 2.

Conjunto 9.2a[1]

2. a) $z = 23,\ x_1 = 3,\ x_2 = 2$.
e) $z = 37,\ x_1 = 6,\ x_2 = 1$.

3. a) $z = 7.25,\ x_1 = 1.75,\ x_2 = 1$.
e) $z = 37,\ (x_1 = 4.6,\ x_2 = 2)$ o $(x_1 = 6,\ x_2 = 1)$.

Conjunto 9.2b

1. a) 9 subproblemas.
b) 25,739 subproblemas.

[1]Use el módulo de programación entera de TORA para generar el árbol B&B (de rama y cota).

3. Programación lineal entera 0-1 equivalente:

$$\text{Maximizar } z = 18y_{11} + 36y_{12} + 14y_{21} + 28y_{22} + 8y_{31} + 16y_{32} + 32y_{33}$$

$$\text{sujeta a } 15y_{11} + 30y_{12} + 12y_{21} + 24y_{22} + 7y_{31} + 14y_{32} + 28y_{33} \leq 43$$

Todas las variables son binarias.

Solución: $z = 50$, $y_{12} = 1$, $y_{21} = 1$; todas las demás $= 0$. En forma equivalente, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Conjunto 9.2c

1. a) Corte legítimo, porque pasa por un punto entero y no elimina algún punto entero factible. El lector puede comprobar este resultado graficando el corte en el espacio de soluciones del problema lineal.

6. b) Solución entera óptima: $(x_1, x_2, x_3) = (5, 2, 2)$, $z = 23$.
Solución redondeada: $(x_1, x_2, x_3) = (5, 3, 3)$, que no es factible.

Conjunto 9.3a

1. La tabla siguiente muestra la cantidad de empleados diferentes que entran y salen de la oficina del gerente cuando se pasa del proyecto *i* al proyecto *j*. El objetivo es encontrar un "recorrido" por todos los proyectos que minimice el tráfico total.

		Proyecto *j*					
		1	2	3	4	5	6
Proyecto *i*	1	–	4	4	6	6	5
	2	4	–	6	4	6	3
	3	4	6	–	4	8	7
	4	6	4	4	–	6	5
	5	6	6	8	6	–	5
	6	5	3	7	5	5	–

CAPÍTULO 10

Conjunto 10.1a

1. Solución: distancia más corta = 21 millas. Ruta: 1-3-5-7.

Conjunto 10.2a

3. Solución: distancia más corta = 17. Ruta: 1-2-3-5-7.

Conjunto 10.3a

2. a) Solución: valor = 120. $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 3)$ o $(0, 2, 2)$ o $(0, 4, 1)$ o $(0, 6, 0)$.

5. Solución: puntos totales = 250. Seleccionar 2 cursos de I, 3 de II, 4 de III y 1 de IV.

7. Sea $x_j = 1$ si se acepta la solicitud j y 0 en caso contrario. El modelo equivalente de la mochila es

$$\text{Maximizar } z = 78x_1 + 64x_2 + 68x_3 + 62x_4 + 85x_5 \text{ sujeta a}$$
$$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 \leq 23,\ x_j = (0, 1),\ j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Solución: aceptar todas las solicitudes excepto la primera. Valor = 279.

Conjunto 10.3b

1. a) Solución: contratar 6 en la semana 1, despedir 1 en la semana 2, despedir 2 en la semana 3, contratar 3 en la semana 4 y contratar 2 para la semana 5.

3. Solución: rentar 7 automóviles en la semana 1, regresar 3 en la semana 2, rentar 4 en la semana 3 y no hacer nada para la semana 4.

Conjunto 10.3c

2. Decisiones para los 4 años que siguen: conservar, conservar, reemplazar, conservar. Costo total = \$458.

Conjunto 10.3d

3. a) Sean x_i y y_j la cantidad de ovejas que se guardan y se venden al final del periodo i, y defínase a $z_i = x_i + y_i$.

$$f_n(z_n) = \max_{y_n = z_n}\{p_n y_n\}$$
$$f_i(z_i) = \max_{y_i \leq z_i}\{p_i y_i + f_{i+1}(2z_i - 2y_i)\},\ i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

CAPÍTULO 11

Conjunto 11.2a

2. a) Costo semanal total = \$51.50.

b) Pedir 239.05 lb siempre que baje a cero el nivel de inventario. Costo semanal total = \$50.20.

4. a) Escoger la política 1, porque su costo diario es \$2.17, en contra de \$2.50 para la política 2.

b) Política óptima: pedir 100 unidades cuando la existencia baje a 10 unidades. Costo diario = \$2.00.

Conjunto 11.2b.

2. Política óptima: pedir 500 unidades cuando el nivel baje a 130 unidades. Costo diario = \$258.50.

3. Política óptima: pedir 150 unidades cuando la existencia baje a 0. Costo diario = \$479.17.

Conjunto 11.2c

1. Solución con Excel: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (4.41, 6.87, 4.12, 7.2, 5.8)$.

4. $L(y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda) = \sum_{i=1}^{4} \frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{365 D_i}{y_i} - 150\right)$

$$\text{Fórmula: } y_i = \sqrt{\frac{2(K_i - 365\lambda)D_i}{h_i}}$$

Solución con Excel: $(y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda) = (155.3, 118.82, 74.36, 90.10, -0.0564)$.

Conjunto 11.3a

1. a) Se requieren 500 unidades al iniciar los periodos 1, 4, 7 y 10.

Conjunto 11.3b

3. Producir 173 unidades en el periodo 1, 180 en el periodo 2, 240 el el periodo 3, 110 en el periodo 4 y 203 en el periodo 5.

Conjunto 11.3c

1. a) No, porque no se debe conservar inútilmente el inventario al final del horizonte.

b) (i) $0 \le z_1 \le 5,\ 1 \le z_2 \le 5,\ 0 \le z_3 \le 4;\ x_1 = 4,\ 1 \le x_2 \le 6,\ 0 \le x_3 \le 4$.

2. a) $z_1 = 7,\ z_2 = 0,\ z_3 = 6,\ z_4 = 0$. Costo total $=$ \$33.

Conjunto 11.3d

1. Usar el inventario inicial para satisfacer la demanda en el periodo 1, y 4 unidades en el periodo 2, reduciendo así la demanda para los cuatro periodos a 0, 22, 90 y 67, respectivamente.

Solución óptima: pedir 112 unidades en el periodo 2 y 67 unidades en el periodo 4. Costo total = \$632.

Conjunto 11.3e

1. Solución: producir 210 unidades en el periodo 1, 255 en el periodo 4, 210 en el periodo 7 y 165 en el periodo 10. Costo total = \$1930.

CAPÍTULO 12

Conjunto 12.1a

1. a) 0.15 y 0.25, respectivamente.

b) 0.571

c) 0.821.

2. $n \ge 23$.

3. $n > 253$.

Conjunto 12.1b

4. Sea p = probabilidad de que gane Liz. Entonces, la probabilidad de que gane John es $3p$, que es igual a la probabilidad de que gane Jim. La probabilidad de que gane Ann es $6p$. Así, $p + 3p + 3p + 3p + 6p = 1$.

Conjunto 12.2c

3. a) $\frac{3}{8}$.

b) $\frac{3}{5}$.

7. 0.9545.

Conjunto 12.2a

2. $K = 20$.

3. $P\{\text{Demanda} \geq 1100\} = 0.3$.

Conjunto 12.3a

3. a) $P\{x \geq 50\} = \frac{2}{3}$.

b) Ctd. esperada de ejemplares no vendidos = 2.67.

Conjunto 12.3b

1. Media = 3.667, varianza = 1.556.

Conjunto 12.3c

1. a) $P\{x_1 = 1, 2, 3\} = P\{x_2 = 1, 2, 3\} = (0.4, 0.2, 0.4)$.

b) No.

Conjunto 12.4a

1. $(\frac{1}{2})^{10}$.

3. 0.0547.

Conjunto 12.4b

1. 0.8646.

3. a) $P_0 \cong 0$.

b) $P_{n\geq 3} \cong 1$.

Conjunto 12.4c

1. $\lambda = 12$ llegadas/min. $P(t \leq 5) = 0.63$.

Conjunto 12.4d

2. 0.0014.

CAPÍTULO 14

Conjunto 14.1a

1. Los pesos de A, B y C son 0.44214, 0.25184 y 0.30602, respectivamente.

Conjunto 14.1b

2. $(w_S, w_J, w_M) = (0.331, 0.292, 0.377)$. Seleccionar a Maisa.
4. $(w_p, w_H) = (0.502, 0.498)$. Seleccionar a P.

Conjunto 14.2a

2. a) Vea la figura D.15.
b) Valor esperado (maíz) = –$8250, valor esperado (soya) = $250. Seleccionar soya.
6. a) Véase la figura D.16.
b) Valor esperado (juego) = –$0.025. No jugar.

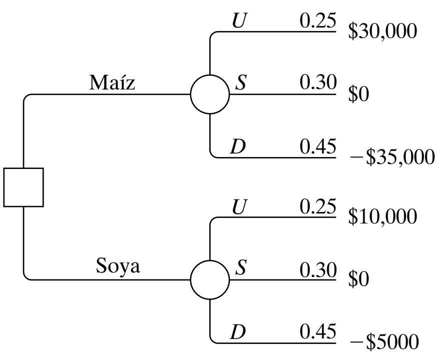


FIGURA D.15

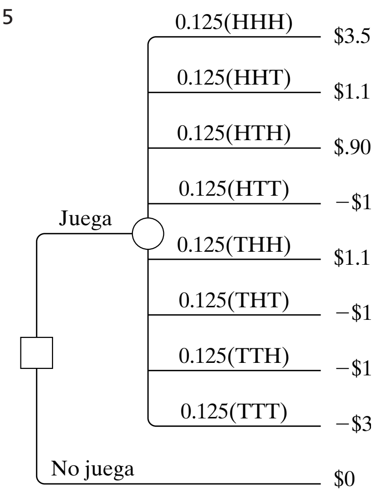


FIGURA D.16

Conjunto 14.2b

2. Sea z el evento de tener un artículo defectuoso en una muestra de tamaño 5.
Respuesta: $P\{A|z\} = 0.6097,\ P\{B|z\} = 0.3903$.
4. a) Ingreso esperado si publica = $196,000.
Ingreso esperado si recurre al editor = $163,000.
b) Si la encuesta pronostica éxito, publique por sí mismo; en caso contrario recurra a un editor.
7. Mandar el lote a B si los dos artículos son malos; en caso contrario, mandar el lote a A.

Conjunto 14.2c

1. a) Valor esperado = \$5, por consiguiente no hay ventaja.
b) Para $0 \leq x > 10$, $U(x) = 0$ y para $x = 10$, $U(x) = 100$.
c) Jugar.

2. Lotería: $U(x) = 100 - 100p$.

Conjunto 14.3a

1. a) Todos los métodos: estudiar toda la noche (acción a_1).
b) Todos los métodos: seleccionar las acciones a_2 o a_3.

Conjunto 14.4a

1. a) Solución de punto de silla en (2, 3). Valor del juego = 4.

3. a) $2 < v < 4$.

Conjunto 14.4b

1. Cada jugador debe mezclar las estrategias en 50-50. Valor del juego = 0.

2. Matriz de recompensa de Robin:

	100%*A*	50%*A*-50%*B*	100%*B*
A	−100	−50	0
B	0	−30	−100

Estrategia para la policía: mezclar 100% de *A* y 100% de *B* con probabilidades de 0.5 cada una. Estrategia para Robin: mezclar A y B 50-50. Valor del juego = \$50 (multa esperada que paga Robin).

Conjunto 14.4c

1. a) Matriz de recompensa para el equipo de búsqueda:

	AB	AC	AD	BC	BD	CD
AB	1	0	0	0	0	−1
AC	0	1	0	0	−1	0
AD	0	0	1	−1	0	0
BC	0	0	−1	1	0	0
BD	0	−1	0	0	1	0
CD	−1	0	0	0	0	1

Estrategia óptima para ambos equipos: Mezclar AB y CD en 50-50. Valor del juego = 0.

3. a) Matriz de recompensa para el coronel Blotto:

	3-0	2-1	1-2	0-3
2-0	−1	−1	0	0
1-1	0	−1	−1	0
0-2	0	0	−1	−1

Estrategia óptima para Blotto: mezclar (2-0) y (0-2) en 50-50, y el enemigo mezclar (2-1) y (0-3) en 50-50. Valor del juego = –0.5 y Blotto pierde.

CAPÍTULO 15

Conjunto 15.1a

2. Solución: Día 1: aceptar si la oferta es alta. Día 2: aceptar si la oferta es mediana o alta. Día 3: aceptar cualquier oferta.

Conjunto 15.2a

1. Solución: Año 1: invertir \$10,000. Año 2: invertir todo. Año 3: no invertir. Año 4: invertir todo. Acumulación esperada = \$35,520.

4. Asignar 2 bicicletas al centro 1, 3 al centro 2 y 3 al centro 3.

Conjunto 15.3a

3. Solución: Primer juego: apostar \$1. Segundo juego: apostar \$1. Tercer juego: apostar \$1 o nada. Probabilidad máxima = 0.109375.

CAPÍTULO 16

Conjunto 16.1a

1. a) Pedir 100 unidades cuando el nivel de inventario baje a 537 unidades.

Conjunto 16.1b

2. Solución: $y^* = 317.82$ galones, $R^+ = 46.82$ galones.

3. Solución: $y^* = 316.85$ galones, $R^* = 58.73$ galones. En el ejemplo 16.1-2, $y^* = 319.44$ galones, $R^* = 93.61$ galones. La cantidad de pedido permanece más o menos la misma que en el ejemplo 16.1-2, pero R^* es menor porque la función de distribución de probabilidades de la demanda tiene menor varianza.

Conjunto 16.2a

3. $19 \leq p \leq 35.7$

6. 39 abrigos.

Conjunto 16.2b

1. Pedir $8 - x$ si $x < 3.528$; en caso contrario, no pedir.

Conjunto 16.3a

2. Pedir $4.61 - x$ si $x < 4.61$; en caso contrario, no pedir.

CAPÍTULO 17

Conjunto 17.1a

1. a) Eficiencia = 71%.
b) No se pueden satisfacer al mismo tiempo los dos requisitos.

Conjunto 17.2a

1.

Situación	Cliente	Servidor
a	Avión	Pista
b	Pasajero	Taxi

Conjunto 17.3a

1. b) (i) $\lambda = 6$ llegadas por hora; tiempo esperado entre llegadas $= \frac{1}{6}$ horas.
c) (i) $\mu = 5$ servicios por hora; tiempo promedio de servicio = 0.2 horas.

3. a) $f(t) = 20e^{-20t}$, $t > 0$.
b) $P\{t > \frac{15}{60}\} = 0.00674$.

7. La recompensa de Jim es 2 centavos, con probabilidad $P\{t \leq 1\} = 0.4866$, y –2 centavos, con probabilidad $p\{t \geq 1\} = 0.5134$. En 8 horas, Jim paga 17.15 centavos a Ann.

10. a) $P\{t \leq 4 \text{ minutos}\} = 0.4866$.
b) Porcentaje esperado de descuento = 6.208.

Conjunto 17.4a

1. $P_{n \geq 5}(1 \text{ hora}) = 0.55951$.

4. a) $P_2(t = 7) = 0.24167$.

6. a) λ combinada $= \frac{1}{10} + \frac{1}{7}$, $P_2(t = 5) = 0.219$.

Conjunto 17.4b

2. a) $\mu t = 9$, $p_0(t = 3) = 0.00532$.
c) $\mu t = 3$, $p_{n \leq 17}(t = 1) = 0.9502$.

5. $\mu t = 4$, $p_0(4) = 0.37116$.

8. a) Tamaño promedio del pedido = 25 – 7.11 = 17.89 artículos.

b) $\mu t = 12$, $p_0(t = 4) = 0.00069$.

Conjunto 17.5a

3. a) $p_{n\geq 3} = 0.4445$.

b) $p_{n\leq 2} = 0.5555$.

6. a) $p_j = 0.2$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) Cantidad esperada en la peluquería = 2 clientes.

c) $p_4 = 0.2$.

Conjunto 17.6a

1. a) $L_q = 1p_6 + 2p_7 + 3p_8 = 0.1917$ automóvil.

c) $\lambda_{\text{perdidos}} = 0.1263$ automóvil por hora.

d) Ctd. de espacios vacíos $= c - (L_s - L_q) = c - \sum_{n=0}^{8} np_n + \sum_{n=c+1}^{8} (n - c)p_n$.

Conjunto 17.6b

2. a) $p_0 = 0.2$.

b) Ingreso mensual promedio = \$50 × μt = \$375.

c) Pago esperado = \$40 × L_q = \$128.

5. a) $p_0 = 0.4$.

b) $L_q = 0.9$ automóvil.

d) $p_{n\geq 11} = 0.0036$.

6. d) Ctd. de espacios es 13, cuando menos.

Conjunto 17.6c

1. $P\{\tau > 1\} = 0.659$.

5. \$37.95 por día de 12 horas.

Conjunto 17.6d

1. a) $p_0 = 0.3654$.

b) $W_q = 0.207$ horas.

c) Cantidad esperada de espacios vacíos $= 4 - L_q = 3.212$.

e) $\mu = 10$ reducirá a W_s a unos 9.6 minutos.

4. a) $p_8 = 0.6$.

c) La probabilidad de encontrar un espacio vacío no puede ser mayor de 0.4, independientemente de la capacidad de la banda. Esto quiere decir que la mejor utilización del departamento de ensamble es 60%.

7. a) $1 - p_5 = 0.962$.
b) $\lambda_{\text{perdido}} = \lambda p_5 = 0.19$ cliente por hora.

Conjunto 17.6e

2. Para $c = 2$, $W_q = 3.446$ horas, y para $c = 4$, $W_q = 1.681$ hora; una mejoría de más del 50%.

5. Sea K la cantidad de espacios en la sala de espera. Al usar TORA, $p_0 + p_1 + \cdots + p_{K+2} \geq 0.999$ da como resultado $K \geq 10$.

7. a) $p_{n \geq 4} = 0.65772$.
e) Cantidad promedio de computadoras inactivas $= 0.667$.

Conjunto 17.6f

2. c) Utilización $= 81.8\%$.
d) $p_2 + p_3 + p_4 = 0.545$.

4. a) $p_{40} = 0.00014$.
b) $p_{30} + p_{31} + \cdots + p_{39} = 0.02453$.
d) Cantidad esperada de espacios ocupados $= L_s - L_q \cong 20$.
f) Probabilidad de no encontrar un cajón de estacionamiento $= 1 - p_{n \leq 29} = 0.02467$. La cantidad aproximada de alumnos que no se pueden estacionar en un periodo de 8 horas es 4.

Conjunto 17.6g

2. a) 7 asientos, aproximadamente.
b) $p_{n \geq 8} = 0.2911$.

Conjunto 17.6h

1. b) Cantidad promedio de reparadores inactivos $= 4 - (L_s - L_q) = 2.01$.
d) $P\{2 \text{ o } 3 \text{ servidores inactivos}\} = p_0 + p_1 = 0.34492$.

4. a) $L_s = 1.25$ máquinas.
b) $p_0 = 0.33341$.
c) $W_s = 0.25$ hora.

6. $\lambda = 2$ llamadas por hora por bebé, $\mu = 0.5$ bebé por hora, $R = 5$, $K = 5$.
a) Cantidad de bebés despiertos $= 5 - L_s = 1$ bebé.
b) $P_5 = 0.32768$.
c) $p_{n \leq 2} = 0.05782$.

Conjunto 17.7a

2. a) $E\{t\} = 14$ minutos, y $\text{var}\{t\} = 12$ minutos^2. $L_s = 7.867$ automóviles.

4. $\lambda = 0.0675$ recetas por minuto, $E\{t\} = 15$ minutos, $\text{var}\{t\} = 9.33$ minutos^2.
a) $p_0 = 0.0625$.

b) $L_q = 7.3$ recetas.
c) $W_s = 132.17$ minutos.

Conjunto 17.9a

2. Usar (M/M/1):(DG/10/10). El costo por hora es \$431.50 por el reparador 1 y \$386.50 por el reparador 2.

4. b) $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2\lambda}{c_1}}$

c) Tasa óptima de producción = 2725 piezas por hora.

Conjunto 17.9b

2. a) Costo por hora es \$86.4 por dos reparadores y \$94.80 por tres.

b) Pérdida programada por descompostura = \$30 $\times W_s$ = \$121.11 para dos reparadores y \$94.65 con tres.

4. $\lambda = 0.36125$ por máquina y por hora, $\mu = 10$ por hora. El modelo $(M/M/3):(DG/20/20)$ da $W_s = 0.10118$ hora. Ingresos perdidos por máquina y por hora $= 25 \times \lambda W_s \times \$2 =$ \$1.83, o \$36.55 para las 20 máquinas. El costo de 3 reparadores es \$60.

Conjunto 17.9c

1. a) Cantidad de reparadores = 5.

b) Cantidad de reparadores = 4.

CAPÍTULO 18

Conjunto 18.1a

4. a) $P\{H\} = p\{T\} = 0.5$. Si $0 \leq R \leq 0.5$, Jim obtiene \$10.00. Si $0.5 < R \leq 1$, Jan obtiene \$10.00.

7. Muestreo del tiempo de retraso: si $0 \leq R \leq 0.5$, $L = 1$ día. Si $0.5 < R \leq 1$, $L = 2$ días. Muestreo de la demanda por día: Si $0 \leq R \leq 0.2$, demanda = 0 unidad. Si $0.2 < R \leq 0.9$, demanda = 1 unidad. Si $0.9 < R \leq 1$, demanda = 2 unidades. Use una R para muestrear L. Si $L = 1$, use otra R para muestrear la demanda en un día; si $L = 2$, use una R para generar la demanda del día 1 y después otra R para generar la demanda para el día 2.

Conjunto 18.2a

1. a) Discreta.

Conjunto 18.3a

4. Véase la figura D.17.

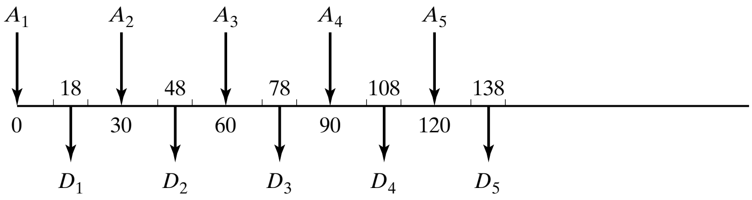


FIGURA D.17

Conjunto 18.3b

1. $t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - R)$, $\lambda = 4$ clientes por hora.

Cliente	R	t	Hora de llegada
1	—	—	0
2	0.0589	0.015	0.015
3	0.6733	0.280	0.295
4	0.4799	0.163	0.458

2. $t = a + (b - a)R$.

4. a) $0 \leq R < 0.2$: $d = 0$, $0.2 \leq R < 0.5$: $d = 1$, $0.5 \leq R < 0.9$: $d = 2$, $0.9 \leq R \leq 1$: $d = 3$.

9. Si $0 \leq R \leq p$, entonces $x = 0$, en caso contrario x = (mayor entero $\leq \frac{\ln(1 - R)}{\ln q}$).

Conjunto 18.3c

1. $y = -\frac{1}{5}\ln(0.0589 \times 0.6733 \times 0.4799 \times 0.9486) = 0.803$ hora.

6. $t = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, donde $x_i = 10 + 10R_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Conjunto 18.5a

2. a) Basada en observación.
b) Basada en tiempo.

4. a) 1.1 peluqueros.

Conjunto 18.6a

2. Intervalo de confianza: $15.07 \leq \mu \leq 23.27$.

CAPÍTULO 19

Conjunto 19.1a

2. No fertilizar, fertilizar cuando haya el estado 1, fertilizar cuando haya el estado 2, fertilizar cuando haya el estado 3, fertilizar cuando haya el estado 1 o 2, fertilizar cuando haya el estado 1 o 3, fertilizar cuando haya el estado 2 o 3, o fertilizar, independientemente del estado.

Conjunto 19.2a

1. Años 1 y 2: no anunciar si el producto tiene éxito; en caso contrario, anunciar. Año 3: no anunciar.
3. Si el nivel de inventario al comenzar el mes es cero, pedir 2 refrigeradores. En cualquier otro caso, no pedir.

Conjunto 19.3a

1. Anunciar siempre que haya el estado 1.

CAPÍTULO 20

Conjunto 20.1a

1. a) No tiene puntos estacionarios.
   b) Mínimo en $x = 0$.
   e) Punto de inflexión en $x = 0$, mínimo en $x = 0.63$ y máximo en $x = -0.63$.
4. $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ o (2, 4).

Conjunto 20.2a

1. b) $(\partial x_1, \partial x_2) = (2.83, -2.5)\partial x_2$.

Conjunto 20.2b

3. Condiciones necesarias: $2(x_i - \frac{x_n^2}{x_i}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1$. La solución es $x_i = \sqrt[n]{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\partial f = 2\delta C^{\frac{2-n}{n}}$.
6. b) Solución: $z = \frac{375}{74}$, $(x_1, x_2, x_3 x_4) = (-\frac{5}{74}, -\frac{10}{74}, \frac{155}{74}, \frac{60}{74})$, que es un punto de mínimo.

Conjunto 20.2c

2. Puntos mínimos: $(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = (-14.4, 4.56, -1.44, 38.5, -67.3)$ y (4.4, 0.44, 0.44, 10.2, −1.4).

CAPÍTULO 21

Conjunto 21.1a

2. c) $x = 2.5$.
   e) $x = 2$.
3. Cantidad de iteraciones $\approx 1.44 \ln(\frac{b-a}{\Delta - 1})$.

Conjunto 21.1b

1. Con un desarrollo de Taylor, $\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{H}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$. El hessiano **H** es independiente de **X**, porque $f(\mathbf{X})$ es cuadrática. También, el desarrollo mencionado es exacto, porque las derivadas de orden superior son cero. Así, $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ da como resultado $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 - \mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{X}^0)$. Como **X** satisface $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, **X** debe ser óptima, independientemente de la elección de $\mathbf{X}^0$ inicial.

Conjunto 21.2a

2. Solución óptima: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ z = 16$.

4. Sean $w_j = x_j + 1,\ j = 1, 2, 3,\ v_1 = w_1w_2,\ v_2 = w_1w_3$. Entonces,

Maximizar $z = v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 + 1$ sujeta a

$$v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 \leq 9,\ \ln v_1 - \ln w_1 - \ln w_2 = 0$$

$$\ln v_2 - \ln v_1 - \ln w_3 = 0, \text{ todas las variables son no negativas.}$$

Conjunto 21.2b

1. Solución: $x_1 = 1, x_2 = 0, z = 4$.

2. Solución: $x_1 = 0, x_2 = 0.4, x_3 = 0.7$.

Conjunto 21.2c

3. Solución: $x_1 = 1.39, x_2 = 1.13$.

Conjunto 21.2d

2. Maximizar $z = x_1 + x_2^2 + x_3$ sujeta a

$$x_1^2 + 5x_2^2 + 2\sqrt{x_3} + 1.28y \leq 10$$

$$16x_2^2 + 25x_3 - y^2 = 0, \quad \text{todas las variables son no negativas.}$$

Índice

N

O

P

V